

Rješavanje algebarskih jednačbi korištenjem osobina cirkularnih matrica

Emira Ljubunčić¹, Sabina Hrustić²

¹JU Gimnazija Meša Selimović

²Univerzitet u Tuzli, PMF, Odsjek matematika

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog profesora i mentora prof. dr. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom stručnom radu prezentiran je metod rješavanja kubnih jednačbi uz pomoć cirkularnih matrica, preciznije, korištenjem određenih njihovih osobina. Dato je nekoliko primjera na kojima je demonstrirana primjena metoda, te uporedba sa ostalim poznatim metodima rješavanja kubnih jednačbi, odnosno istaknute prednosti jednog u odnosu na druge.

1. Uvod

Da li ste se nekada zapitali kako riješiti neku algebarsku jednačbu bez poznate formule? Ako jeste, onda je ovaj članak baš za vas!

Rješavanje kvadratnih jednačbi učimo još u drugom razredu srednje škole i ne predstavljaju nam nikakav problem, s obzirom da postoji jednostavna formula koja nam daje korijene (nule) odgovarajućeg polinoma. Međutim, šta kada se neki matematički problem svede na rješavanje kubne ili jednačbe četvrtog stepena? Postoji više načina za njihovo rješavanje: od klasične Cardanove formule i faktORIZACIJE, Ferrarijeve formule, do numeričkih i grafičkih metoda. Svaki od njih ima prednosti, ali uglavnom i neka ograničenja.

Jedan od manje poznatih metoda za rješavanje kubnih algebarskih jednačbi, koji je u okviru magistarskog rada [3] obradila Emira Ljubunčić, uz pomoć mentorice Sabine Hrustić, je vrlo elegantan i prilično jednostavan metod, koji zahtijeva korištenje osobina cirkularnih matrica.

Cirkularne matrice su bile poznate još u XIX vijeku, što dokazuju radovi matematičara kao što su Gauss i Sylvester, a danas imaju široku primjenu u teoriji signala, kriptografiji i numeričkoj linearnoj algebri. Ove matrice, čije se vrste ciklično rotiraju, omogućavaju povezivanje sa karakterističnim polinomima i otvaraju vrata za rješavanje jednačbi višeg stepena kroz linearnu algebru.

Na sličan način moguće je pristupiti i rješavanju jednačbi četvrtog stepena, što je također obrađeno u magistarskom radu [3].

Posebno nam je zadovoljstvo što ovu metodu možemo primijeniti u nastavi kako za srednjoškolce, kojima ovakav pristup približava apstraktne koncepte, tako i za studente kojima cirkularne matrice mogu poslužiti kao praktičan alat za analizu nula polinoma trećeg stepena.

Zašto koristiti cirkularne matrice?

Ciljna skupina: srednja škola, edukacija u matematici

Ključne riječi: algebarske jednačbe, cirkularne matrice

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 01. oktobar 2025.

- *Elegantna struktura:* Pojednostavljuje izračunavanje determinanti i svojstvenih vrijednosti.
- *Povezanost sa algebram:* Direktno povezuje linearne algebarske metode sa klasičnim problemima teorije polinoma.
- *Didaktička vrijednost:* Pogodne za demonstraciju učenicima i studentima jer omogućavaju vizuelno i logičko povezivanje više oblasti matematike.

Prije nego što pređemo na konkretne primjere, prisjetimo se kako funkcioniraju cirkularne matrice i zašto su korisne za rješavanje jednadžbi trećeg stepena.

2. Cirkularne matrice i njihova svojstva

Cirkularne matrice predstavljaju posebnu klasu kvadratnih matrica koje imaju cikličnu (cirkularnu) strukturu. Neka je matrica $C = [c_{ij}]_{n \times n}$, a njena prva vrsta oblika

$$(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}).$$

Kažemo da je matrica C *cirkularna matrica* ako svaka sljedeća vrsta nastaje cikličnim pomakom prethodne vrste ulijevo. Takva matrica ima oblik

$$C = C_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Cirkularna matrica je u potpunosti određena svojom prvom vrstom. Ima konstantne vrijednosti na "dijagonalama" paralelnim s glavnom dijagonalom, što značajno pojednostavljuje njenu analizu, vidjeti [1, 2]. U općem slučaju, cirkularne matrice nisu simetrične. Međutim, u specijalnom slučaju, kada za koeficijente vrijedi uslov

$$c_k = c_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

elementi matrice su raspoređeni simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu, te je cirkularna matrica simetrična.

Neka za matricu A , vektor $X \neq 0$ i parametar λ vrijedi

$$AX = \lambda X.$$

Tada parametar λ zovemo svojstvena vrijednost matrice A , a vektor X svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ . Nalaženje svojstvenih vektora matrice svodi se na rješavanje homogenog sistema $(A - \lambda I)X = 0$. Da bi ovaj sistem imao netrivialna rješenja, operator $A - \lambda I$ ne smije biti regularan. Prema tome, njegova determinanta mora biti jednaka nuli. Dakle, svojstvene vrijednosti matrice A su nule karakterističnog polinoma $\det(A - \lambda I)$, odnosno rješenja karakteristične jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

Osnovna svojstva cirkularnih matrica

Neka je C cirkularna matrica dimenzije $n \times n$ čija je prva vrsta $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Tada vrijedi da je

$$C^n = I,$$

gdje je I jedinična matrica. Ovo implicira da su svojstvene vrijednosti matrice C rješenja jednadžbe

$$\lambda^n = 1,$$

odnosno n -ti korijeni jedinice.

Primjer: Cirkularna matrica reda 3

Posmatrajmo matricu

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Direktnim računanjem dobijamo

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Kako je $C^3 = I$, slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice C rješenja jednačbe

$$\lambda^3 = 1.$$

Također, svaka cirkularna matrica reda 3 ima oblik

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Ovakva matrica može se zapisati i u obliku

$$A = c_0 I + c_1 C + c_2 C^2,$$

gdje je C osnovna cirkularna matrica reda 3.

Pridruženi polinom

Neka je λ svojstvena vrijednost osnovne matrice C , a X pripadajući svojstveni vektor. Tada važi

$$CX = \lambda X, \quad C^k X = \lambda^k X, \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, za matricu $A = c_0 I + c_1 C + \dots + c_{n-1} C^{n-1}$ vrijedi

$$AX = (c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1})X.$$

Izraz

$$q(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$$

predstavlja svojstvenu vrijednost matrice A i naziva se *pridruženi polinom*. Ovaj polinom sadrži sve informacije o svojstvenim vrijednostima cirkularne matrice.

Budući da su svojstvene vrijednosti osnovne matrice C , n -ti korijeni jedinice, možemo jednostavno izračunati vrijednosti pridruženog polinoma za te korijene i dobiti rješenja odgovarajuće jednačbe. Na taj način rješavanje algebarskih jednačbi svodi se na računanje svojstvenih vrijednosti odgovarajuće cirkularne matrice, odnosno analizu pridruženog polinoma. Ova perspektiva vodi do metode za rješavanje kvadratnih, kubnih i jednačbi četvrtog stepena, jer omogućava da apstraktne polinomske jednačbe prevedemo u problemski okvir linearne algebre.

3. Postupak za rješavanje kubnih jednačbi korištenjem cirkularnih matrica

U ovom dijelu prikazujemo kako se kubna jednačba može riješiti korištenjem osobina cirkularnih matrica. Pristup je zasnovan na povezivanju zadatog polinoma sa posebno konstruisanom cirkularnom matricom.

Koraci rješavanja

Korak 1. Polazimo od općeg oblika kubne jednačbe

$$p(x) = 0,$$

gdje je

$$p(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma.$$

Korak 2. Uvodi se smjena

$$x = y - \frac{a}{3},$$

kako bismo eliminisali kvadratni član i dobili potisnutu kubnu jednačbu oblika

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0.$$

Korak 3. Povezujemo ovu jednačbu sa cirkularnom matricom oblika

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjedba 3.1. Zbir elemenata glavne dijagonale ove matrice, to jest, trag matrice C , jednak je nuli, što odgovara eliminaciji kvadratnog člana u potisnutoj kubnoj jednačbi.

Korak 4. Određuje se polinom

$$\det(\lambda I - C).$$

Za cirkularnu matricu

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$\det(\lambda I - C) = \lambda^3 - (b^3 + c^3) - 3bc\lambda.$$

Korak 5. Povezivanje sa reduciranom jednačbom

Izjednačavanjem sa reduciranom jednačbom

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

dobijamo uvjete

$$b^3 + c^3 = -\gamma_1, \quad 3bc = -\beta_1.$$

Korak 6. Eliminacija jedne nepoznate

Iako se izraz

$$b^3 + c^3 = (b + c)^3 - 3bc(b + c)$$

može zapisati u ovom obliku, on ne omogućava neposredno određivanje vrijednosti b i c . Zbog toga uvodimo smjenu inspirisanu Vieteovim formulama. Neka je

$$t = b^3, \quad s = c^3.$$

Tada iz uslova dobijenih u prethodnom koraku slijedi

$$t + s = -\gamma_1, \quad ts = b^3 c^3 = (bc)^3 = \left(-\frac{\beta_1}{3}\right)^3 = -\frac{\beta_1^3}{27}.$$

Dakle, brojevi t i s su rješenja kvadratne jednadžbe

$$z^2 - (t + s)z + ts = 0,$$

odnosno

$$z^2 + \gamma_1 z - \frac{\beta_1^3}{27} = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$t = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}, \quad s = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}.$$

Otuda dobijamo

$$b^3 = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}, \quad c^3 = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}.$$

Primjedba 3.2. U izrazima za b i c uvodimo pomoćne konstante

$$m = \frac{-\gamma_1}{2}, \quad n = \frac{\gamma_1^2}{4} + \frac{\beta_1^3}{27},$$

pri čemu vrijedi

$$b = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}}, \quad c = \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}.$$

Korak 7. Pridruženi polinom

Koristeći dobijene vrijednosti b i c , formiramo pridruženi polinom

$$q(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2.$$

Korak 8. Nalaženje rješenja korištenjem kubnih korijena jedinice

Rješenja se računaju za

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

gdje je

$$y_1 = q(1), \quad y_2 = q(\omega), \quad y_3 = q(\omega^2).$$

Korak 9. Rješenja početne jednadžbe su

$$x_i = y_i - \frac{a}{3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Primjer 3.3. Naći nule polinoma

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 20.$$

Rješenje. Najprije uvodimo standardnu smjenu kojom se uklanja kvadratni član, $x = y - \frac{a}{3}$, gdje je $a = -3$, pa je $x = y + 1$. Uvrštavanjem ove smjene u početnu jednadžbu dobijamo

$$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - 6(y + 1) - 20 = 0,$$

odnosno reduciranu kubnu jednadžbu

$$y^3 - 9y - 28 = 0.$$

Dobijena jednačba je oblika

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0,$$

gdje je $\beta_1 = -9$ i $\gamma_1 = -28$. Rješenje tražimo u obliku

$$y = b + c,$$

pri čemu vrijedi

$$b^3 + c^3 = -\gamma_1 = 28, \quad bc = -\frac{\beta_1}{3} = 3.$$

Iz uslova $bc = 3$ slijedi $b^3 c^3 = (bc)^3 = 27$. Neka je $b^3 = m + \sqrt{n}$, $c^3 = m - \sqrt{n}$. Tada je

$$b^3 + c^3 = 2m = 28 \Rightarrow m = 14,$$

i

$$b^3 c^3 = m^2 - n = 27,$$

odakle slijedi $n = 196 - 27 = 169$. Prema tome,

$$b^3 = 14 + 13 = 27, \quad c^3 = 14 - 13 = 1,$$

pa je

$$b = 3, \quad c = 1.$$

Jedno realno rješenje reducirane jednačbe je

$$y_1 = b + c = 4.$$

Vraćanjem smjene $x = y + 1$ dobijamo prvo rješenje početne jednačbe

$$x_1 = 5.$$

Preostala dva rješenja dobijaju se korištenjem kompleksnih kubnih korijena jedinstva i imaju oblik

$$y_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{3},$$

pa nakon vraćanja smjene slijedi

$$x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Dakle, nule polinoma $p(x)$ su

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Kako je

$$q(1) = b + c = 3 + 1 = 4,$$

nakon uvođenja smjene prvo rješenje je

$$x_1 = y_1 + 1 = 5.$$

Za kompleksne kubne korijene jedinstva dobijamo

$$q\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + i\sqrt{3},$$

pa je, nakon vraćanja smjene, drugo rješenje

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Analogno,

$$q\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 - i\sqrt{3},$$

odnosno, nakon vraćanja smjene, treće rješenje je

$$x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Primjer 3.4. (Solarna energija) Neka solarna elektrana na krovu porodične kuće dnevno proizvede i akumulira ukupno 500 kWh električne energije. Dnevna dobit x u kWh (odnosno količina energije koja direktno pokriva potrošnju ili se može prodati) zadovoljava relaciju

$$x^3 + x = 500.$$

Kolika je ta dobit?

Rješenje. Rješavamo kubnu jednačbu

$$x^3 + x - 500 = 0.$$

Jednačba je već u reduciranoj formi

$$x^3 + \beta_1 x + \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = -500.$$

Kako trag odgovarajuće cirkularne matrice mora biti jednak nuli (zbog izostanka kvadratnog člana), cirkularna matrica koja odgovara ovoj jednačba ima oblik

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom koji odgovara matrici C je

$$\det(\lambda I - C) = \lambda^3 - b^3 - c^3 - 3bc\lambda.$$

Poređenjem s polinomom $x^3 + x - 500$ dobijamo sistem

$$\begin{cases} b^3 + c^3 = 500, \\ 3bc = -1. \end{cases}$$

Iz druge jednačbe slijedi

$$bc = -\frac{1}{3}, \quad b^3 c^3 = (bc)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Neka je

$$b^3 = m + \sqrt{n}, \quad c^3 = m - \sqrt{n}.$$

Tada vrijedi

$$b^3 + c^3 = 2m = 500 \Rightarrow m = 250,$$

i

$$b^3 c^3 = m^2 - n = -\frac{1}{27},$$

odakle slijedi $n = m^2 + \frac{1}{27}$, odnosno $n = 62500 + \frac{1}{27}$. Prema tome,

$$b = \sqrt[3]{250 + \sqrt{62500 + \frac{1}{27}}}, \quad c = \sqrt[3]{250 - \sqrt{62500 + \frac{1}{27}}}.$$

Poznati kubni korijeni iz jedinice su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Uvrštavanjem u pridruženi polinom

$$q(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2$$

dobijamo rješenja

$$x_1 = b + c, \quad x_2 = b\lambda_2 + c\lambda_2^2, \quad x_3 = b\lambda_3 + c\lambda_3^2.$$

Kako su x_2 i x_3 kompleksno konjugovana, jedino realno rješenje je $x = b + c$, odnosno

$$x \approx 7,895 \text{ kWh.}$$

Dnevna dobit solarne elektrane iznosi približno 7,895 kWh. Ovaj primjer pokazuje kako se realan model iz energetike može opisati kubnom jednačbom i riješiti korištenjem osobina cirkularnih matrica, povezujući apstraktne matematičke metode s praktičnim primjenama u savremenim temama energetske efikasnosti.

4. Zaključak

Kubne jednačbe možemo rješavati na razne načine: pomoću Cardanovih formula, Tschirnhausovog metoda (vidjeti [3]), ali i primjenom osobina cirkularnih matrica. Tschirnhausov metod je računski zahtjevniji, dok Cardanove formule često vode do komplikovanih korijenja koje je teško interpretirati bez računarske podrške.

Postupak rješavanja kubnih jednačbi pomoću cirkularnih matrica, odnosno, njihovih osobina, je primjenljiv, jednostavan za praćenje i didaktički interesantan. Dovoljno je znati koeficijente cirkularne matrice i na osnovu njih odrediti korijene polinoma, kao i sam polinom. Dobra strana ove metode je što njenom primjenom sigurno pronalazimo rješenja zadate jednačbe, pri čemu postupak njihovog pronalaska povezuje znanja iz različitih oblasti matematike.

Kroz istraživanje sprovedeno tokom izrade magistarskog rada, uočile smo različite prednosti i nedostatke metoda koje se koriste za rješavanje jednačbi stepena većeg od dva. U nastavku prikazujemo sažeto poređenje najčešćih pristupa:

Metoda	Prednosti	Nedostaci
Cardanova formula	Egzaktno rješenje, može se direktno primijeniti na kubne jednačbe	Teško primjenljiva u nastavnoj praksi zbog složenih računa i rada sa kompleksnim brojevima
Tschirnhausova metoda	Generalizabilna na više stepene; čisto algebrailki pristup	Računski vrlo složena; zahtijeva više koraka i transformacija
Cirkularne matrice	Intuitivna veza sa linearnom algebrom; pogodna za nastavu; omogućava uvid u strukturu rješenja	Zahtijeva poznavanje koncepta matrica i svojstvenih vrijednosti

5. Za dalje istraživanje

Iako smo se u ovom članku fokusirali na rješavanje kubnih jednačbi korištenjem cirkularnih matrica, ista ideja može se proširiti na jednačbe četvrtog stepena i šire. Posebno je zanimljiva mogućnost primjene ovog pristupa u računarstvu, digitalnoj obradi signala i teoriji kodiranja, gdje cirkularne matrice igraju važnu ulogu.

Kao podsticaj za dalje istraživanje i primjenu metode, ostavljamo čitaocima sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1.

Riješite jednačbu

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = 0$$

pomoću metode cirkularnih matrica. Uvedite odgovarajuću smjenu i pronađite nule polinoma koristeći pridruženi polinom.

Zadatak 2. (Primjena)

Pretpostavimo da u jednom danu sistem pametne distribucije električne energije balansira između potrošnje, rezervi i prodaje. Ako je ukupna efektivna snaga u kWh izražena modelom

$$x^3 + 2x = 162,$$

odredite realnu dobit izraženu u kilovat-satima koristeći osobine cirkularnih matrica. Objasnite smisao smjene i uporedite sa numeričkim rješenjem.

Literatura

- [1] Dan Kalman and James E. White, Polynomial Equations and Circulant Matrices, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 108, No. 9 (Nov., 2001), pp. 821-840
- [2] Biljana M. Radičić, *Prilog teoriji k-cirkularnih matrica*, Beograd 2016.
- [3] E. Ljubunčić, *Algebarske jednačbe stepena većeg od dva*, magistarski rad, Tuzla 2022.