

Balansirajući i kvadratno-trougaoni brojevi

Sanela Halilović¹, Amela Selimović²

¹PMF, Univerzitet u Tuzli
²JUMS saobraćajna škola Tuzla

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog profesora dr.sci. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom radu pokazujemo kako kvadratno-trougaone brojeve možemo odrediti pomoću odgovarajuće Pellove jednačine. Zatim predstavljamo balansirajuće brojeve i dajemo vezu sa kvadratno-trougaonim brojevima, te nekoliko rekurentnih relacija koje vrijede među njima.

1. Uvod

Trougaoni broj T_n je prirodni broj oblika $\frac{n(n+1)}{2}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Ovaj broj se može predstaviti u obliku pravilnog trougla. Naime, T_n tačkica se može ravnomjerno rasporediti u obliku jednakostraničnog trougla, te otuda i ovakav naziv. Tako dobijamo:

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Trougaoni brojevi su: 1, 3, 6, 10, 15,

Kvadratni broj (ili potpun kvadrat) K_n je broj oblika n^2 , gdje je $n \in \mathbb{N}$. K_n tačaka možemo ravnomjerno rasporediti u obliku pravilnog četverougla, to jest kvadrata. Kvadratni brojevi

$$K_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

su brojevi: 1, 4, 9, 16, 25,

Trougaoni i kvadratni brojevi spadaju u figurativne brojeve, a više o njima može se pogledati u radu [5].

Definicija 1.1. *Diofantska jednačina*

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{1}$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, naziva se Pellova jednačina.

Pellova jednačina je rješiva za svaki d . Najmanje rješenje u skupu prirodnih brojeva Pellove jednačine zovemo fundamentalnim rješenjem.

Ciljna skupina: srednja škola i fakultet

Ključne riječi: trougaoni brojevi, kvadratni brojevi, balansirajući brojevi, Pellova jednačina

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 10. decembar 2025.

Teorem 1.2. *Pellova jednačina (1) ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je (x_1, y_1) fundamentalno rješenje, onda su sva rješenja (x_n, y_n) u skupu prirodnih brojeva ove jednačine data formulom*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = \left(x_1 + y_1 \sqrt{d} \right)^n.$$

Pellove jednačine se mogu rješavati pomoću razvoja broja $\sqrt{d}$ u verižni razlomak (vidi [4]). Svaki realan broj α se može zapisati u obliku

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

ili kraće zapisano $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Definicija 1.3. *Neka je a_0 cijeli broj i neka su $a_1, a_2, \dots$ prirodni brojevi. Ako je $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ onda ovaj izraz nazivamo razvoj broja α u jednostavni verižni razlomak. Razlomak $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ je i -ta konvergenta od α , a_i je i -ti parcijalni kvocijent od α , a $\alpha_i = [a_i; a_{i+1}, \dots]$ je i -ti potpuni kvocijent od α .*

Propozicija 1.4. *Za $n \geq 2$ vrijedi*

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1,$$

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1.$$

Dogovorno uzimamo da je $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$. Uz ovaj dogovor Propozicija 1.4 vrijedi za sve $n \geq 0$.

Teorem 1.5. *Sva rješenja Pellove jednačine $x^2 - dy^2 = 1$ u skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ su oblika $(x, y) = (p_i, q_i)$, gdje su p_i/q_i konvergente u razvoju broja $\sqrt{d}$ u jednostavni verižni razlomak. Neka je r dužina perioda u razvoju broja $\sqrt{d}$ u jednostavni verižni razlomak. Ako je r paran, onda su sva rješenja jednačine data sa:*

$$(x, y) = (p_{nr-1}, q_{nr-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fundamentalno rješenje je $(x_1, y_1) = (p_{r-1}, q_{r-1})$. Ako je r neparan, onda su sva rješenja jednačine data sa,

$$(x, y) = (p_{2nr-1}, q_{2nr-1}),$$

dok joj je fundamentalno rješenje $(x_1, y_1) = (p_{2r-1}, q_{2r-1})$.

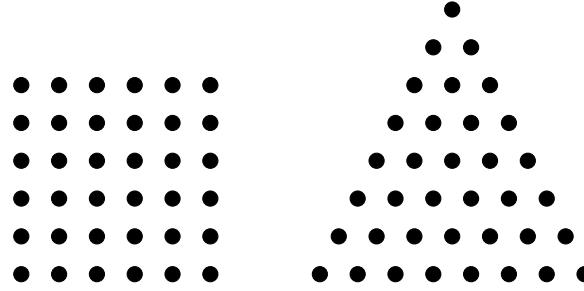
2. Kvadratno-trougaoni brojevi

Postoje brojevi koji su istovremeno i kvadratni i trougaoni. Na primjer, broj 36 je kvadratni jer je $K_6 = 6^2 = 36$, ali i trougaoni jer je $T_8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ (vidi Sliku 1). Dakle, šesti kvadratni broj je jednak osmom trougaonom broju. Brojevi koji su istovremeno i trougaoni i kvadratni brojevi, nazivaju se *kvadratno-trougaoni brojevi*. Za n -ti kvadratno-trougaoni broj možemo koristiti oznaku S_n .

Da li ima još takvih brojeva i koliko ih ima?

Da bismo našli sve kvadratno-trougaone brojeve, treba riješiti sljedeću jednačinu,

$$K_n = T_m. \tag{2}$$



Slika 1: Kvadratno-trougao ni broj 36 kao kvadrat i kao trougao.

Dobijamo,

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \frac{m(m+1)}{2} \iff \\
 m^2 + m - 2n^2 &= 0 \iff \\
 m^2 + m + \frac{1}{4} - 2n^2 &= \frac{1}{4} \iff \\
 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 2n^2 &= \frac{1}{4} \iff \\
 (2m+1)^2 - 8n^2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ako u (3) uvedemo smjene $2m+1 = x$ i $n = y$, dobit ćemo Pellovu jednačinu:

$$x^2 - 8y^2 = 1. \tag{4}$$

Koristit ćemo razvoj broja $\sqrt{8}$ u jednostavni verižni razlomak

$$\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, \dots] = [2; \overline{1, 4}],$$

gdje vidimo da je period $r = 2$ paran.

U Tablici 1 se nalazi nekoliko prvih konvergenti razvoja broja $\sqrt{8}$ u verižni razlomak.

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i			2	1	4	1	4	1	4	1
p_i	0	1	2	3	14	17	82	99	478	577
q_i	1	0	1	1	5	6	29	35	169	204

Tablica 1: Konvergente razvoja broja $\sqrt{8}$.

Prema Teoremu 1.5 sva rješenja jednačine (4) u skupu prirodnih brojeva su:

$$(x_n, y_n) = (p_{nr-1}, q_{nr-1}) = (p_{2n-1}, q_{2n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje su $\frac{p_i}{q_i}$ konvergente razvoja $\sqrt{8}$ u verižni razlomak, a fundamentalno rješenje je

$$(x_1, y_1) = (p_{r-1}, q_{r-1}) = (p_1, q_1).$$

Iz Tablice 1 vidimo da je $(x_1, y_1) = (3, 1)$ fundamentalno rješenje jednačine (4), te četiri prva rješenja su:

$$(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (3, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (p_3, q_3) = (17, 6)$$

$$(x_3, y_3) = (p_5, q_5) = (99, 35)$$

$$(x_4, y_4) = (p_7, q_7) = (577, 204).$$

Sva rješenja su data sa:

$$x_n + y_n \sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kada vratimo smjene: $n = y$ i $m = \frac{x-1}{2}$, dobijamo Tablicu 2 sa rješenjima polazne jednačine (2).

x	$y = n$	$m = \frac{x-1}{2}$	$K_n = n^2$	$T_m = \frac{m(m+1)}{2}$
3	1	1	1	1
17	6	8	36	36
99	35	49	1225	1225
577	204	288	41616	41616

Tablica 2: Rješenja (x, y) Pellove jednačine i rješenja jednačine $K_n = T_m$.

S obzirom da su zadnje dvije kolone jednake, ti brojevi su zaista istovremeno i trougaoni i kvadratni brojevi. Takvih brojeva ima beskonačno mnogo jer i rješenja odgovarajuće Pellove jednačine (4) ima beskonačno mnogo.

3. Balansirajući brojevi

Indijski matematičari Behera i Panda (vidi [1]) su krajem 90-ih godina prošlog stoljeća razmatrali sljedeći problem: *Postoje li dva uzastopna trougaona broja čiji je zbir opet trougaoni broj?* Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi n i r , $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r} ? \quad (5)$$

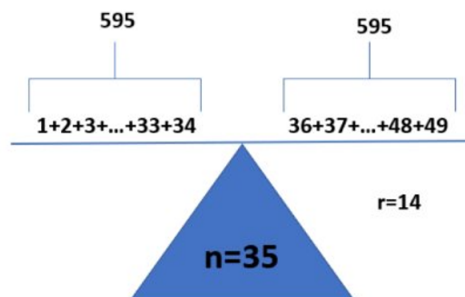
Uočimo da je

$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = T_8,$$

te

$$T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = 1225 = T_{49},$$

pa su $(n, r) = (6, 2)$ i $(n, r) = (35, 14)$ rješenja postavljenog problema.



Slika 2: Balansirajući broj $n = 35$ sa balanserom $r = 14$.

Prirodno je pitati se ima li još parova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni problem. Pokazat ćemo da ih ima beskonačno mnogo. Relacija (5) je ekvivalentna izrazu

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + r),$$

to jest

$$1 + 2 + \dots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r). \quad (6)$$

Na prethodnu relaciju možemo gledati kao na diofantsku jednačinu sa nepoznatima n i r , pa se početni problem svodi na traženje rješenja jednačine (6).

Definicija 3.1. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednačinu (6). Tada se n naziva balansirajući broj, a r njemu pridruženi balanser. Oznaka za n -ti balansirajući broj je B_n .

Uočimo da je trivijalno rješenje jednačine (6) uređeni par $(n, r) = (1, 0)$. Označavamo ga sa $B_1 = 1$. Pokazali smo da su 6 i 35 balansirajući brojevi sa pripadnim balanserima $r = 2$ i $r = 14$, respektivno. To su sljedeća dva balansirajuća broja: $B_2 = 6$ i $B_3 = 35$.

Na prvi pogled naziv ovog niza brojeva - *balansirajući brojevi* (engl. *balancing numbers*) zvuči neobično. No, pogledamo li Sliku 2 na kojoj smo vizualizirali balansirajući broj B_3 , vidimo ravnotežu, to jest "balans" dva zbira uzastopnih prirodnih brojeva.

Jednačinu (6) možemo zapisati kao

$$\frac{n(n-1)}{2} = nr + \frac{r(r+1)}{2}, \quad (7)$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}. \quad (8)$$

Uočimo da je desna strana u (8) upravo jednaka $(n+r)$ -tom trougaonom broju, pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija balansirajućeg broja.

Teorem 3.2. Prirodan broj n je balansirajući ako i samo ako je n^2 trougaoni broj.

Sa druge strane (7) možemo shvatiti i kao kvadratnu jednačinu po r :

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0 \quad (9)$$

Jasno je da je n balansirajući ako i samo ako postoji pozitivno cjelobrojno rješenje prethodne jednačine, to jest ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2},$$

prirodan broj. Dalje, zaključivanjem da diskriminanta jednačine (9) mora biti potpun kvadrat dobijamo još jednu karakterizaciju balansirajućeg broja.

Teorem 3.3. Prirodan broj n je balansirajući ako i samo ako je $8n^2 + 1$ potpuni kvadrat.

Prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da su balansirajući brojevi upravo rješenja Pellove jednačine

$$m^2 - 8n^2 = 1, \quad (10)$$

pa ih stoga postoji beskonačno mnogo. Skup svih rješenja Pellove jednačine (10) po nepoznatoj n je upravo niz balansirajućih brojeva (B_n) .

Dakle, balansirajući broj n je prirodan broj koji zadovoljava jednačinu $T_n + T_{n+1} = T_{n+r}$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, n je balansirajući broj ako i samo ako je n^2 trougaoni broj (Teorem 3.2), odnosno

$$B_n^2 = T_{n+r},$$

gdje je r pripadni balanser.

Prema onome što smo pokazali, niz kvadrata balansirajućih brojeva (B_n^2) upravo predstavlja niz kvadratno-trougaonih brojeva. Dakle, kvadrat svakog balansirajućeg broja je kvadratno-trougaoni broj i obratno, kojim je svakog kvadratno-trougaonog broja je balansirajući broj.

Detaljnije o trougaonim, kvadratnim, kvadratno-trougaonim i balansirajućim brojevima može se naći u [3]. Sada ćemo navesti tvrdnju koja nam daje dvije rekursivne relacije za balansirajuće brojeve.

Lema 3.4. *Neka su B_n , $n \in \mathbb{N}$ balansirajući brojevi. Tada za sve $n \geq 2$ vrijedi:*

- a) $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$,
- b) $B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}$.

Dokaz se može vidjeti u [2]. Jednakosti iz Leme 3.4 možemo iskoristiti za generisanje balansirajućih brojeva, uz početne uslove $B_1 = 1$ i $B_2 = 6$.

Teorem 3.5. *Niz kvadratno-trougaonih brojeva (S_n) , zadovoljava rekursivnu relaciju:*

$$S_{n+1} = 34S_n - S_{n-1} + 2,$$

za $n \geq 2$, uz početne uslove $S_1 = 1$, $S_2 = 36$.

Dokaz: Kvadrirajmo obje strane rekursivne relacije iz Leme 3.4 pod a). Vrijedi

$$\begin{aligned} (B_{n+1})^2 &= (6B_n - B_{n-1})^2 \\ B_{n+1}^2 &= 36B_n^2 - 12B_nB_{n-1} + B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 12B_nB_{n-1} + 2B_{n-1}^2 - B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 2B_{n-1}(6B_n - B_{n-1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 2B_{n-1}B_{n+1} - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2B_n^2 - 2B_{n-1}B_{n+1} - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2(B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2((1 + B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2 - B_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Ovdje smo u predzadnjem redu jednakosti koristili Lemu 3.4 pod b). Dakle dobili smo

$$B_{n+1}^2 = 34B_n^2 - B_{n-1}^2 + 2,$$

što je upravo jednačina

$$S_{n+1} = 34S_n - S_{n-1} + 2,$$

jer za svaki prirodni broj n vrijedi $B_n^2 = S_n$. $\square$

Zadatak 1. *Pokazati da za svaki balansirajući broj x vrijedi da je $F(x) = 2x\sqrt{1+8x^2}$ takođe balansirajući broj.*

Rješenje: Broj x je balansirajući broj, pa je $1 + 8x^2$ prema Teoremu 3.3 potpun kvadrat. Broj $\frac{8x^2(1+8x^2)}{2}$ je trougaoni broj jer je oblika $\frac{n(n+1)}{2}$. Sa druge strane, kako je $\frac{8x^2(1+8x^2)}{2} = 4x^2(1+8x^2)$, on je i potpun kvadrat jer su i $4x^2$ i $1 + 8x^2$ potpuni kvadrati. Prema tome, $4x^2(1+8x^2)$ je kvadratno-trougaoni broj, a to znači da je $\sqrt{4x^2(8x^2+1)} = 2x\sqrt{1+8x^2}$ balansirajući broj. $\square$

Na kraju preporučujemo čitaocima da se još pozabave ovim interesantnim brojevima i ostavljamo nekoliko zadataka kao podsticaj.

Zadatak 2. Pokazati da za svaki balansirajući broj x vrijedi da je $G(x) = 3x + \sqrt{1 + 8x^2}$ također balansirajući broj.

Zadatak 3. Dokazati da za balansirajuće brojeve vrijedi

$$B_{2n} = B_n \cdot (B_{n+1} - B_{n-1}).$$

Zadatak 4. Za svaki prirodni broj n vrijedi $B_1 + B_3 + \dots + B_{2n-1} = B_n^2$, gdje su B_n balansirajući brojevi.

Zadatak 5. Za svaki prirodni broj n vrijedi $B_2 + B_4 + \dots + B_{2n} = B_n B_{n+1}$, gdje su B_n balansirajući brojevi.

Literatura

- [1] A. Behera and G. K. Panda: *On the Square Roots of Triangular Numbers*, The Fibonacci Quarterly, 1999.
- [2] R. Gautam: *Ballancing Numbers and Application*, Journal of Advanced College of Engineering and Management, vol.4, 2018.
- [3] A. Habibović: *Trougaoni i kvadratni brojevi*, Diplomski rad, PMF Tuzla, 2024.
- [4] B. Ibrahimpašić: *Uvod u teoriju brojeva*, Pedagoški fakultet Bihać, 2014.
- [5] S. Mustafić: *Figurativni brojevi*, Evolventa, 3 (1), 2020.