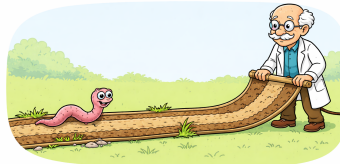


2

KUTAK ZA ZADATKE

Nagradni zadatak: Unedogledna trka



Preko sedam gora i sedam mora postoji zemlja Unedogledija u kojoj svi žive unedogled dugo. Tamo se nalazi gumeni tepih dužine jedan metar koji se može rastezati do unedogled. Na jednom kraju tepiha se nalazi neumorni crvić koji grabi ka drugom kraju tepiha brzinom jedan centimetar u minuti. Na drugom kraju trake nalazi se čikica čija je uloga da nervira crvića tako što nakon svake minute on rastegne tepih za jedan metar. Na početku ove zanimljive "trke" žitelji Unedogledije su bili podijeljeni u mišljenju da će crvić ikada doći do drugog kraja tepiha. Ali kako je vrijeme prolazilo sve ih je više bilo ubijeđeno u isti ishod trke. Vrijeme je prolazilo i prolazilo ...

Svaki put kada čikica istegne tepih, dio tepiha koga crvić pređe ostaje isti! Nakon što čikica prvi put istegne tepih crvić je prešao $\frac{1}{100}$ -nu tepiha, nakon drugog istezanja crvić je prešao $\frac{1}{200}$ -nu istegnutog tepiha, nakon treće minute $\frac{1}{300}$ -nu i tako dalje. Dakle, nakon n minuta crvić je prešao put

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 100} = \frac{1}{100} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Izraz $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ predstavlja n -tu parcijalnu sumu S_n poznatog harmonijskog reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Pitanje "Da li će crvić ikada doći do kraja trake?" se svodi na pitanje da li S_n može preći vrijednost 100 za neko $n \in \mathbb{N}$? Ako bi to bilo moguće, tada bi vrijedilo $\frac{1}{100} \cdot S_n \geq 1$, a to bi značilo dolazak crvića na kraj trake! Pa, da li je ovo moguće?

Savremenim računarima možemo provjeriti na primjer da je

$$S_{1000000} \approx 14.392726722.$$

Iako vrijednost ove milionite parcijalne sume obeshrabruje za pozitivan odgovor na postavljeno pitanje, ipak se pokazuje da će za $n = 2 \cdot 10^{43}$ minuta S_n biti veći od 100, a to znači da će crvić ipak doći do kraja tepiha. $2 \cdot 10^{43}$ minuta pretvoreno u godine je 10^{37} , a što je mnogo više od 13 milijardi godina, na koliko se u savremenoj teorijskoj fizici procjenjuje da je star naš svemir.

Zadatak. *Da li postoji prirodan broj n veći od 1 takav da je zbir*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

cijeli broj?

Ciljna skupina: svi uzrasti

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.06.2026. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)

Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

Rješenje i rješavatelji nagradnog zadatka iz Evolvente 7 (2) 2024.

Prvo, tačno pristiglo rješenje nagradnog zadatka iz broja **7 (2) 2024.** je dala **Lamija Smajlović**, OŠ "Mushin Rizvić" Fojnica, učenica 7. razreda. Time je ovaj rješavatelj zaslužio predviđenu nagradu uredništva Evolvente.

Tačno rješenje su dali i **Selma Mujačić**, **Mak Simleša**, **Ajdin Karić** i **Lana Žepić**.

Zadatak. *Imamo dvanaest kuglica koje su po svemu identične, osim što je jedna od njih drugačije mase. Pri tome ne znamo da li je lakša ili teža od ostalih jedanaest. Na raspolaganju nam je vaga bez utega. Kako pomoću tri mjerenja odrediti koja je kuglica "lažna" i kakve je mase (da li je lakša ili teža od ostalih)?*

Rješenje:

Primjedba: Primjetimo odma na početku da ako imamo tri kuglice i među njima je lažna, uz podatak da li je lakša ili teža, možemo odrediti lažnu kuglicu pomoću jednog mjerenja. Naime, stavljajući po jednu od tih na tasove vage imamo dvije mogućnosti: 1) Ako je ravnoteža, lažna je preostala kuglica i znamo da je lakša ili teža. 2) Vaga nije u ravnoteži, lažna je na tasu i pronalazimo je iz informaciju da li je lakša ili teža.

Kuglice dijelimo u tri grupe A , B i C , po 4. U prvom mjerenju stavljamo na jedan tas kuglice iz A i na drugi tas kuglice iz B .

1. Kuglice su u ravnoteži. Lažna se nalazi u grupi C . Uzimamo tri kuglice iz grupe C i tri kuglice iz A i izvodimo drugo mjerenje.
 - (a) Kuglice su u ravnoteži. Lažna kuglica je preostala kuglica iz grupe C i ne znamo njenu težinu. U trećem mjerenju ostaje samo utvrditi da li je teža ili lakša. To činimo tako što nju stavimo na jedan tas, a bilo koju "pravu" kuglicu stavimo na drugi tas. Ravnoteža nije moguća, pa ostaje samo utvrditi da li je lažna teža ili lakša.
 - (b) Kuglice nisu u ravnoteži. Lažna je u kuglicama grup C , a u zavisnosti od toga da li su kuglice iz C pretegle ili ne saznajemo da li je lažna teža ili lakša. Koristeći se primjedbom sa početka određujemo koja je lažna i kakva je.
2. Kuglice nisu u ravnoteži. Recimo da su kuglice iz A pretegle kuglice iz B . Kuglice grupe C su "prave". Uzimamo tri kuglice iz grupe A i mjenjamo ih sa tri kuglice grupe C , a tri kuglice grupe B mijenjamo sa uzetih tri kuglice grupe A .
 - (a) Kuglice su u ravnoteži. Dakle, lažna je među tri uzete iz grupe B i znamo da je lakša. Sada ponovo iskoristimo primjebdu sa početka.
 - (b) Kuglice nisu u ravnoteži.
 - i. Neka je pretegao tas na kome se nalaze kuglice grupe C . Kako je i u prethodnom mjerenju taj tas pretegnuo, to znači da je lažna kuglica četvrta kuglica na tom tasu (iz A) i ona je teža ili četvrta kuglica na drugom tasu (iz B) koja je lakša. U posljednjem mjerenju stavljamo jednu "pravu" kuglicu na jedan tas, a na drugi jednu od ovih koje su potencijalno lažne.
 - A. Ako je ravnoteža, ona koju nismo stavili na tas je lažna i znamo koje je težine.
 - B. Ako nije ravnoteža, znamo koja je lažna i koje je težine.
 - ii. Neka je pretegao tas na koga smo prebacili tri kuglice iz grupe A . Ovo znači da je lažna među te tri iz grupe A i znamo da je teža. Pozovimo se opet na polaznu primjebdu.

□