ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

UM TK

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 6, No. 2, TUZLA 2023.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 6, No. 2, 2023

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton (JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. ili direktno na https://evolventa.ba
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, decembar 2023. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 2 - 14

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Magični poligoni

Amir Gvozden[1], **Nermin Okičić**[2]

[1] *Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet*
[2] *Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet*

Sažetak: U ovom radu razmatrat ćemo poznati problem magičnih poligona. Uočavanjem raznih pravilnosti dat ćemo eksplicitne formule za zbirove po stranicama magičnih poligona, ali i uočiti da su neka rješenja međusobno ekvivalentna. To će nam omogućiti da odredimo bar dva rješenja magičnih n-touglova, a pitanje ukupnog broja rješenja ostaje i dalje otvoreno. U završnom dijelu su data dva algoritma za konstrukciju i kôdove u softwareu Wolfram Mathematica koji softverski pronalaze sve magične n-touglove ($n \geq 3$), metodama pretraživanja.

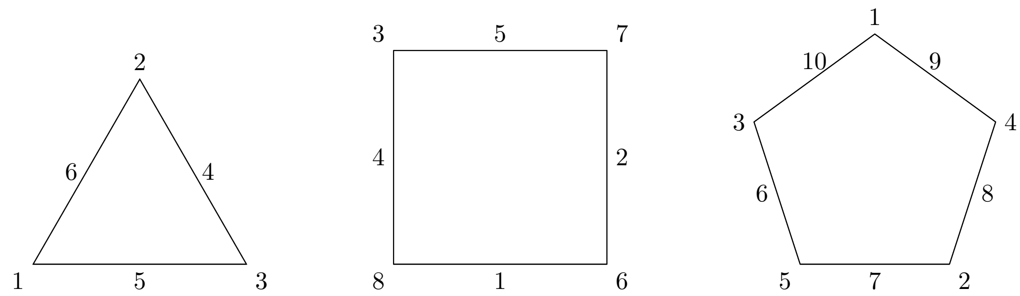
1. Uvod

U "rekreativnoj" matematici, čitavu klasu problema (zadataka) imamo na motiv postavljanja brojeva u određenu šemu, tako da neka osobina bude zadovoljena. Jedan od poznatijih takvih problema jeste na primjer problem magičnih kvadrata, to jest problem raspoređivanja n^2 brojeva u kvadrat podijeljen na n^2 malih kvadrata, tako da sume brojeva po vrstama, kolonama i dijagonalama budu jednake. U ovom radu ćemo se upoznati sa jednim od takvih problema zvanih magični poligoni. Postoje razne vrste problema koje nose isti naziv magični poligoni, naprimjer kao u [6]. Mi ćemo se ovdje upoznati sa formom problema koji je uveo Trotter ([1]).

Terrel Trotter Jr je 1972. godine objavio rad [1] o magičnim trouglovima, a zatim 1974. godine objavljuje i rad pod nazivom "Perimeter Magic Polygons" [2] u kome poopštava problem generalno na proizvoljne mnogouglove koje ćemo zvati magični poligoni. U svojim radovima on posmatra mogućnost da se između vrhova postavi i više od jednog broja. Poznate su i konstrukcije u kojima se raspoređuje $2n+1$ brojeva, pri čemu se jedan broj postavlja u centar kružnice opisane oko pravilnog n-tougla, i pri tome se zahtijeva da sume brojeva na stranicama i dijagonalama budu iste (vidjeti [5]). Mi ćemo posmatrati slučaj u kojem između dva vrha mnogougla postavljamo jedan broj.

Definicija 1. *Pod magičnim n-touglom podrazumijevamo pravilan, konveksan n-tougao kome su vrhovi i sredine stranica numerisani različitim prirodnim brojevima od $1, \dots, 2n$, tako da su zbirovi brojeva na svakoj stranici (suma brojeva u dva vrha i broja između njih) međusobno jednaki.*

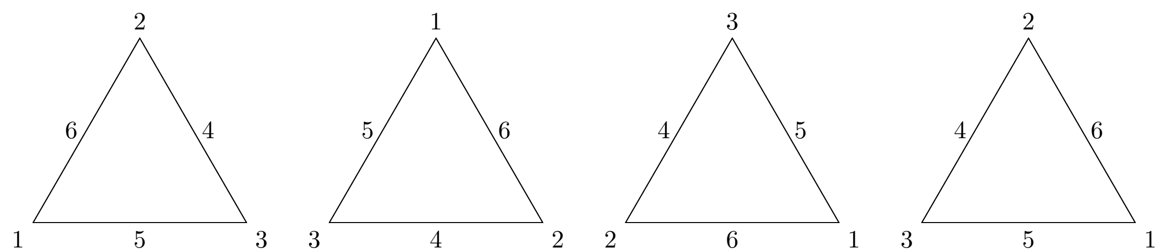
Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: poligon, sumiranje, algoritam
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar 2023.



(1) $n = 3$ (2) $n = 4$ (3) $n = 5$

Slika 1: Primjeri magičnih n-touglova.

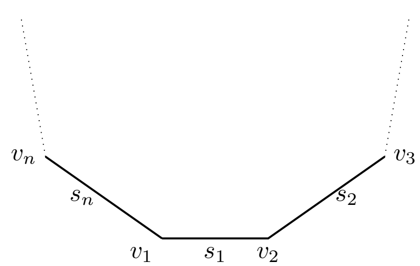
Očigledna je stvar da ako magični n-tougao zarotiramo (centar rotacije je centar opisanog kruga mnogougla), ponovo dobijamo magični n-tougao. Analogno, ako magični n-tougao osno simetrično preslikamo (osa simetrije je prava koja dijeli n-tougao na dva podudarna dijela) opet imamo magični n-tougao. Ako se neki magični n-tougao dobije rotacijom ili osnom simetrijom od nakog magičnog n-tougla jasno je da se suma po stranicama ne mijenja i pri tome oznake vrhova prelaze u oznake vrhova, a oznake stranica prelaze u oznake stranica. Za tako dobijeni magični n-tougao reći ćemo da je ekvivalentan polaznom magičnom n-touglu, a za takva rješenja kažemo da su ekvivalentna.



(1) Magični trougao (2) Rotacija 1 (3) Rotacija 2 (4) Osna simetrija

Slika 2: Ekvivalentni magični mnogouglovi.

Označimo sa v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vrhove, a sa s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sredine stranica pravilnog konveksnog n-tougla redom, počevši od proizvoljno izabranog vrha. Ako je posmatrani mnogougao magičan, tada vrijedi



$$\begin{aligned} v_1 + s_1 + v_2 &= M, \\ v_2 + s_2 + v_3 &= M, \\ &\cdots \\ v_i + s_i + v_{i+1} &= M, \\ &\cdots \\ v_{n-1} + s_{n-1} + v_n &= M, \\ v_n + s_n + v_1 &= M, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je $M \in \mathbb{N}$ i predstavlja sumu po stranicama magičnog mnogougla. Ako od ovog magičnog mnogougla formiramo novi mnogougao tako što mu vrhove označimo sa $v_i' = 2n + 1 - v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i stranice sa $s_i' = 2n + 1 - s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, onda za takav mnogougao kažemo da je dualan polaznom mnogouglu.

Teorem 1.1. *Dual magičnog n-tougla je opet magični n-tougao.*

Dokaz: Neka su v_i i s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vrhovi i stranice magičnog n-tougla čija je suma po stranicama M. Za proizvoljno $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ u dualnom mnogouglu vrijedi,

$$v_i' + s_i' + v_{i+1}' = 2n + 1 - v_i + 2n + 1 - s_i + 2n + 1 - v_{i+1} = 6n + 3 - (v_i + s_i + v_{i+1}) = 6n + 3 - M = M'.$$

Takođe je

$$v_n' + s_n' + v_1' = 6n + 3 - M = M'.$$

Dakle, zbirovi po stranicama su konstantni i jednaki. Jasno je da zbog različitosti brojeva v_i i s_i imamo različitost i brojeva v_i' i s_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Prema tome, novodobijeni mnogougao je magičan. □

Dualni magični mnogougao nije posljedica ni rotacije ni simetrije (primjetimo da se sume po stranicama dualnih magičnih mnogouglova razlikuju), te je kao takav neekvivalentan polaznom magičnom mnogouglu.

2. Suma po stranicama magičnog n-tougla

U pronalaženju "magičnosti" zadatog n-tougla ključnu ulogu igra određivanje sume po stranicama M. Jasno je da broj M ne može imati bilo kakvu vrijednost, a o tome govori naredno tvrđenje.

Teorem 2.1. *Neka je M zbir na stranici magičnog n-tougla. Tada vrijedi*

$$\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \leq M \leq \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor. \tag{2}$$

Dokaz: Neka su v_i i s_i međusobno različiti brojevi na vrhovima i stranicama magičnog n-tougla, pri čemu su $v_i, s_i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Označimo sa V sumu svih vrhova i sa S sumu svih sredina stranica magičnog n-tougla, to jest $V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ i $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. Ako saberemo sve jednakosti u (1), dobijamo da vrijedi

$$2(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) + (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = nM \iff 2V + S = M. \tag{3}$$

S druge strane, kako su $v_i, s_i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tada mora da vrijedi

$$V + S = 1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1). \tag{4}$$

Iz jednačina (3) i (4) dobijamo

$$V = n(M - 2n - 1) \tag{5}$$
$$S = n(4n + 2 - M) \tag{6}$$

Najmanja vrijednost sume vrhova se ima ako vrhove numerišemo sa prvih n brojeva, a najveća vrijednost se ima ako numeraciju izvršimo brojevima od $n+1$ do $2n$. Koristeći se ovim i sa (5) imamo,

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \ldots + n \leq V \leq (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n, \\ \iff & \frac{n(n+1)}{2} \leq n(M - 2n - 1) \leq \frac{n(3n+1)}{2}, \\ \iff & \frac{5n+3}{2} \leq M \leq \frac{7n+3}{2}. \end{aligned}$$

Kako M mora biti prirodan broj i zbog osobina funkcija floor i ceiling, zaključujemo da vrijedi (2). □

U gornjem smo se poslužili dvjema specijalnim funkcijama. Prva je funkcija $\lfloor x \rfloor$ (čitamo *floor od x*), koja predstavlja najveći cijeli broj manji ili jednak od x, a druga je $\lceil x \rceil$ (čitamo *ceiling od x*) i predstavlja najmanji cijeli broj veći ili jednak od x. Na primjer

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2\ ,\ \lfloor -1.5 \rfloor = -2\ ;\ \lceil 2.3 \rceil = 3\ ,\ \lceil -1.5 \rceil = -1.$$

Koristeći se Teoremom 2.1 imamo na primjer,

$$\begin{aligned}
&n = 3 \;\; ; \;\; 9 \leq M \leq 12\\
&n = 4 \;\; ; \;\; 12 \leq M \leq 15\\
&n = 5 \;\; ; \;\; 14 \leq M \leq 19\\
&n = 6 \;\; ; \;\; 17 \leq M \leq 22\\
&n = 7 \;\; ; \;\; 19 \leq M \leq 26\\
&n = 8 \;\; ; \;\; 22 \leq M \leq 29\\
&n = 9 \;\; ; \;\; 24 \leq M \leq 33, \; \textit{itd.}
\end{aligned}$$

Naravno, to ne znači nužno da za svaki M mora postojati n-tougao sa tom magičnom sumom. Prvi primjer te pojave je kod petouglova jer ne postoji magični petougao sa zbirom brojeva na stranicama jednakim 15. Označimo sa M_n sumu po stranicama magičnog n-tougla ($n \geq 3$). Prema Teoremu 2.1 je $M'_n \leq M_n \leq M''_n$, gdje je $M'_n = \left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil$ i $M''_n = \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$. Uočimo da vrijedi,

1. Ako je n paran broj:

$$\begin{aligned}
M''_{n+1} - M''_n &= \left\lfloor \frac{7(n+1)+3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{7n}{2} + 5 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n}{2} + \frac{3}{2} \right\rfloor\\
&= \frac{7n}{2} + 5 - \frac{7n}{2} - 1 = 4.
\end{aligned}$$

2. Ako je n neparan:

$$\begin{aligned}
M''_{n+1} - M''_n &= \left\lfloor \frac{7(n+1)+3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{7(n+1)}{2} + \frac{3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7(n+1)}{2} - 2 \right\rfloor\\
&= \frac{7(n+1)}{2} + 1 - \frac{7(n+1)}{2} + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Kako vrijedi

$$M''_n = \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8n-n+3}{2} \right\rfloor = 4n + \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor,$$

onda je

$$M''_{n+1} - M''_n = 4(n+1) + \left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - 4n - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor. \tag{7}$$

Posmatrajmo izraz $\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor$. U zavisnosti od parnosti mogu nastupiti dvije situacije:

Ako je n paran broj, tada je

$$\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor 1 - \frac{n-1}{2} \right\rfloor = 1 - \frac{n}{2} - \left(1 - \frac{n}{2}\right) = 0.$$

Ako je n neparan, to jest $n = 2k+1$, tada je

$$\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2-2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-2k-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - k - \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 1-k \rfloor = 1-k-1-(1-k) = -1.$$

Dakle, možemo pisati

$$\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = -\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\ ,\ n \geq 3.$$

Stavljajući ovo u (7) dobijamo,

$$M''_{n+1} - M''_n = 4 - \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\ ,\ n \geq 3. \tag{8}$$

Sumirajući jednakosti iz (8) dobijamo,

$$M''_{n+1} - M''_3 = 4(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right)\ ,\ n \geq 3, \tag{9}$$

a kako je $M''_3 = 12$, dobijamo eksplicitnu formu gornje granice za magične sume po stranicama,

$$M''_{n+1} = 12 + 4(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right).$$

Kako je još

$$\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right) = n-2+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{n+1}\right),$$

možemo dati naredno tvrđenje.

Teorem 2.2. *Za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$ gornja granica za magičnu sumu n-tougla je data sa*

$$M''_n = \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right). \tag{10}$$

Na potpuno analogan način za gornju tvrdnju se pokazuje da vrijedi i naredno tvrđenje.

Teorem 2.3. *Za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$ donja granica za magičnu sumu n-tougla je data sa*

$$M'_n = \frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right). \tag{11}$$

Na osnovu ova dva tvrđenja Teorem 2.1 možemo iskazati u preciznijoj formi.

Teorem 2.4. *Neka je dat pravilan, konveksan n-tougao ($n \geq 3$). Za magičnu sumu po stranicama vrijedi*

$$\frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right) \leq M_n \leq \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right).$$

Teorem 2.5. *Neka je $n \geq 3$ proizvoljan cijeli broj. Neka su k' i k'' magične sume po stranicama, takve da je $M'_n \leq k' \leq k'' \leq M''_N$, gdje su M'_n i M''_n gornja i donja granica za magične suma po stranicama. k' i k'' su dualne magične sume ako i samo ako vrijedi*

$$k'' = 6n + 3 - k'.$$

Dokaz: Neka su k' i k'' dualni zbirovi po stranicama. Iz definicije dualnosti tada imamo da je

$$\begin{aligned} k'' &= v''_i + s'' + v''_{i+1} \\ &= 2n+1-v'_i + 2n+1-s' + 2n+1-v'_{i+1} \\ &= 6n+3-(v'_i + s' + v'_{i+1}) \\ &= 6n+3-k'. \end{aligned}$$

Obrnuto, neka za cijele brojeve k' i k'' između gornje i donje magične sume vrijedi $k'' = 6n + 3 - k'$. Ako je k' suma po stranicama, to jest $k' = v'_i + s' + v'_{i+1}$, tada je

$$\begin{aligned} k'' &= 6n + 3 - k' \\ &= 2n + 1 - v'_i + 2n + 1 - s' + 2n + 1 - v'_{i+1} \\ &= v''_i + s'' + v''_{i+1}. \end{aligned}$$

Dakle, k'' je dualna suma po stranicama. $\square$

Nije teško vidjeti da za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$, M'_n i M''_n su dualni zbirovi. Zaista, na osnovu Teorema 2.3 i Teorema 2.2 imamo

$$\begin{aligned} M''_n + M'_n &= \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n\right) + \frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n\right) \\ &= \frac{7n+3}{2} + \frac{5n+3}{2} \\ &= 6n + 3, \end{aligned}$$

pa na osnovu Teorema 2.5 zaključujemo da su M'_n i M''_n dualne sume.

3. Pronalaženje bar dva rješenja

Kao posljedicu Teorema 2.5 smo dobili da su M'_n i M''_n dualne sume. Ostaje pitanje da li su to "magične" sume, to jest da li za te sume postoje rješenja magičnog n-tougla?
Neka je zadata n-tougao, gdje je n neparan broj. Posmatrajmo sljedeći algoritam:

K1: Numerišimo proizvoljan vrh n-tougla sa $v_1 = 2n$.

K2: Krećući se u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, preskačemo susjedni vrh (obilježen ili ne) i numerišemo naredni vrh sa $2n - 1$.

K3: Ponavljamo korak K2 dok ne numerišemo sve vrhove sa $2n - i$, $i = 2, 3, \ldots n - 1$.

K4: Nakon zadnjeg numerisanog vrha numerišemo prvu narednu sredinu stranice u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, sa n.

K5: U smjeru kazaljke na satu numerišemo redom ostale sredine stranica sa $n - 1$ do 1.

Očigledno, primjenjujući gornji algoritam, za $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) imamo da vrijedi

$$v_i - v_{i+2} = 1 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n-2 \text{ i da je } v_n - v_1 = -k.$$

Nije teško vidjeti da će tada vrijediti,

$$v_i - v_{i+1} = \begin{cases} k+1 & ; \quad i = 1, 3, 5, \ldots, 2k-1 \\ -k & ; \quad i = 2, 4, 6, \ldots, 2k-2 \end{cases} , \; v_n - v_1 = -k.$$

Izrazimo li gornju jednakost na drugačiji način, to jest

$$v_i - v_{i+1} = \frac{1}{2} - \frac{2k+1}{2}(-1)^i \, , \; i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

dobijamo eksplicitnu formulu za numerisanje vrhova datog n-tougla,

$$v_{i+1} = v_i - \frac{1}{2}\left(1 - n(-1)^i\right) \, , \; i = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \text{ i } v_1 = 2n. \tag{12}$$

Koristeći se formulom (12) ili analizom datog algoritma, jednostavno se je uvjeriti da vrijede sljedeće formule za numeraciju vrhova i sredina stranica n-tougla, kada je $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$v_i = \begin{cases} 2n - m & ; \quad i = 2m+1 \\ 2n - (k+m) & ; \quad i = 2m \end{cases} , \; i = 2, 3, \ldots, n \;\; ; \;\; v_1 = 2n. \tag{13}$$

$$s_i = i + 1 \; , \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \;\; ; \;\; s_n = 1. \tag{14}$$

Vratimo se sada na pitanje da li ovaj algoritam daje magični n-tougao. Neka su v_i i v_{i+1} vrhovi i s_i sredina iste stranice posmatranog n-tougla. Bez umanjenja opštosti neka je i paran broj, to jest $i = 2m$ i po polaznoj pretpostavci o neparnosti neka je $n = 2k + 1$. Na osnovu formula (13) i (14) imamo,

$$\begin{aligned} v_i + s_i + v_{i+1} &= 2n - (k+m) + 2m + 1 + 2n - m \\ &= 4n - k + 1 \\ &= 4n - \frac{n-1}{2} + 1 \\ &= \frac{7n+3}{2}. \end{aligned}$$

Kao prvo, uočavamo da je gornja suma neovisna o indeksu i, te zaključujemo da će sume po bilo kojoj stranici datog n-tougla biti jednake. Dakle, algoritam daje magični mnogougao i on predstavlja jedno rješenje problema za neparne n.

Kao drugo, uočimo da dobijena magična suma po stranicama nije ništa drugo do M_n'' iz Teorema 2.4. Ovo nam obezbjeđuje i drugo rješenje problema, a koje dobijamo pravljenjem duala od rješenja dobijenog gore navedenim algoritmom. Šta više, magična suma po stranicama ovog dualnog rješenja je upravo M_n' jer je dualna suma od M_n'' suma M_n'.

Algoritam za minimalni magični n-tougao (suma po stranicama jednaka M_n') za paran n je nešto komplikovaniji. Sljedeća konstrukcija je preuzeta iz [4] i [3]. Neka je suma po stranicama $M = \frac{5n+4}{2}$ (n je paran, pa osnovu Teorema 2.4 je $M = M_n'$). Razmatrat ćemo dva algoritma, jedan za $n \equiv 0 \pmod 4$ i drugi za $n \equiv 2 \pmod 4$.

Za $n \equiv 0 \pmod 4$, odaberimo proizvoljan vrh i redajmo brojeve na vrhovima n-tougla u smjeru kazaljke na satu (smjer i nije toliko važan jer redanjem u suprotnom smjeru dobijamo ekvivalentno rješenje)

- $1 \to \frac{3}{2}n \to 2,$
- $2 \to \frac{n}{2} \to 3 \to \frac{n}{2} + 1 \to 4 \to \ldots \to \frac{n}{4} - 1 \to \frac{3}{4}n - 3 \to \frac{n}{4} \to \frac{3}{4}n - 2 \to \frac{n}{4} + 1,$
- $\frac{n}{4} + 1 \to \frac{3}{4}n \to \frac{3}{4}n - 1 \to \frac{3}{4}n + 1,$
- $\frac{3}{4}n + 1 \to \frac{n}{4} + 2 \to \frac{3}{4}n + 2 \to \frac{n}{4} + 3 \to \ldots \to n - 3 \to \frac{n}{2} - 2 \to n - 2 \to \frac{n}{2} - 1 \to n - 1.$

Za $n \equiv 2 \pmod 4$, redajmo vrhove na sljedeći način,

- $1 \to \frac{3}{2}n \to 2,$
- $2 \to \frac{n}{2} \to 3 \to \frac{n}{2} + 1 \to 4 \to \ldots \to \frac{n+2}{4} - 1 \to \frac{3n+2}{4} - 3 \to \frac{n+2}{4} \to \frac{3n+2}{4} - 2,$
- $\frac{3n+2}{4} - 2 \to \frac{3n+2}{4} \to \frac{3n+2}{4} - 1 \to \frac{n+2}{4} + 1,$
- $\frac{n+2}{4} + 1 \to \frac{3n+2}{4} + 1 \to \frac{n+2}{4} + 2 \to \frac{3n+2}{4} + 2 \to \ldots \to \frac{n}{2} - 2 \to n - 2 \to n - 2 \to \frac{n}{2} - 1 \to n - 1.$

Prateći prethodno dobijamo eksplicitno koji su brojevi na vrhovima poligona:

- Ako je $n \equiv 0 \pmod 4$

$$v_i = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1, 3, \dots, \frac{n}{2}+1 \\ \frac{3n}{2} & i = 2 \\ \frac{n+i}{2} & i = 4, 6, \dots, \frac{n}{2} \\ \frac{i+2}{2} & i = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, n \\ \frac{n+i-1}{2} & i = \frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+5, \dots, n-1. \end{cases}$$

- Ako je $n \equiv 2 \pmod 4$

$$v_i = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1, 3, \dots, \frac{n}{2} \\ \frac{3n}{2} & i = 2 \\ \frac{n+i+2}{2} & i = 4, 6, \dots, \frac{n}{2}-1 \\ \frac{n+6}{4} & i = \frac{n}{2}+1 \\ \frac{i+3}{2} & i = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, n-1 \\ \frac{n+i}{2} & i = \frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+5, \dots, n-2 \\ \frac{n}{2}+2 & i = n. \end{cases}$$

Da li ovi algoritmi daju magični n-touguao? To ćemo pokazati tako što pokažemo da su s_i dobiveni formulom $s_i = M - v_i - v_{i+1} = \dfrac{5n+4}{2} - v_i - v_{i+1}$ međusobno različiti i nalaze se između 1 i $2n$.

Za slučaj $n \equiv 0 \pmod 4$, koristeći se navedenom formulom dobijamo da su brojevi na stranicama

$$s_i = \begin{cases} \dfrac{5n+4}{2} - 1 - \dfrac{3n}{2} & i = 1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{3n}{2} - 2 & i = 2 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{\frac{n}{2}+2}{2} - \dfrac{\frac{n}{2}+2+2}{2} & i = \frac{n}{2}+1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+2}{2} - 1 & i = n \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{i+1}{2} - \dfrac{n+i+1}{2} & i = 3, 5, \dots, \frac{n}{2}-1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+i}{2} - \dfrac{i+2}{2} & i = 4, 6, \dots, \frac{n}{2} \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{i+2}{2} - \dfrac{n+i}{2} & i = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, n-2 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+i-1}{2} - \dfrac{i+3}{2} & i = \frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+4, \dots, n-1, \end{cases}$$

to jest

$$s_i = \begin{cases} n+1 & i = 1 \\ n & i = 2 \\ 2n-1 & i = \frac{n}{2}+1 \\ 2n & i = n \\ 2n+1-i & i = 3, 4, 5, 6, \dots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2, \dots n-1. \end{cases}$$

Jasno je da je $1 \leq s_i \leq 2n$ i jednostavnom provjerom nije teško uočiti da je $v_i \neq v_j \neq s_i \neq s_j$ za proizvoljne

$i \neq j$. Analogno bi se pokazalo da za $n \equiv 2 \pmod 4$ vrijedi

$$s_i = \begin{cases} n+1 & i = 1 \\ n & i = 2 \\ 2n & i = \frac{n}{2} \\ \dfrac{3n}{2} - 1 & i = n-1 \\ 2n-1 & i = n \\ 2n-i & i = 3, 4, 5, 6, \ldots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \ldots n-2, \end{cases}$$

i vidimo također da vrijedi $1 \leq s_i \leq 2n$ i $v_i \neq v_j \neq s_i \neq s_j$ za proizvoljne $i \neq j$.

4. Algoritmi za nalaženje magičnih poligona

Magične n-touglove ćemo tražiti "brute force" algoritmom.
Na osnovu prethodnog vidimo da je za pronalaženje magičnog n-tougla dovoljno odrediti sve takve sa zbirom na stranicama koji zadovoljava

$$\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \leq M \leq \left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil + \frac{1}{2}\left(\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \right)$$

jer preostale dobijamo preko dualnosti. Koristeći se dualnošću možemo zaključiti da ako ne postoji magični petougao sa zbirom na stranicama 15, tada ne može postojati ni petougao sa zbirom 18 jer su jedan drugom duali.
Jedna ideja je da za n-tougao sa zbirom na stranicama M najprije nađemo sve moguće vrhove koristeći se (3). Ova nam formula daje šta je zbir svih brojeva na vrhovima, pa moguće vrhove nalazimo kao razlaganje broja M na zbir n različitih prirodnih brojeva. Pretragu vršimo nad svim permutacijama mogućih vrhova. Implementacija navedenog alogritma je data u Implementacija 1.

Implementacija 1: Brute force metoda

```
(*Ulaz broj vrhova*)
n = 5;
(*Funkcija za provjeru ekvivalentnih *)
simrot[ listajed_ , listadva_ ] :=
 Module[{i, j , priv , n = Length[ listajed ]},
  priv = Join[ listadva , listadva ];
  For[ i = 0, i <= Floor[(n − 1)/2], i++,
   If [ listajed == Table[priv[[ j ]], {j , 1 + 2 i, n + 2 i }],
    Return[True]];
   If [ listajed ==
     Join[{ priv [[1 + 2 i ]]},
      Table[ priv [[ j ]], {j , n + 2 i, 2 i + 2, −1}]], Return[True ]];];
  Return[False ]];
(*Funkcija za razlaganje M u n razlicitih sabiraka*)
 particija [V_, k_, n_] := Module[{it},
   If [k == 1, Return[{{V}}],
     Return[
      Join [Table[
         Map[Join[{it}, #] &, particija [V − it, k − 1, it ]], {it ,
          Ceiling [(−k + kˆ2 + 2 V)/(2 k)],
          Min[(k − kˆ2 + 2 V)/2, n − 1]}]] // Catenate ]];];
magntouglov = {};
(*Glavna petlja po zbiru na stranicama*)
For[M = Ceiling[(5 n + 3)/2],
  M <= Ceiling[(5 n + 3)/
      2] + (1/2) (Floor[(7 n + 3)/2] − Ceiling[(5 n + 3)/2]), M++,
(*Konstruisanje vrhova*)
  V = n (M − 2 n − 1);
```

```
  mogvrhovi = particija [V, n, 2 n + 1];
  For[i = 1, i <= Length[mogvrhovi], i++,
   ntouglovi = {};
   vrhovintougl = Permutations[mogvrhovi[[i ]]];
(*Konstruisanje magicnih poligona*)
    For[j = 1, j <= Length[vrhovintougl], j++,
     AppendTo[ntouglovi,
      Table[If [Mod[i, 2] == 1, vrhovintougl [[ j, (i + 1)/2]],
        M − vrhovintougl[[j, i /2]] − vrhovintougl [[ j, i/2 + 1]]], {i,
        1, 2 n − 1}]]
     ];
    For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
     AppendTo[ntouglovi[[j ]],
      M − ntouglovi[[j, 2 n − 1]] − ntouglovi [[ j, 1]]]
     ];
    For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
     If [AllTrue[ ntouglovi [[ j ]], (1 <= # <= 2 n) &],
       If [DuplicateFreeQ[ntouglovi [[ j ]]],
        AppendTo[magntouglov, ntouglovi[[j ]]]
          ]];];];];
(* Izbacivanje ekvivalentnih medju njima*)
kraj = Length[magntouglov];
For[i = 1, i <= kraj − 1, i++,
  For[j = i + 1, j <= kraj, j++,
    If [simrot [magntouglov[[i ]], magntouglov[[j ]]],
      magntouglov = Delete[magntouglov, j];
      kraj = kraj − 1;
      j = j − 1;
       ];];];
(*Dodavanje dualnih ntouglova*)
kraj = Length[magntouglov];
For[i = 1, i <= kraj, i++,
  AppendTo[magntouglov,
    Table[2 n + 1, {i, 1, 2 n}] − magntouglov[[i ]]];];
magntouglov
```

Ova implementacija uzima n kao Ulaz, što je broj vrhova, a kao izlaz izbacuje listu *magntouglovi* magičnih n-touglova kao liste $2n$ brojeva $\{v_1, s_1, v_2, s_2, \dots, v_n, s_n\}$. Najprije je uvedena funkcija *simrot*, kôd (*Funkcija za provjeru ekvivalentnih*) koja provjerava da li je jedan n-tougao ekvivalentan drugom n-touglu. Uvedena je i funkcija *particija*, kôd (*Funkcija za razlaganje M u n razlicitih sabiraka*) koja nam daje sve moguće načine da se V napiše kao zbir k različitih brojeva ne većih od n. Algoritam je sljedeći

- (*Glavna petlja po zbiru na stranicama*) Glavna petlja ide po zbiru brojeva na stranici M, čije granice znamo na osnovu Teorema 2.4. Ne idemo po svim jer ćemo dodati dualne na kraju algoritma.

- (*Konstruisanje vrhova*) Za zbir na stranici M, nađimo sve moguće vrhove kao particiju zbira vrhova V koju dobijemo pomoću formule (5), a zatim napravimo listu svih mogućih permutacija svakog od njih.

- (*Konstruisanje magicnih poligona*) Zatim konstruišemo n-touglove tako što dopunimo sredine stranica formulom $M - v_i - v_i + 1$. Provjeravamo da li su dati n-touglovi magični n-touglovi, to jest provjeravamo da li su poredani različiti brojevi od 1 do 2n, i na kraju ubacujemo u listu *magntouglov*.

- (*Izbacivanje ekvivalentnih medju njima*) Izbacujemo sve one koje su međusobno ekvivaltnti, koristeći se funkcijom *simrot*.

- (*Dodavanje dualnih ntouglova*) Dodamo preostale dualne magične n-touglove u našu konačnu listu *magntouglov*.

Druga ideja za pretragu jeste da se nađu sve moguće stranice, to jest da nađemo sve moguće različite trojke brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$, a zatim da magične n-touglove nalazimo spajanjem tih stranica čije vrhove i sredine numerišemo prema nađenim trojkama brojeva. Kôd je dat u Implementacija 2. Ova implementacija uzima n kao ulaznu veličinu, to je broj vrhova, a kao izlaz izbacuje listu *svintouglovi* magičnih n-touglova kao liste od $2n$ brojeva u formi $\{v_1, s_1, v_2, s_2, \ldots, v_n, s_n\}$ (brojevi pridruženi vrhovima i sredinama stranica).

Implementacija 2: Stranica po stranica metoda

```
n = 5;
(*Funkcija za provjeru ekvivalnetnih*)
simrot[ listajed_ , listadva_ ] :=
 Module[{i, j, priv , n = Length[listajed ]},
  priv = Join[listadva , listadva ];
  For[i = 0, i <= Floor[(n − 1)/2], i++,
   If [ listajed == Table[priv[[j ]], {j, 1 + 2 i, n + 2 i }],
    Return[True]];
   If [ listajed ==
     Join[{ priv [[1 + 2 i ]]},
      Table[ priv [[ j ]], {j, n + 2 i, 2 i + 2, −1}]], Return[True ]];];
  Return[False ]]
svintouglovi = {};
(*Glavna petlja*)
For[M = Ceiling[(5 n + 3)/2],
 M <= Ceiling[(5 n + 3)/
      2] + (1/2) (Floor[(7 n + 3)/2] − Ceiling[(5 n + 3)/2]), M++,
 stranice = Table[{}, {i, 1, 2 n}];
 ntouglovi = {};
(*Generisanje stranica*)
 For[j = 1, j <= 2 n − 1, j++,
  For[k = j + 1, k <= 2 n, k++,
    If [j != M − j − k && k != M − j − k && 1 <= M − j − k &&
       M − j − k <= 2 n,
     AppendTo[ntouglovi, {j, M − j − k, k}];
     AppendTo[stranice[[j ]], {j, M − j − k, k}];
     AppendTo[stranice[[k ]], {k, M − j − k, j }];];];];
(*Konstruisanje prvih n−1 stranica*)
 For[i = 1, i <= n − 2, i++,
  novintouglovi = {};
  For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
   For[k = 1, k <= Length[stranice[[ntouglovi [[ j, 2 i + 1]]]]], k++,
     kand =
      Join[ ntouglovi [[ j ]], { stranice [[ ntouglovi [[ j, 2 i + 1]], k, 2]],
          stranice [[ ntouglovi [[ j, 2 i + 1]], k, 3]]}];
     If [DuplicateFreeQ[kand], AppendTo[novintouglovi, kand ]]];];
  ntouglovi = novintouglovi ;];
(*Konstruisanje n−tougla*)
 novintouglovi = {};
 For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
  If [1 <= M − ntouglovi[[j, 1]] − ntouglovi [[ j, 2 n − 1]] <= 2 n,
    kand =
     Append[ntouglovi[[j ]],
      M − ntouglovi[[j, 1]] − ntouglovi [[ j, 2 n − 1]]];
    If [DuplicateFreeQ[kand], AppendTo[novintouglovi, kand ]];];];
 ntouglovi = novintouglovi;
(* Izbacivanje medjusobno ekvivalentnih*)
 kraj = Length[ntouglovi];
 For[i = 1, i <= kraj − 1, i++,
  For[j = i + 1, j <= kraj, j++,
    If [simrot[ ntouglovi [[ i ]], ntouglovi [[ j ]]],
      ntouglovi = Delete[ntouglovi, j ];
      kraj = kraj − 1;
      j = j − 1;];];];
 (*Dodavanje ukupnom rjesenju*)
 AppendTo[svintouglovi, ntouglovi ]
 ]
svintouglovi = svintouglovi // Catenate;
```

```
(*Ubacivanje dualnih ntouglova*)
kraj = Length[svintouglovi];
For[i = 1, i <= kraj, i++,
  AppendTo[svintouglovi,
    Table[2 n + 1, {i, 1, 2 n}] − svintouglovi[[i]]];];
svintouglovi
```

Najprije je uvedena funkcija *simrot* kod (*Funkcija za provjeru ekvivalentnih*) koja provjerava da li je jedan n-tougao ekvivalentan drugom n-touglu. Algoritam je sljedeći

- (*Glavna petlja po zbiru na stranicama*) Glavna petlja ide po zbiru brojeva stranici M, čije granice znamo na osnovu Teorema 2.4. Ne idemo po svim jer ćemo dodati dualne na kraju algoritma.

- (*Generisanje stranica*) Najprije za M se generišu sve moguće stranice. Te stranice pohranjujemo u listu *stranice* i u listu *ntougao*, kao početne iteracije za naše n-touglove. Biramo samo one stranice koje su moguće da se nađu u magičnom n-touglu.

- (*Konstruisanje prvih n-1 stranica*) Zatim konstruišemo još $n-1$ stranicu. Svakom u listi *ntougao* pridržimo sve moguće stranice sa desna, tako da zadnji element u n-touglu je isti kao prvi element u listi koji predstavlja stranicu. Svi takvi validni se pohranjuju u *ntougao* i ponovo ponavljamo postupak, gdje pod validnim podrazumijevamo da imaju različite brojeve od 1 do $2n$.

- (*Konstruisanje n-tougla*) Zatim konstruišemo n-tougao tako što pridružimo posljednji broj s_n. Izbacujemo ga ako nije validan.

- (*Izbacivanje medjusobno ekvivalentnih*) Izbacujemo sve one koje su međusobno ekvivalentni, koristeći se funkcijom *simrot*.

- (*Ubacivanje dualnih ntouglova*) Dodamo preostale dualne magične n-touglove u našu konačnu listu *magntouglov*.

U Tablici 1 i Tablici 2 su dati svi magični petouglovi i šestouglovi. Dobijamo i da magičnih sedmouglova ima 128, dok magičnih osmouglova ima 282.

R.Br	Poligon $\{v_1, s_1, v_2, \ldots\}$	Suma na stranici
1.	5, 6, 3, 10, 1, 9, 4, 8, 2, 7	14
2.	9, 2, 5, 10, 1, 8, 7, 6, 3, 4	16
3.	10, 2, 4, 9, 3, 6, 7, 8, 1, 5	16
4.	2, 9, 6, 1, 10, 3, 4, 5, 8, 7	17
5.	1, 9, 7, 2, 8, 5, 4, 3, 10, 6	17
6.	6, 5, 8, 1, 10, 2, 7, 3, 9, 4	19

Tablica 1: Magični petouglovi

R.Br.	Poligon $\{v_1, s_1, v_2, \ldots\}$	Zbir na stranici
1.	7, 4, 6, 8, 3, 12, 2, 10, 5, 11, 1, 9	17
2.	7, 4, 6, 10, 1, 11, 5, 9, 3, 12, 2, 8	17
3.	9, 6, 2, 12, 3, 10, 4, 8, 5, 11, 1, 7	17
4.	10, 3, 5, 11, 2, 12, 4, 6, 8, 9, 1, 7	18
5.	11, 1, 7, 9, 3, 12, 4, 10, 5, 8, 6, 2	19
6.	11, 2, 6, 12, 1, 10, 8, 4, 7, 9, 3, 5	19
7.	11, 1, 7, 10, 2, 8, 9, 6, 4, 12, 3, 5	19
8.	11, 5, 3, 12, 4, 6, 9, 2, 8, 10, 1, 7	19
9.	12, 2, 5, 6, 8, 10, 1, 11, 7, 9, 3, 4	19
10.	12, 2, 5, 11, 3, 9, 7, 4, 8, 10, 1, 6	19
11.	2, 12, 6, 4, 10, 1, 9, 3, 8, 5, 7, 11	20
12.	2, 11, 7, 1, 12, 3, 5, 9, 6, 4, 10, 8	20
13.	2, 12, 6, 3, 11, 5, 4, 7, 9, 1, 10, 8	20
14.	2, 8, 10, 1, 9, 7, 4, 11, 5, 3, 12, 6	20
15.	1, 11, 8, 7, 5, 3, 12, 2, 6, 4, 10, 9	20
16.	1, 11, 8, 2, 10, 4, 6, 9, 5, 3, 12, 7	20
17.	3, 10, 8, 2, 11, 1, 9, 7, 5, 4, 12, 6	21
18.	6, 9, 7, 5, 10, 1, 11, 3, 8, 2, 12, 4	22
19.	6, 9, 7, 3, 12, 2, 8, 4, 10, 1, 11, 5	22
20.	4, 7, 11, 1, 10, 3, 9, 5, 8, 2, 12, 6	22

Tablica 2: Magični šestouglovi

Literatura

[1] T. Trotter, Jr.: *Normal Magic Triangles of Order n*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 5,, No. 1, 1972.
[2] T. Trotter, Jr.: *Perimeter-magic Polygons*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 7,, No. 1, 1974.
[3] O. Berkman, M. Parnas, Y. Roditty: *All Cycles are Edge-Magic* Ars Comb. 59., 2001.
[4] A.M. Marr, W.D. Wallis: *Magic Graphs*, Birkhauser 2013.
[5] V. Jakicic, R. Bouchat: *Magic Polygons and Their Properties*, arXiv:1801.02262 [math.CO], 2018.
[6] D.D. Augusto, J.S. Rocha: *Magic Polygons and Degenerated Magic Polygons: Characterization and Properties*, Asian Research Journal of Mathematics July 2019.

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 15 - 25

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Kombinacije bez i sa ponavljanjem u nastavi matematike

Azra Hadžiomerović[1], Zenan Šabanac[2]

[1] *Gimnazija Mostar*
[2] *Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke, Univerzitet u Sarajevu - Prirodno-matematički fakultet*

Sažetak: U ovom radu izloženi su po dva dokaza teorema za kombinacije bez i sa ponavljanjem. Primjena ovih teorema je data kroz rješenja nekih kombinatornih zadataka namijenjenih za učenike srednje škole.

1. Općenito o kombinatorici

Kombinatorika je matematička disciplina koja uglavnom proučava konačne skupove i strukture. Od davnina su se matematičari bavili problematikom prebrojavanja elemenata konačnih skupova, što danas predstavlja samo jedan od vidova kombinatorike [4]. Riječ kombinatorika dolazi od riječi kombinacija, a ova od lat. riječi *combinare* što znači slagati.
Kombinatorika je nastajala postepeno, a svoje korijene vuče iz zabavne matematike, zagonetki, igara, a posebno sa počecima razvoja teorije vjerovatnoće u 17. vijeku (v. [1, 5]).
Danas je kombinatorika veoma važna grana matematike i njezin uticaj i na samu matematiku i na ostale nauke neprestano raste. U srednjoškolskoj matematici je koristimo najčešće pri prebrojavanju skupova, čiji elementi mogu biti različiti objekti, strukture ili pojave. Rezultati iz kombinatorike se danas primjenjuju i u mnogim drugim naukama koje na prvi pogled nemaju mnogo veze sa matematikom, kao što su genetika, hemija, ekonomija, medicina.
Važni i zanimljivi rezultati, moćne tehnike i metode rješavanja problema sa gotovo neiscrpnim mogućnostima primjena su neke oblasti kombinatorike (teorija grafova, algebarska kombinatorika, kombinatorna geometrija, diskretna geometrija,...) pretvorili u atraktivne i samostalne matematičke discipline [3].
Kombinatorika se pretežno bavi razmještanjima objekata zadanog konačnog skupa u izvjesne konfiguracije (šeme). Najčešće tu imamo tri tipa problema:

- Egzistencija razmještaja. Ako želimo razmjestiti objekte nekog skupa na način propisan nekim uslovima, prvo što se pitamo jeste da li uopće postoji takav razmještaj. Ako razmještaj nije uvijek moguć, pitamo se dalje, koji su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje razmještaja zadanog tipa.
- Prebrojavanje i klasifikacija razmještaja. Ako je određeni razmještaj moguć, pitanje je na koliko se načina on može postići ili kako to razmještanje klasificirati u određene tipove.
- Proučavanje poznatih razmještaja. Nakon što je dokazana egzistencija i izvedena konstrukcija razmještaja koji zadovoljava određene uslove, može se pristupiti pručavanju njegovih zakonitosti i strukture.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: kombinatorika, prebrojavanja, rasporedi
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: novembar 2023.

Učenici u srednjoj školi pod pojmom kombinatorika podrazumijevaju varijacije, permutacije i kombinacije. U ovom radu mi ćemo posebnu pažnju posvetiti kombinacijama bez i sa ponavljanjem, ali ćemo prethodno navesti neke definicije pojmova i rezultate koji će nam trebati u glavnom dijelu rada, a koji će upotpuniti izlaganje osnovne teme ovog rada.

2. Osnove prebrojavanja, varijacije i permutacije

Dva najjednostavnija principa prebrojavanja su princip zbira i princip proizvoda.
Princip zbira počiva na činjenici da ako imamo konačan skup koji je unija više disjunktnih podskupova, onda je broj njegovih elemenata jednak zbiru broja elemenata podskupova. Matematički zapisano, ako je $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, onda je broj elemenata skupa A, u oznaci $|A|$, dat sa

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \ .$$

Princip proizvoda kaže da ako je neki skup jednak Dekartovom proizvodu nekoliko skupova, onda je broj njegovih elemenata jednak proizvodu broja elemenata skupova koji ulaze u taj Dekartov proizvod. Matematički, ako je $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, onda je

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} |A_k| \ .$$

Princip proizvoda se često zove i pravilo (teorem) o uzastopnom prebrojavanju.
U ovom poglavlju ćemo se još prisjetiti pojmova varijacija i permutacija sa i bez ponavljanja, i formula prema kojima se računa njihov broj.

Definicija 2.1 (varijacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Uređena r-torka $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, $r \leq n$, različitih elemenata skupa S zove se varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata.*

Teorem 2.2 (broj varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Broj svih varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata dat je sa*

$$V_n^{(r)} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \ ,$$

pri čemu je $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ (čitaj n faktorijel) proizvod prvih n prirodnih brojeva i $0! := 1$.

Dokaz: Prvi element a_{i_1} u uređenoj r-torci $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, $r \leq n$, možemo izabrati na n načina, drugi element a_{i_2} možemo izabrati na $(n-1)$ načina, ..., r-ti element a_{i_r} možemo izabrati na $(n-r\ +1)$ načina. Sada na osnovu principa proizvoda slijedi da je:

$$V_n^{(r)} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)\,(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.3 (varijacije r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Uredena r-torka $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ elemenata skupa S, pri čemu se elementi mogu ponavljati, zove se varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata.*

Teorem 2.4 (broj varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Broj svih varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata dat je sa*

$$\overline{V}_n^{(r)} = n^r \ .$$

Dokaz: Prvi element a_{i_1} u uređenoj r-torci $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ možemo izabrati na n načina, drugi element a_{i_2} možemo izabrati opet na n načina, itd., r-ti element a_{i_r} možemo izabrati također na n načina (jer je dozvoljeno ponavljanje elemenata). Primjenom principa proizvoda zaključujemo da je broj varijacija sa ponavljanjem dat sa

$$\overline{V}_n^{(r)} = n \cdot n \cdots n = n^r \ .$$

□

Definicija 2.5 (permutacije bez ponavljanja). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S bez ponavljanja elemenata zove se permutacija skupa S bez ponavljanja.*

Teorem 2.6 (broj permutacija bez ponavljanja). *Broj svih permutacija skupa S od n elemenata dat je sa*

$$P_n = n! \ .$$

Dokaz: Prvi element možemo izabrati na n načina, drugi element možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći element možemo izabrati na $(n-2)$ načina, itd., n-ti element možemo izabrati na $(n-(n-1)) = 1$ način. Na osnovu principa proizvoda je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \ .$$

□

Primjedba 2.7. *Primijetimo da se permutacije bez ponavljanja mogu smatrati varijacijama n-te klase bez ponavljanja od n elemenata.*

Definicija 2.8 (permutacije sa ponavljanjem). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ima m različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S, pri čemu se element a_1 ponavlja k_1 puta, element a_2 ponavlja k_2 puta,..., element a_m ponavlja k_m puta, i $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, zove se permutacija skupa S sa ponavljanjem.*

Teorem 2.9 (broj permutacija sa ponavljanjem). *Broj svih permutacija skupa S sa ponavljanjem dat je sa*

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \ .$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da su svi elementi u permutaciji sa ponavljanjem međusobno različiti; tada bismo imali permutaciju bez ponavljanja od n elemenata. Ukupan broj tih permutacija, kako smo ranije vidjeli, bi iznosio $n!$. U permutaciji sa ponavljanjem možemo zamijeniti mjesta na kojima su elementi a_1 na $k_1!$ načina i pri tom se permutacija neće promijeniti. Slično zaključujemo i za elemente a_2, itd., a_m. Koristeći pravilo proizvoda, za svaku permutaciju sa ponavljanjem postoji $k_1!k_2!\cdots k_m!$ permutacija bez ponavljanja u kojima se ne mijenja poredak različitih elemenata skupa S. Ukupan broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata stoga je dat sa

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \ .$$

□

3. Kombinacije bez ponavljanja

U ovom poglavlju ćemo dati definiciju kombinacija bez ponavljanja, te na dva načina dokazati formulu za broj kombinacija bez ponavljanja.

Definicija 3.1 (kombinacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Kombinacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata je svaki r-člani podskup sastavljen od elemenata n-članog skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pri čemu mora biti $r \leq n$.*

Uočimo da ako bismo uzeli u obzir i kombinaciju klase $r = n$ dobili bismo trivijalan slučaj samo jedne moguće kombinacije, a to je sam skup S.

Teorem 3.2 (broj kombinacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Broj kombinacija r-te klase bez ponavljanja skupa od n elemenata jednak je*

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} := \frac{n\,(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ .$$

Simbol $\binom{n}{r}$ se čita kao "en povrh er", ili "en iznad er".

Dokaz:

Prvi način (v. [2]). Skup svih kombinacija bez ponavljanja možemo napisati u obliku

$$K = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} :\ a_{i_1}\ ,\ a_{i_2}, \ldots a_{i_r} \in S\}\ .$$

Kada bi nam bio bitan poredak elemenata, onda bismo imali varijacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata, kojih ima $\frac{n!}{(n-r)!}$. Međutim, sve permutacije skupa $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ čine različite varijacije r-te klase bez ponavljanja od r elemenata, i ima ih $r!$, a svi ti elementi čine istu kombinaciju $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$. Stoga je broj različitih kombinacija dat sa

$$C_n^{(r)} = \frac{V_n^{(r)}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}\ .$$

Drugi način. U ovom dokazu ćemo koristiti princip matematičke indukcije. Neka je $n = 1$. Kako je $1 \leq r \leq n$, to može jedino biti $r = 1$, pa je broj jednočlanih podskupova skupa koji ima samo 1 element jednak $C_1^1 = 1$. Prema formuli za $n = 1$ je $\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{1!}{(1-1)!1!} = 1$, pa imamo da formula vrijedi u slučaju kada je $n = 1$.

Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj n i svaki $1 \leq r \leq n$ vrijedi formula $C_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Pokažimo da formula vrijedi i za $n+1$. Razmotrit ćemo tri slučaja: $r = 1$, $2 \leq r < n+1$ i $r = n+1$.

Za $r = 1$ je očito broj svih jednočlanih podskupova skupa koji ima $n+1$ elemenata jednak $C_{n+1}^1 = n+1$. Prema formuli za $r = 1$ je $\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, pa formula vrijedi u ovom slučaju.

Ako je $2 \leq r < n+1$ treba pokazati da vrijedi $C_{n+1}^{(r)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}$. Za fiksno r možemo podijeliti skup svih kombinacija na dva podskupa: jedan u kojem su kombinacije bez ponavljanja koje sadrže fiksni element, npr. a_1, i drugi u kojem su kombinacije bez ponavljanja koje ne sadrže fiksni element a_1. Tada je

$$C_{n+1}^{(r)} = C_n^{(r-1)} + C_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}\ ,$$

pa formula vrijedi i u ovom slučaju.

Konačno, ako je $r = n+1$ onda je očito broj svih $n+1$-članih podskupova skupa koji ima $n+1$ element jednak $C_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Prema formuli je $\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)!} = 1$. Dakle, formula vrijedi i u slučaju $r = n+1$.

Sada na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da formula vrijedi za sve prirodne brojeve n i $1 \leq r \leq n$. $\square$

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako se mogu koristiti kombinacije bez ponavljanja.

Primjer 3.3. *Na koliko se načina od 25 učenika može formirati grupa od 3 učenika koji će predstavljati odjeljenje na školskom takmičenju iz informatike? Ako je u tom odjeljenju 10 djevojčica, koliko se može formirati različitih grupa ako u svakoj grupi mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak? Koliko ima grupa u koje su sastavljene isključivo od djevojčica ili isključivo od dječaka?*

Rješenje: Označimo sa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{25}\}$ skup čiji su elementi učenici $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ od kojih treba formirati grupu veličine $r = 3$. Pošto nam nije bitan redoslјed učenika u grupi, broj tih grupa, tj. broj različitih podskupova $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ skupa S, jednak je broju kombinacija 3. klase bez ponavljanja od 25 elemenata, koji iznosi

$$C_{25}^{(3)} = \binom{25}{3} = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300 \ .$$

Ako je u odjeljenju 10 djevojčica, onda je u tom odjeljenju 15 dječaka. Iz uslova da u svakoj grupi mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak slijedi da su moguće kombinacije u kojima su 2 djevojčice i 1 dječak ili 1 djevojčica i 2 dječaka. Korištenjem pravila proizvoda, broj grupa u kojima su 2 djevojčice i 1 dječak iznosi

$$C_{10}^{(2)} \cdot C_{15}^{(1)} = \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{1} = \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{15!}{14!1!} = 45 \cdot 15 = 675 \ ,$$

dok broj grupa u kojima su 1 djevojčica i 2 dječaka iznosi

$$C_{10}^{(1)} \cdot C_{15}^{(2)} = \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{2} = \frac{10!}{9!1!} \cdot \frac{15!}{13!2!} = 10 \cdot 105 = 1050 \ .$$

Prema pravilu zbira, ukupan broj grupa u kojima mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak iznosi

$$675 + 1050 = 1725.$$

Prema pravilu zbira, homogenih grupa (tj. grupa koje su sastavljene isključivo od djevojčica ili isključivo od dječaka) imamo

$$C_{10}^{(3)} + C_{15}^{(3)} = \binom{10}{3} + \binom{15}{3} = \frac{10!}{7!3!} + \frac{15!}{12!3!} = 120 + 455 = 575 \ .$$

Primijetimo da smo do posljednjeg broja mogli doći tako što od ukupnog broja grupa oduzmemo broj grupa u kojim se nalaze 1 ili 2 djevojčice (ili što je isto 1 ili 2 dječaka). Naime,

$$2300 - (675 + 1050) = 2300 - 1725 = 575 \ .$$

□

Primjer 3.4. *U ravni je dato 7 tačaka od kojih nikoje 3 ne leže na istoj pravoj, tj. nisu kolinearne.*

a) Koliko pravih određuju te tačke?

b) Koliko trouglova određuju te tačke?

Rješenje: Skup tačaka označimo sa $S = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$, $n = 7$.
a) Kao što znamo iz geometrije, prava je određena sa dvije tačke, tj. sa dva elementa iz skupa S. Kako među datim tačkama ne postoje 3 kolinearne tačke, to svaki par tačaka t_{i_1} i t_{i_2} iz skupa datih tačaka određuje različite prave. Dakle, broj različitih pravih je jednak broju kombinacija 2. klase ($r = 2$) od 7 elemenata i iznosi

$$C_7^{(2)} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \ .$$

Dakle, date tačke određuju 21 pravu.
b) Rezonujući kao u a), svake tri tačke t_{i_1}, t_{i_2} i t_{i_3} iz skupa S određuju različite trouglove, pa je ukupan broj trouglova jednak broju kombinacija 3. klase ($r = 3$) od 7 elemenata. Broj tih kombinacija je

$$C_7^{(3)} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \ .$$

Dakle, date tačke određuju 35 trouglova. □

4. Kombinacije sa ponavljanjem

Sada ćemo izložiti kombinacije sa ponavljanjem koje su, prema mišljenju autora, nepravedno zanemarene u redovnoj nastavi u srednjoj školi, te se učenici sa njima rjeđe susreću tokom svog školovanja.

Definicija 4.1 (kombinacije r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki r-člani podskup ($r \in \mathbb{N}$) n-članog skupa S pri čemu se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u r-torci nije bitan) zove se kombinacija sa ponavljanjem r-te klase od n elemenata.*

Teorem 4.2 (broj kombinacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Broj kombinacija sa ponavljanjem r-te klase od n različitih elemenata jednak je*

$$\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} \ .$$

Dokaz:
Prvi način (v. [2]). Prikažimo kombinaciju sa ponavljanjem u obliku niza oznaka r članova skupa S i kvadratića na sljedeći način

$$a_1\ a_1 \blacksquare\blacksquare a_3\ a_3\ a_3 \blacksquare a_4 \blacksquare\blacksquare\blacksquare a_7 a_7 a_7 \ldots$$

pri čemu jedan kvadratić dolazi između dva uzastopna člana niza bez obzira pojavljuju li se ti članovi u nizu ili ne. Ako neki član nije odabran u niz, dobijaju se dva uzastopna kvadratića između kojih taj član nedostaje, a ako nedostaju dva susjedna člana, u našem zapisu će se pojaviti tri uzastopna kvadratića, itd. Vidimo da su indeksi članova niza koji se pojavljuju u kombinaciji sa ponavljanjem ustvari suvišni, jer nije bitno koji su to članovi. S druge strane, važno je uočiti da je broj tih članova uvijek r, a broj kvadratića $n-1$. Zbog toga je ukupan broj svih oznaka a i $\blacksquare$ jednak $n-1+r$, a niz možemo prikazati u obliku

$$aa\blacksquare\blacksquare aaa \blacksquare a \blacksquare\blacksquare\blacksquare aaa \ldots$$

pri čemu je u posljednjem zapisu r oznaka a i $n-1$ oznaka $\blacksquare$. Uočimo da je broj načina na koji biramo r elemenata jednak broju načina na koje možemo odabrati r mjesta u nizu gdje će doći oznaka a. Taj broj odgovara broju kombinacija r-te klase bez ponavljanja $(n-1+r)$-članog skupa, te iznosi

$$C_{n-1+r}^{(r)} = \binom{n-1+r}{r} \ .$$

Dakle, $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.
Drugi način. U ovom dokazu ćemo koristiti princip matematičke indukcije po $m = n+r-1$.
Neka je $m = 1$. Kako su n i r prirodni brojevi i $n+r-1 = 1$, to jedino može biti $n = r = 1$, pa je broj jednočlanih podskupova skupa koji imaju samo 1 element jednak $\overline{C}_1^1 = 1$. Prema formuli za $n = r = 1$ je $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{1!}{1!0!} = 1$, pa imamo da formula vrijedi u slučaju kada je $m = 1$.
Pretpostavimo sada da formula vrijedi za neki prirodan broj $m = n+r-1$, tj. da vrijedi formula $\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$.

Pokažimo da formula vrijedi i za $m+1=(n+r-1)+1=n+r$.
Za $r=1$ je očito broj svih jednočlanih podskupova skupa koji ima $n+1$ elemenata jednak $\overline{C}_{n+1}^{1}=n+1$.
Prema formuli za $r=1$ je $\frac{(n+1)!}{1!n!}=\frac{n!(n+1)}{n!}=n+1$, pa formula vrijedi u ovom slučaju.
Ako je $n=1$, onda je broj svih $r+1$-članih skupova sa ponavljanjem iz skupa koji ima 1 element jednak $\overline{C}_{1}^{(r+1)}=r+1$. Prema formuli za $n=1$ je $\frac{(n+r)!}{r!n!}=\frac{(r+1)!}{r!1!}=r+1$, pa formula vrijedi i u ovom slučaju.
U ostalim slučajevima skup svih kombinacija sa ponavljanjem možemo podijeliti na dva podskupa: jedan u kojem su kombinacije sa ponavljanjem koje sadrže fiksni element, npr. a_1, i drugi u kojem su kombinacije sa ponavljanjem koje ne sadrže fiksni element a_1. Tada je

$$\overline{C}_{n}^{(r)}=\overline{C}_{n}^{(r-1)}+\overline{C}_{n-1}^{(r)}=\frac{(n+r-2)!}{(r-1)!\,(n-1)!}+\frac{(n+r-2)!}{r!\,(n-2)!}=\frac{(n+r-2)!}{r!\,(n-1)!}\,(r+n-1)=\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\ ,$$

pa formula vrijedi i u ovom slučaju.
Sada na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da formula vrijedi za sve prirodne brojeve n i r. $\square$

Primjenu kombinacija sa ponavljanjem ćemo demonstrirat kroz nekoliko pažljivo odabranih primjera.

Primjer 4.3. *U nekom dijelu skladišta pohranjuju se* 3 *različite vrste robe. Na koliko načina se može odabrati roba za skladištenje ako u taj dio skladišta treba pohraniti tačno* 5 *komada robe uz pretpostavku da je od svih vrsta robe raspoloživo minimalno po* 5 *komada?*

Rješenje: Primijetimo da je potpuno svejedno jesu li brojnosti raspoložive robe po svakoj vrsti 5, koliko iznosi broj komada robe koju treba pohraniti u skladište, ili su te brojnosti veće od 5. Potrebno je formirati neuređene trojke $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ veličine $r=3$, tj. skup kombinacija 5. klase sa ponavljanjem od 3 elementa. Ukupan broj takvih kombinacija iznosi

$$\overline{C}_{3}^{(5)}=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!2!}=21\ .$$

$\square$

Primjer 4.4. *Farma uzgaja mačke, zečeve, pse, patke i guske. Na koliko različitih načina možemo izabrati tri životinje sa te farme?*

Rješenje: U zadatku imamo da je ukupan broj vrsta životinja 5, te da biramo 3 životinje. Ako biramo r stavki od mogućih n, pri čemu je dozvoljeno ponavljanje, onda se radi o kombinacijama sa ponavljanjem r-te klase od n elemenata. Ukupan broj načina na koje možemo odabrati 3 životinje sa farme iznosi

$$\overline{C}_{5}^{(3)}=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=35\ .$$

$\square$

Primjer 4.5. *Data je jednadžba*

$$x_1+x_2+x_3+x_4=11\ .$$

a) Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja ima data jednadžba?

b) Koliko pozitivnih cjelobrojnih rješenja ima data jednadžba?

Rješenje: Podsjetimo se da nenegativan znači da je $x_i \geq 0$ za sve $i=1,2,3,4$, dok pozitivan znači da je $x_i>0$ za sve $i=1,2,3,4$.
a) Primijetimo, npr., da rješenje date jednadžbe $x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=0,\ x_4=4$ možemo prikazati u sljedećem obliku

x_1	x_2	x_3	x_4
$\times\times$	$\times\times\times\times\times$		$\times\times\times\times$

Odavde vidimo da je broj svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja određen sa rasporedom simbola $\times$ i pregrada $|$. Kako imamo 11 simbola $\times$ i 3 pregrade koje određuju 4 ćelije u tabeli ($r = 11$ i $n = 4$), to je broj svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednak broju kombinacija sa ponavljanjem 11. klase od 4 elementa i iznosi

$$\overline{C}_4^{(11)} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = 364 \,.$$

Do istog smo rezultata mogli doći koristeći permutacije sa ponavljanjem. Naime, 11 simbola $\times$ i 3 pregrade možemo permutirati na

$$\frac{(11+3)!}{11!3!} = \frac{14!}{11!3!} = 364$$

načina, a taj broj je upravo jednak broju $\overline{C}_4^{(11)}$.
b) Kako rješenja moraju biti pozitivna, počnimo tako da u svaku ćeliju u tabeli stavimo po jedan simbol $\times$. Ostaje nam sada da raspodijelimo $11 - 4 = 7$ simbola $\times$ u 4 ćelije, a to možemo prema prethodnom uraditi na

$$\overline{C}_7^{(4+7-1)} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

načina. Dakle, imamo 120 pozitivnih cjelobrojnih rješenja date jednadžbe. □

5. Neki izazovniji kombinatorni zadaci

U ovom poglavlju ćemo uraditi nekoliko, prema našem mišljenju, lakših, ali izazovnijih zadataka vezanih za prebrojavanja koja u sebi uključuju kombinacije, a koji su se pojavili na različitim matematičkim takmičenjima. Naime, poznato je da zadaci iz kombinatorike obavezno dolaze na matematičkim takmičenjima različitih nivoa, počevši od kantonalnog takmičenja, pa sve do međunarodnih matematičkih regionalnih i svjetskih olimpijada, kao i matematičkih turnira koje organiziraju različita društva, organizacije, škole i fakulteti, kako za učenike osnovnih i srednjih škola, tako i za studente na univerzitetima.

Primjer 5.1 (Američko pozivno matematičko takmičenje 1985. godine). *U turniru je svaki igrač odigrao tačno jednu partiju protiv svakog drugog igrača. U svakoj partiji pobjednik je dobio* 1 *bod, gubitnik je dobio* 0 *bodova, a oba igrača su dobila po* $\frac{1}{2}$ *boda ako je partija završila neriješeno. Nakon završetka turnira utvrđeno je da je tačno polovina bodova svakog igrača osvojena protiv deset igrača sa najmanje bodova. Posebno, svaki od deset igrača sa najmanjim brojem bodova osvojio je polovinu svojih bodova protiv drugih devetorice od deset. Koliki je ukupan broj igrača na turniru?*

Rješenje: Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je na turniru ukupno bilo $n + 10$ igrača. Među n igrača koji nisu među najslabijih 10 odigrano je ukupno $\binom{n}{2}$ partija i time su osvojena $\binom{n}{2}$ boda. Prema pretpostavkama zadataka, to znači da su ovih n igrača također osvojili $\binom{n}{2}$ bodova protiv najslabijih 10 igrača. Dalje, najslabijih 10 igrača su međusobno odigrali $\binom{10}{2} = 45$ partija i osvojili su ukupno 45 bodova igrajući jedni protiv drugih. Oni su također osvojili 45 bodova igrajući protiv snažnijih n igrača. S obzirom da svaki osvojeni bod pripada jednoj od ovih kategorija, slijedi da je ukupan broj osvojenih bodova jednak $2\binom{n}{2} + 90 = n^2 - n + 90$. Međutim, osvojen je po jedan bod po svakoj odigranoj partiji, a ovih $n + 10$ igrača ukupno je odigralo $\binom{n+10}{2} = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$ partija, tj. u svim odigranim partijama osvojeno je ukupno $\frac{(n+10)(n+9)}{2}$ bodova. Dakle, imamo da vrijedi da je $n^2 - n + 90 = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$, odakle slijedi $2n^2 - 2n + 180 = n^2 + 19n + 90$. Posljednja jednadžba se svodi na $n^2 - 21n + 90 = 0$, čija rješenja su $n = 6$ ili $n = 15$. Primijetimo da su najboljih n igrača ukupno osvojili $n(n-1)$ bodova (prema prethodnom izrčunu) što predstavlja prosjek od $n-1$ bodova po igraču, dok su najslabijih 10 igrača osvojili ukupno 90 bodova, što je prosjek od 9 bodova po igraču. Stoga mora biti $n-1>9$, tj. $n>10$, pa je $n=15$. Sada imamo da je ukupan broj igrača na turniru jednak $15+10=25$. Dakle, na turniru je učestvovalo ukupno 25 igrača. □

Primjer 5.2 (Kinesko matematičko takmičenje 2000. godine). *Odrediti koliko ima četverocifrenih brojeva $\overline{abcd}$ koji zadovoljavaju sljedeće uslove:*

(1) $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $d \neq a$;

(3) a je najmanji broj među brojevima a, b, c, d.

Rješenje: Kada postoje tačno dvije različite cifre u $\overline{abcd}$, broj načina uzimanja dvije različite cifre od četiri različite cifre je jednak $\binom{4}{2}$, a manja cifra mora biti na prvom i trećem mjestu, dok veća cifra mora biti na drugom i četvrtom mjestu, tj. četverocifreni broj je jedinstveno određen sa te dvije cifre. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je jednak $\binom{4}{2}=6$.
Kada postoje tačno tri različite cifre u $\overline{abcd}$, broj načina uzimanja tri različite cifre iz skupa od četiri različite cifre jednak je $\binom{4}{3}$, a najmanja cifra mora biti prva cifra u $\overline{abcd}$. Ako su prva i treća cifra iste, tada imamo $P_2=2!$ četverocifrenih brojeva sa tri različite cifre. Ako su druga i četvrta cifra iste, tada opet imamo $P_2=2!$ četverocifrenih brojeva sa tri različite cifre. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je $\binom{4}{3}(P_2+P_2)=16$.
Kada postoje tačno četiri različite cifre u $\overline{abcd}$, najmanja cifra mora biti prva cifra, a ostale tri cifre mogu se rasporediti na $P_3=3!$ načina. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je $P_3=6$.
Saberimo sada navedene brojeve načina i dobijemo da je ukupan broj traženih različitih četverocifrenih brojeva jednak $6+16+6=28$. □

Primjer 5.3. (Županijsko takmičenje iz matematike u Hrvatskoj 2020. godine za IV razred srednje škole)
Date su tri paralelne prave a, b i c. Na pravoj a istaknute su tačke A, B i C, na pravoj b tačke D, E, F i G, a na pravoj c tačke H, I, J, K i L. Koliko je najviše trouglova određeno tačkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

Rješenje: Ukupno je dato 12 tačaka. Tri tačke od njih 12 možemo izabrati na $\binom{12}{3}$ načina. Međutim, neće sve ove kombinacije davati vrhove trougla. Naime, ako su tri odabrane tačke kolinearne, onda nemamo trougao. Kako se u zadatku traži najveći mogući broj trouglova, možemo pretpostaviti da ako su sve tri tačke odabrane na različitim pravim, onda one nisu kolinearne. Dakle, slučaj kada smo uzeli tri kolinearne tačke je slučaj kada sve tri tačke uzmemo sa iste prave. Broj načina na koje možemo uzeti sve tri tačke sa prave a jednak je $\binom{3}{3}$, sve tri tačke sa prave b jednak je $\binom{4}{3}$, a sve tri tačke sa prave c jednak je $\binom{5}{3}$. Ti svi slučajevi su međusobno disjunktni, pa prema principu zbira, najveći traženi broj trouglova iznosi

$$\binom{12}{3}-\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}\right)=220-(1+4+10)=205.$$

□

Primjer 5.4 (Harvard i MIT turnir iz matematike 2022. godine). *Izračunajte broj nepraznih podskupova S skupa $\{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$ koji zadovoljavaju uslov $|S|+\min(S)\cdot\max(S)=0$, pri čemu nam $|S|$ označava broj elemenata skupa S, $\min(S)$ najmanji element, a $\max(S)$ najveći element skupa S.*

Rješenje: Iz uslova $|S|+\min(S)\cdot\max(S)=0$ slijedi da mora biti $\min(S)\cdot\max(S)<0$. To znači da mora vrijediti $\min(S)=-a$ i $\max(S)=b$ za neke pozitivne cijele brojeve a i b. Ako su dati a i b, preostalo je odabrati $|S|-2=ab-2$ elementa, koji moraju biti iz skupa $\{-a+1, -a+2, \ldots, b-2, b-1\}$, koji ima $a+b-1$ elemenata. Stoga je broj mogućnosti za određene a i b jednak $\binom{a+b-1}{ab-2}$. U većini slučajeva, ovaj binomni koeficijent je jednak nuli. Zapravo, moramo imati $ab-2 \leq a+b-1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) \leq 2$.

Ovo sužava mogućnosti za (a, b) na $(1, n)$ i $(n, 1)$ za pozitivne cijele brojeve $2 \leq n \leq 10$ (slučaj $n = 1$ je nemoguć), te tri dodatne mogućnosti: $(2, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 2)$. U prvom slučaju, broj mogućih skupova je

$$2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{10}{8}\right)=2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{10}{2}\right)=2\binom{11}{3}=330\ .$$

Prvi dio gornje jednakosti slijedi na osnovu osobine binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, a drugi iz činjenice da je $\binom{2}{2}=\binom{3}{3}$ i uzastopne primjene osobine $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$. Navedene osobine binomnih koeficijenata se lako dokazuju, te ih prepuštamo čitaocu za vježbu.
U drugom slučaju, broj mogućih skupova je

$$\binom{3}{2}+\binom{4}{4}+\binom{4}{4}=5\ .$$

Dakle, ukupno postoji $330 + 5 = 335$ skupova koji zadovoljavaju uslove zadatka. □

6. Zadaci za samostalan rad

Nadamo se da vas je ovaj rad zainteresirao kako za kombinacije bez i sa ponavljanjem, tako i za prebrojavanja različitog tipa. Čitaocu za vježbu ostavljamo da riješi sljedeće zadatke.

Zadatak 6.1. *Na koliko načina možemo obojiti pet vrhova pravilne četverostrane piramide sa* 5 *boja, tako da svaki vrh bude obojen tačno jednom od tih* 5 *boja, i da vrhovi koji dijele zajedničku ivicu moraju biti obojeni različitim bojama? Pri tome dva bojenja smatramo istim ako se jedan iz drugog mogu dobiti rotacijom piramide.*

Zadatak 6.2. *Neka su n i r prirodni brojevi. Dokazati da postoji $\binom{n+r-1}{r-1}$ nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.*

Zadatak 6.3. *Neka su n i r prirodni brojevi i $r \leq n$. Dokazati da postoji $\binom{n-1}{r-1}$ pozitivnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.*

Zadatak 6.4. *Odrediti broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

takvih da je $3 \leq x_i \leq 10$ za sve $i = 1, 2, 3, 4$.

Zadatak 6.5. *Koliko postoji trocifrenih brojeva takvih da je zbir cifara svakog od njih jednak* 11*?*

Zadatak 6.6. *Neka su n i r prirodni brojevi. Odrediti broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n\ .$$

Zadatak 6.7. *Odrediti broj pozitivnih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 30$.*

Zadatak 6.8. *Prirodan broj a zovemo **sretnim** ako je zbir njegovih cifara jednak* 7*. Ako poredamo sve **sretne** brojeve u niz u rastućem poretku, dobijemo niz $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$. Ako je $a_n = 2023$, odrediti a_{5n}.*

Zahvala

Autori se žele zahvaliti anonimnom recenzentu na komentarima koji su doprinijeli preciznosti izlaganja u radu. Autori se također žele zahvaliti i uredniku časopisa čije sugestije za proširenje rada su rezultirale dodavanjem novog poglavlja 5. Neki izazovniji kombinatorni zadaci. a koje je namijenjeno prvenstveno učenicima koji učestvuju na matematičkim takmičenjima.

Literatura

[1] N. L. Biggs: *The roots of combinatorics*, Historia Math. **6** (1979), 109-136.
[2] K. Iličić: *Matematičke osnove statistike*, Element, Zagreb, 2017.
[3] D. Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.
[4] D. Jojić: *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
[5] W. D. Wallis, J. C. George: *Introduction to combinatorics*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, New York, 2016.

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 26 - 30

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Louivilleov teorem

Risto Malčeski[1]

[1] *Profesor u penziji, Sjeverna Makedonija*

Sažetak: U ovom radu je dokazan teorem francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koji je generalizacija formule za zbir trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Pri tome je korištena tzv. multiplikativna indukcija, za koju se pokazalo da su njome realizovani dokazi tačni.

1. Uvod

Matematika, posebno teorija brojeva, obiluje neočekivanim generalizacijama i zanimljivim rezultatima. Jedan od takvih rezultata je dobro poznata teorema francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koja se na određeni način može smatrati generalizacijom formule za izračunavanje zbira trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Prije razmatranja Liouvilleovog teorema, koristit ćemo matematičku indukciju da bismo dokazali nekoliko formula za izračunavanje zbira potencija prirodnih brojeva.

Lema 1.1. *Za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Dokaz: Dokazat ćemo jednakost (3).
Za $n = 1$ imamo $1^3 = 1 = \left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$, to jest jednadakost vrijedi.
Pretpostavimo da je jednakost (3) tačna za $n = k > 1$. Koristeći tu pretpostavku, za $n = k + 1$, imamo:

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Matematička indukcija, multiplikativna indukcija, Liouvilleov teorem
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: juni 2023.

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 &= \left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\
&=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}\\
&=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+1+1)}{2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

to jest za $n=k+1$ jednakost vrijedi.
Konačno, iz principa potpune matematičke indukcije slijedi da je jednakost (3) tačna za svako $n\in\mathbb{N}$.
Jednakosti (1) i (2) se dokazuju analogno. Detalje ostavljamo čitaocu za vježbu. $\square$

Primjedba 1.2. *Ako koristimo jednakost (1), onda se jednakost (3) može zapisati u obliku*

$$1^3+2^3+3^3+..+n^3=(1+2+3+...+n)^2. \tag{4}$$

Korolar 1.1. *Za svako $n\in\mathbb{N}$ vrijede jednakosti*

$$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2\cdot(n+1)^2, \tag{5}$$

$$1^3+3^3+5^3+...+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1) \tag{6}$$

Dokaz: Iz jednakosti (3) neposredno slijedi

$$
\begin{aligned}
2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3 =&2^3\cdot1^3+2^3\cdot2^3+2^3\cdot3^3+...+2^3\cdot n^3\\
=&2^3\cdot(1^3+2^3+3^3+...+n^3)\\
=&2^3\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{2^2}\\
=&2n^2\cdot(n+1)^2
\end{aligned}
$$

to jest jednakost (5) je tačna. Nadalje, iz (3) i (5) imamo

$$
\begin{aligned}
1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3 =&1^3+2^3+...+(2n-1)^3+(2n)^3-(2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3)\\
=&\frac{(2n)^2\cdot(2n+1)^2}{4}-2n^2(n+1)^2\\
=&n^2\left[(2n+1)^2-2(n+1)^2\right]\\
=&n^2\cdot(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)\\
=&n^2\cdot(2n^2-1)
\end{aligned}
$$

to jest pokazali smo da vijedi jednakost (6). $\square$

2. Multiplikativna indukcija

Napomenimo da ako smo nekako došli do formula (1), (2), (3) i (4), onda ih možemo dokazati uz pomoć matematičke indukcije. Međutim, matematička indukcija nije dovoljna za dokazivanje nekih tvrdnji, pa se koriste i druge metode. Jedna takva metoda je takozvana *multiplikativna indukcija*, pomoću koje se tvrdnja:

"Svaki prirodni broj n ima osobinu T "

dokazuje u sljedeća četiri koraka:

1. Dokazuje se da broj 1 i svi prosti brojevi imaju osobinu T.
2. Pretpostavlja se da prirodni broj m ima osobinu T.
3. Dokazuje se da za svaki prost broj p, broj mp ima osobinu T.
4. Zaključujemo da svaki prirodni broj n ima osobinu T.

Prije nego što pređemo na primjenu metode multiplikativne indukcije predstavljenu gore, pokazat ćemo da je ova vrsta zaključivanja ispravna.

Naime, u koraku 1) neka je dokazano da svi prosti brojevi imaju osobinu T. Neka je p prost broj i neka je za neki prirodni broj k, broj m iz koraka 2) oblika $m = p^k$. Tada iz koraka 3) slijedi da broj $mp = p^{k+1}$ također ima osobinu T. Iz ovog i principa matematičke indukcije slijedi da sve potencije prostog broja p imaju osobinu T.

Neka je $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} \cdot p_t^{k_t}$ proizvoljan prirodni broj predstavljen njegovom kanonskom notacijom. Iz prethodnog razmatranja proizlazi da broj $p_1^{k_1}$ ima osobinu T. Stavimo da je $m = m_1 = p_1^{k_1}$ i $p = p_2$, pa prema 3) slijedi da $mp = p_1^{k_1} p_2$ ima osobinu T. Sada opet iz 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_2 = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ ima osobinu T. Neka je $m = m_2$ i $p = p_3$, pa iz 3) slijedi da broj $mp = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3$ ima osobinu T. Ponovo primjenom koraka 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_3 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ ima osobinu T. Ponavljanjem prethodnog postupka $t-3$ puta, dobijamo da broj $n = m_t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} p_t^{k_t}$ ima osobinu T.

Konačno, iz prethodnog razmatranja proizlazi da su dokazi izvedeni pravilnom primjenom multiplikativne indukcije korektni.

3. Louivilleov teorem

U ovoj sekciji, koristeći multiplikativnu indukciju, dokazat ćemo Louivilleov teorem, koji se odnosi na broj djelitelja od djelitelja proizvoljnog prirodnog broja n.

Prije nego pređemo na naredna razmatranja, navedimo da je broj djelitelja prirodnog broja n, čiji je kanonski rastav $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, određen funkcijom

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

Funkcija τ je multiplikativna, što znači da ako su m i n međusobno prosti brojevi, onda vrijedi $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. Višestruka svojstva, identiteti i nejednakosti u vezi s ovom funkcijom, kao i s drugim osnovnim multiplikativnim funkcijama dokazane su u [2] i [3].

Teorem 3.1. ***(Louiville, [1])*** *Ako su $d_1 = 1$, $d_2, ..., d_k = n$ svi pozitivni prirodni djelitelji broja n, a a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i = 1, 2, ...k$, tada je*

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_k^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)^2. \tag{7}$$

Dokaz: Za $n = 1$ imamo $d_1 = 1$ i $a_1 = 1$, pa je $a_1^3 = 1 = a_1^2$, to jest jednadakost (7) je tačna.
Neka je p proizvoljan prost broj. Tada su jedinstveni djelitelji broja p: $d_1 = 1$ i $d_2 = p$. Zbog toga je $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Sada, ako koristimo jednakost (4), dobijamo

$$a_1^3 + a_2^3 = 1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = (a_1 + a_2)^2,$$

tako da je teorem dokazan za sve proste brojeve.
Pretpostavimo da teorem vrijedi za neki prirodni broj m. Neka je p proizvoljan prost broj. Moguća su dva slučaja:

- $NZD(m, p) = 1$ i
- $NZD(m, p) = p$,

koje ćemo posebno razmotriti.

Neka je $NZD(m,p)=1$. Ako su $d_1=1$ i $d_2,...,d_s=m$ svi prirodni djelitelji broja m, a a_i, respektivno, su brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, tada je

$$a_1^3+a_2^3+...+a_s^3=(a_1+a_2+...+a_s)^2, \tag{8}$$

a svi prirodni djelitelji broja mp su:

$$d_1=1,\ d_2,...,d_s=m,\ pd_1=p,\ pd_2,\ ...\ ,pd_s=pm. \tag{9}$$

Budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...,s$, iz osobina funkcije $\tau(u)$, slijedi da je $\tau(d_ip)=\tau(d_i)\tau(p)=2a_i$, za $i=1,2,...,s$. Prema tome, odgovarajući brojevi djelitelja od djelitelja (9) broja $m\cdot p$ su:

$$a_1=1,a_2,...,a_s,2a_2,...,2a_s.$$

Sada, ako koristimo jednakost (8), dobijamo

$$\begin{aligned}a_1^3+...+a_s^3+(2a_1)^3+...+(2a_s)^3 =&9(a_1^3+a_2^3+...+a_s^3)=9(a_1+a_2+...+a_s)^2\\ =&(3a_1+3a_2+...+3a_s)^2\\ =&(a_1+a_2+...+a_s+2a_1+2a_2+...+2a_s)^2,\end{aligned}$$

što znači da je u ovom slučaju jednakost (7) tačna.

Neka je sada $NZD(m,p)=p$. Onda je $m=m_1p^t$, za neko $t\geq 1$, $NZD(m_1,p)=1$, a $mp=m_1p^{t+1}$. Ako su $d_1=1$ $d_2,...,d_s=m_1$ djelitelji od m_1, gdje su a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...s$, tada su djelitelji broja $m=m_1\cdot p^t$:

$$\begin{array}{r}d_1=1,d_2,...,d_s\\ p\cdot d_1,p\cdot d_2,...,p\cdot d_s,\\ p^2\cdot d_1,p^2\cdot d_s,...,p^2\cdot d_s,\\ ....,\\ p^t\cdot d_1,p^t\cdot d_2,...,p^t\cdot d_s\end{array} \tag{10}$$

pa iz osobina funkcije $\tau(u)$ slijedi da su odgovarajući brojevi djelitelji djelitelja broja m:

$$\begin{array}{l}a_1,a_2,...,a_s,\\ 2a_1,2a_2,...,2a_s,\\ 3a_1,3a_2,...,3a_s,\\ ....,\\ (t+1)a_1,(t+1)a_2,...,(t+1)a_s.\end{array}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}a_i^3+\sum_{i=1}^{s}(2a_i)^3+...+\sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3&=\left(\sum_{i=1}^{s}a_i+\sum_{i=1}^{s}2a_i+...+\sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2\\ &=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2\end{aligned} \tag{11}$$

Šta više, jednakost (11) je ekvivalentna jednakosti

$$(1^3+2^3+...+(t+1)^3)\sum_{i=1}^{s}a_i^3=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2$$

pa ako za $n = t+1$ iskoristimo jednakost (4), dobijemo

$$\sum_{i=1}^{s} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2. \tag{12}$$

Nadalje, kao i gore zaključujemo da se djelitelji broja $mp = m_1 p^{t+1}$ dobijaju ako brojevima (10) dodamo brojeve

$$p^{t+1}d_1, p^{t+1}d_2, ..., p^{t+1}d_s$$

za koje su, zbog osobina funkcije $\tau(u)$, odgovarajući brojevi djelitelji

$$(t+2)a_1, (t+2)a_2, ..., (t+2)a_s$$

Ako sada iskoristimo jednakosti (1), (11) i (12), dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} a_i^3 + ... + \sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3 + \sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\
&= \left(\frac{(t+1)(t+2)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 + (t+2)^3 \sum_{i=1}^{s} a_i^3 \\
&= \frac{(t+1)^2(t+2)^2 + 4(t+2)^3}{4} \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= \left(\frac{(t+2)(t+3)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= (1+2+...+(t+1)+(t+2))^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s} (t+1)a_i + \sum_{i=1}^{s} (t+2)a_i\right)^2,
\end{aligned}$$

što znači da je i u ovom slučaju tačna jednakost (7).

Konačano, po principu multipilkativne indukcije slijedi da jednakost (7) vrijedi za svaki prirodni broj n. □

Literatura

[1] R. Malčeski: *Teorija na broevi*, Matematički talent, Skopje, 2022.
[2] T. Nagel: *Uvod na teorijata na čislata*, Nauka i izkustvo, Sofija, 1971.
[3] I. Niven and H.S. Zuckerman: *An introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 31 - 35

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Neke jednakosti u pravilnom petnaestouglu

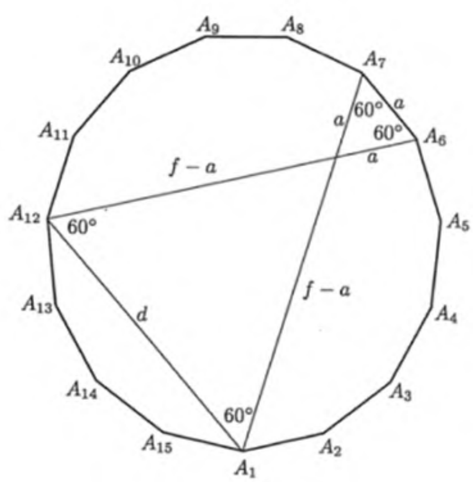
Dragoljub Milošević[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: U radu će biti prikazano nekoliko jednakosti koje vrijede za pravilni petnaestougao, a potom generalizacije nekih od njih.

1. Uvod

Poznato je da se mnogougao kod koga su sve stranice jednake i svi uglovi jednaki naziva *pravilnim mnogouglom*. Na Slici 1. je dat pravilni petnaestougao $A_1A_2A_3...A_{15}$. Centralni ugao nad stranicom tog mnogougla iznosi 24°, a periferijski 12°. Unutrašnji ugao mu je 156°.



Slika 1

U ovom radu ćemo razmatrati neke zanimljive jednakosti vezane za pravilni petnaestougao, kao i neke generalizacije dobijenih rezultata.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: mnogougao, pravilni petnaestougao, pravilni mnogougao s $3n$ stranica
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: maj 2022.

2. Jednakosti u pravilnom petnaestouglu

Prva grupa jednakosti vezana za pravilni petnaestougaougao sadržana je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1. *U pravilnom* 15*-ouglu uvedimo oznake* $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$, $|A_1A_4| = c$, $|A_1A_5| = d$, $|A_1A_6| = e$, $|A_1A_7| = f$, $|A_1A_8| = g$. *Tada vrijede jednakosti:*

$$f - d = a, \tag{1}$$

$$\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1, \tag{2}$$

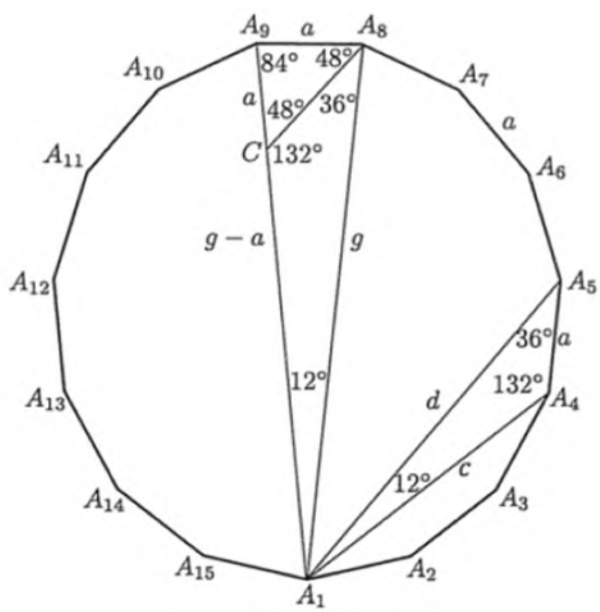
$$\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g} = \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Dokaz:

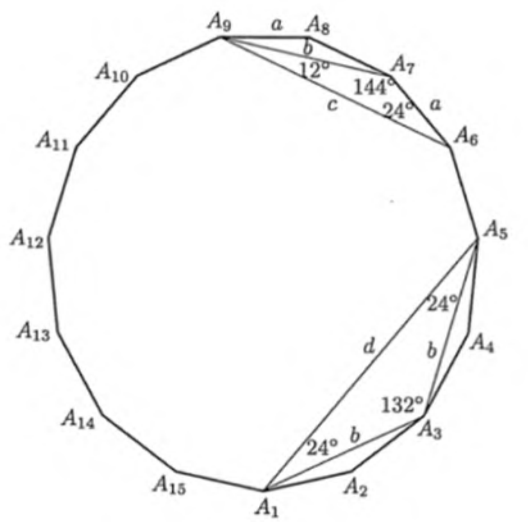
(a) Tačku presjeka dijagonala A_1A_7 i A_6A_{12} obilježimo sa B (Slika 1). Budući da je $\sphericalangle BA_6A_7 = \sphericalangle BA_7A_6 = 60°$ (periferijski ugao nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla); znači da je trougao $\triangle A_6A_7B$ jednakostranični. Kako je $|A_6B| = |A_7B| = a$, zaključujemo da je $|A_1B| = |A_{12}B| = f - a$ (jer je $|A_6A_{12}| = |A_1A_7|$, kao udaljenosti od šestog tjemena).
Trougao $\triangle A_1BA_{12}$ je također jednakostranični ($\measuredangle A_1BA_{12} = \measuredangle A_6BA_7$ i $|A_1B| = |A_{12}B|$), pa je $|A_1B| = |BA_{12}| = |A_{12}A_1|$. Kako je $|A_1B| = f - a$, $|A_1A_{12}| = d$ i $|A_1B| = |A_1A_{12}|$ slijedi da je $f - a = d$, odnosno $f - d = a$, to jest jednakost (1) je validna.

(b) Neka je tačka C na tetivi A_1A_9 tako da je $|A_9C| = |A_8A_9| = a$ (Slika 2). Kako je $|A_1A_8| = |A_1A_9|$, zbog osne simetrije pravilnog petnaestougla, tada je $|A_1A_9| = g$, pa otuda i $|A_1C| = g - a$.



Slika 2

S obzirom na to da je $\measuredangle A_8A_9A_1 = 12^\circ \cdot 7 = 84^\circ$ (periferijski ugao nad $\frac{7}{15}$ kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla), u jednakokrakom trouglu $\triangle A_8A_9C$ je $\measuredangle A_9A_8C = \measuredangle A_8CA_9 = \frac{1}{2}(180^\circ - 84^\circ) = 48^\circ$, pa je $\measuredangle A_1CA_8 = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$. U trouglu $\triangle A_1A_4A_5$ je $\measuredangle A_4A_1A_5 = 12^\circ$ (periferijski ugao nad stranicom pravilnog petnaestougla) i $\measuredangle A_1A_5A_4 = 12^\circ \cdot 3 = 36^\circ$ (periferijski ugao nad petinom kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla, Slika 2.), što znači da je u tom trouglu $\measuredangle A_1A_4A_5 = 180^\circ - (12^\circ + 36^\circ) = 132^\circ$.
Sad je jasno da trouglovi $\triangle A_1A_4A_5$ i $\triangle A_1A_8C$ imaju jednake uglove, pa su trouglovi $\triangle A_1A_4A_5$ i $\triangle A_1A_8C$ slični. Iz te sličnosti slijedi $d : c = g : (g - a)$, to jest $dg - ad = cg$. Odavde, poslije dijeljenja sa dg, dobijamo $1 - \frac{a}{g} = \frac{c}{d}$, ili $\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1$.



Slika 3

Naime, periferijski ugao nad dvije stranice pravilnog petnaestougla je $12^\circ \cdot 2 = 24^\circ$, nad tri stranice je $12^\circ \cdot 3 = 36^\circ$, itd. Kako je $|A_1A_2| = a$, imamo $|A_kA_{k+1}| = a$ za $k = 1, 2, ..., 14$. Također je $|A_1A_3| = b = |A_kA_{k+2}|$ za $k = 1, 2, ..., 13$ (za $k = 7$ je $|A_7A_9| = b$) i $|A_1A_4| = |A_kA_{k+3}| = c$.

(c) Na osnovu sinusne teoreme primijenjene na trougao $\triangle A_1A_3A_5$ (Slika 3), imamo

$$\frac{b}{\sin 24^\circ} = \frac{d}{\sin 132^\circ}.$$

Kako je $\sin 132^\circ = \sin(180^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ$ i $\sin 48^\circ = 2 \sin 24^\circ \cos 24^\circ$, dobijamo $\cos 24^\circ = \frac{d}{2b}$.
Primjenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle A_6A_7A_9$ slijedi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 24^\circ,$$

odnosno

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{acd}{b}. \tag{5}$$

Sada ćemo koristiti sljedeću lemu.

Lema 2.2. *Ako u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 = b(b + c)$.*

Jedan njen dokaz nalazi se u [2], str. 133. Na osnovu ove leme primijenjene na trougao $\triangle A_6A_7A_9$, imamo

$$b^2 = a(a+c). \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) i (6) slijedi $a^2 + c^2 - \frac{acd}{b} = a(a+c)$, odnosno

$$c - \frac{ad}{b} = a \Rightarrow bc - ad = ab \Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1.$$

(d) Jednakost $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, zbog (prema sinusnom teoremu) $a = 2R\sin 12°$, $b = 2R\sin 24°$, $d = 2R\sin 48°$ i $g = 2R\sin 84°$, gdje je R poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog petnaestougla (Slika 4), ekvivalentna je sa:

$$\frac{1}{\sin 24°} + \frac{1}{\sin 48°} + \frac{1}{\sin 84°} = \frac{1}{\sin 12°},$$

odnosno sa

$$\frac{\sin 48° + \sin 24°}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{\sin 84° - \sin 12°}{\sin 12° \sin 84°}.$$

Transformacijom zbira i razlike sinusa u proizvod dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sin\frac{48°+24°}{2}\cos\frac{48°-24°}{2}}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{2\sin\frac{84°-12°}{2}\cos\frac{84°+12°}{2}}{\sin 12° \sin 84°} \\
\iff &\frac{\cos 12°}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{\cos 48°}{\sin 12° \sin 84°} \\
\iff &\cos 12° \cdot \sin 12° \cdot \sin 84° = \cos 48° \cdot \sin 24° \cdot \sin 48° \\
\iff &\sin 84° = \sin 96° (\text{jer je} \sin 2x = 2\sin x \cos x).
\end{aligned}$$

Posljednja jednakost je tačna jer je $\sin 84° = \sin(180° - 96°) = \sin 96°$. Ovim je dokaz jednakosti (4) okončan.

□

3. Uopštenje jednakosti (1)

Sada ćemo dokazati sljedeći teorem, s malo izmijenjenom indeksacijom u odnosu na prethodni.

Teorem 3.1. *Ako je $A_0A_1A_2...A_{3n-1}$ pravilni mnogougao sa $3n$ stranica, onda je*

$$|A_0A_{n+1}| - |A_0A_{n-1}| = |A_0A_1| \quad \text{([1], str. 32)}. \tag{7}$$

Dokaz: Neka je R dužina poluprečnika opisane kružnice oko pravilnog mnogougla s $3n$ stranica i α veličina periferijskog ugla s vrhom u proizvoljnom vrhu tog mnogougla $A_0...A_{n-1}A_nA_{n+1}...A_{3n-1}$, izuzev krajnjih tačaka, nad tetivama: A_0A_1, A_0A_{n-1} i A_0A_{n+1}, redom. Tada je

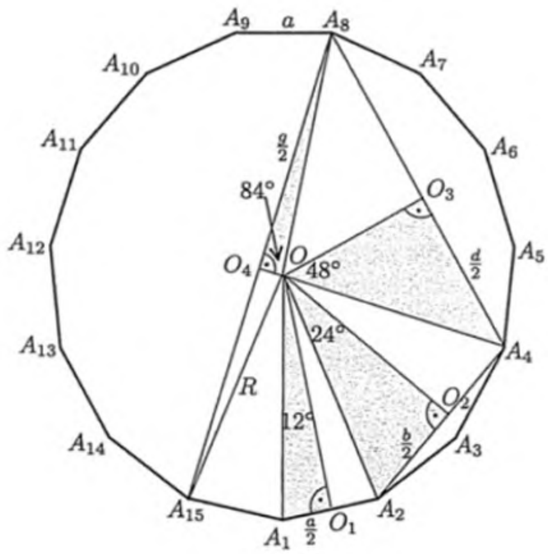
$$|A_0A_1| = 2R\sin\alpha, |A_0A_{n-1}| = 2R\sin(n-1)\alpha, |A_0A_{n+1}| = 2R\sin(n+1)\alpha,$$

pa je nejednakost (7) ekvivalentna sa

$$\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha = \sin\alpha. \tag{8}$$

Centralnih uglova veličine 2α ima ukupno $3n$, pa je $3n \cdot 2\alpha = 2\pi$, odakle je $n\alpha = \frac{\pi}{3}$. Zbog toga je

$$\cos n\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$



Slika 4

Korištenjem adicionih formula za sinus zbira i razlike dobijamo

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha =& \sin n\alpha \cdot \cos\alpha + \cos n\alpha \cdot \sin\alpha - (\sin n\alpha \cdot \cos\alpha - \cos n\alpha \cdot \sin\alpha) \\ =& 2\cos n\alpha \cdot \sin\alpha \\ =& 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \\ =& \sin\alpha,\end{aligned}$$

što znači da jednakost (8) važi, a samim tim i jednakost (7). □

Primjedba 3.2. *Za $n = 5$ iz jednakosti (7) slijedi $|A_0A_6| - |A_0A_4| = |A_0A_1|$, odnosno $|A_1A_7| - |A_1A_5| = |A_1A_2|$ (po prethodnoj indeksaciji) ili $f - d = a$, to jest (1).*

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da za pravilni petnaestougao vrijedi jednakost $b + c = g$.
2. Dokazati jednakosti (1) i (2) korištenjem:
   a) trigonometrije, b) metode koordinata, c) Ptolomejevog teorema.
3. Dokazati jednakost (4) primjenom kompleksnih brojeva.

Literatura

[1] D. Milošević: *Uopštenja dvije teoreme za pravilne mnogouglove,* MAT-KOL XIX 3(2013), 31-33.
[2] S. Ognjanović i dr.: *Zbirka zadataka iz matematike,* Stručna knjiga, Beograd, 1984.

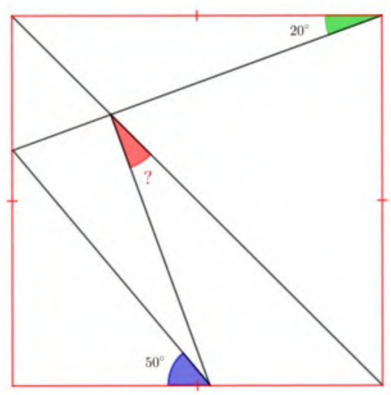
2

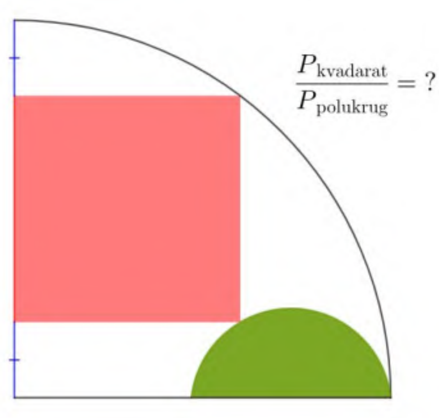
KUTAK ZA ZADATKE

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 37 - 38

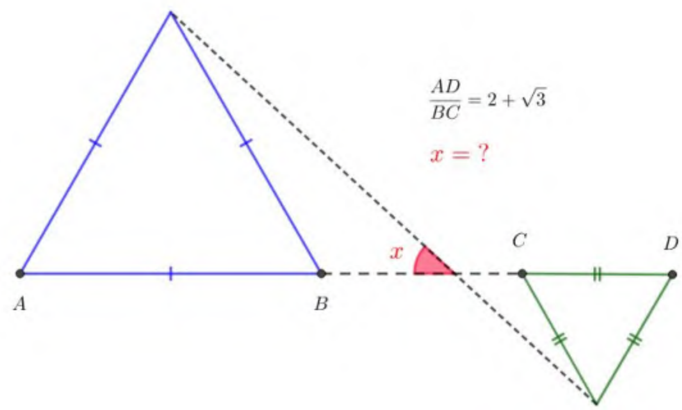
Zabavna matematika: Geometrija bez riječi

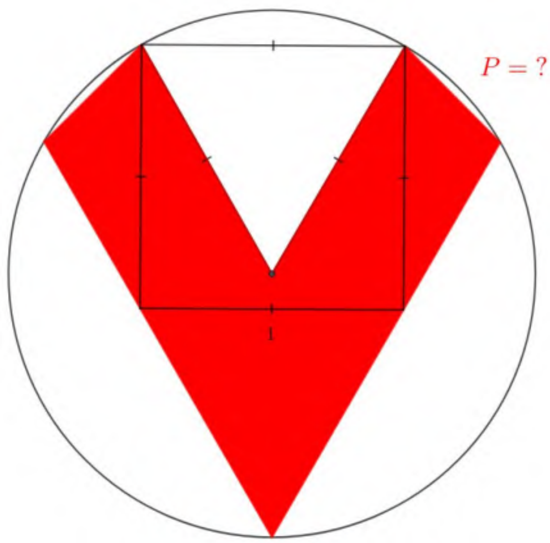
Naći nepoznate elemente naznačene na slikama, uz napomenu da su podudarne duži označene istom oznakom i u istoj su boji.

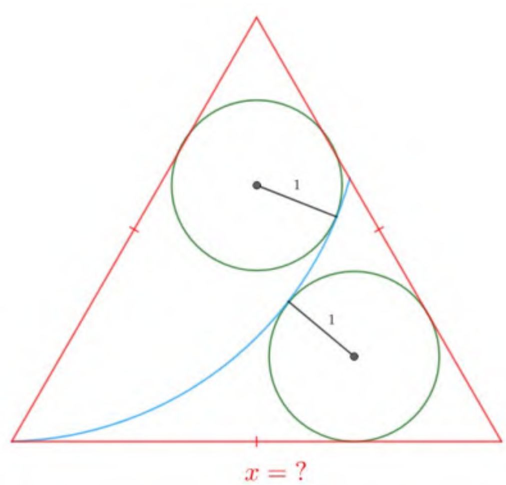




Ciljna skupina: svi uzrasti


$\frac{AD}{BC} = 2 + \sqrt{3}$
$x = ?$
x
A
B
C
D


$P = ?$
1


1
1
$x = ?$

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 39 - 40

Nagradni zadatak: Bojenje

Jedna od velikih epizoda u istoriji matematike počela je 23. oktobra 1852. U pismu Vilijamu Rouanu Hamiltonu, Augustus De Morgan je napisao: "Jedan moj student me je danas zamolio da mu dam razlog za činjenicu za koju nisam znao da je činjenica - a još ne znam." Do danas, ta "činjenica" nastavlja da oduševljava i izaziva naučnike.
Učenik je bio Frederick Guthrie, a "činjenica" o kojoj je riječ izvorno je došla od njegovog brata Francisa. Nakon što je pogledao kartu britanskih okruga, zapitao se da li je uvijek moguće obojiti kartu korištenjem četiri ili manje boja, a istovremeno osigurati da regije koje dijele granicu (više od ugla) budu različite boje.
Činilo se kao da bi to uvijek trebalo biti moguće. "Što više razmišljam o tome, to mi se čini očiglednijim", napisao je De Morgan. Ipak, problem nije uzbudio Hamiltona, a De Morganovi napori da zainteresuje druge takođe su propali. Problem je uglavnom bio neaktivan sve do 1878. godine, kada je Arthur Cayley aktivirao pitanje dokaza te činjenice pred članove Londonskog matematičkog društva. Ubrzo nakon toga, dokazi su počeli da se pojavljuju. "Najboljim" se pokazao prvi, koga je napravio advokat Alfred Kempe 1879. godine. Dokaz je bio uvjerljiv i više od jedne decenije prihvaćan je kao tačan. Nažalost, Kempeov dokaz - kao i svi drugi koji će se pojaviti u sljedećem vijeku - bio je pogrešan. Ipak, bio je genijalan i sadržavao je ključne ideje koje će se pojaviti u konačnom dokazu.
Da bismo razumjeli kako su Kempe i većina matematičara gledali na ovaj problem, pomaže prepoznati da karta sadrži mnogo informacija koje nisu relevantne za problem bojenja, kao što su oblik, veličina i tačna lokacija svake regije. Bitno je samo koje regije dijele granice. Da se fokusiramo na informacije koje su važne, možemo kodirati ove odnose koristeći graf, poznat i kao mreža, gdje su tačke (vrhovi) povezane linijama (ivicama). Zamijenimo svaki region karte vrhom i povežemo vrhove susjednih regija ivicama. Ako to pomaže, možemo zamisliti da su vrhovi glavni gradovi, a ivice putevi koji ih spajaju.
Na ovaj način, problem bojenja mape postaje problem bojenja grafa: Obojite vrhove tako da susjedni (oni između kojih postoji direktan put) budu različitih boja. Minimalni broj boja naziva se hromatski broj grafa. Možemo se pitati o hromatskom broju bilo kojeg grafa, ali grafovi koji proizilaze iz mapa imaju posebna svojstva. Ovi grafovi su jednostavni, što znači da nema rubova koji počinju i završavaju na istom tjemenu (petlje), a dva vrha mogu biti spojena samo jednom linijom. Graf je također ravan, što znači da se može nacrtati tako da se ivice ne ukrštaju.
Sada možemo ponoviti problem Francisa Guthriea: dokazati da je hromatski broj svakog jednostavnog planarnog grafa najviše četiri.
Na matematičkoj konferenciji 1976., 124 godine nakon što je Guthrie postavio problem, Wolfgang Haken je objavio dokaz u saradnji s Kennethom Appelom i uz pomoć postdiplomca Johna Kocha. Reakcije su bile pomiješane. "Očekivao sam da će publika buknuti velikim ovacijama", napisao je Don Albers, koji je prisustvovao govoru. "Umjesto toga, odgovorili su pristojnim aplauzom!" To je bilo zato što se ekipa u velikoj mjeri oslanjala na kompjuter, umjesto da vodi argumentaciju olovkom i papirom.
Matematička zajednica samo je nevoljko prihvatila rezultate, vjerujući da dokaz treba da bude razumljiv i provjerljiv od strane ljudi. Iako je bilo prihvatljivo da kompjuteri izvode rutinsku aritmetiku, matematičari nisu bili spremni da prepuste logičko rasuđivanje računarskom uređaju. Ovaj konzervativizam i nevoljkost da se prihvati napredak koji štedi vrijeme nije bio novina. U 17. vijeku, bilo je sličnog negodovanja kada su neki matematičari koristili novonastale algebarske tehnike za rješavanje problema u geometriji. Slična problematika bi se mogla ponoviti sa usponom mašinskog učenja: hoće li matematičari prihvatiti teorem otkriven i dokazan kompjuterskim algoritmom?
Dokaz problema četiri boje bio je, naravno, samo početak kompjuterske revolucije u matematici. Godine 1998. Thomas Hales je koristio kompjuter da dokaže čuvenu pretpostavku Johannesa Keplera da je najefikasniji način slaganja kuglica onaj koji se rutinski koristi za slaganje narandži u trgovini. A nedavno su kompjuteri pomogli da se pronađe "božji broj" - maksimalni broj okreta koji je potreban za rješavanje Rubikove kocke (20 okreta licem ili 26 ako se pola okreta računa kao dva.)

Ciljna skupina: svi uzrasti

Iako je bojenje grafova započelo pitanjem u kartografiji, problemi koji nemaju nikakve veze s mapama ili bojama također se mogu uklopiti u okvir bojenja grafova. Na primjer, igra *sudoku* je prikriveni problem bojenja grafova. Posmatramo li svaku ćeliju sudoku tabele kao vrh i devet cifara kao boje, svaki vrh ima 20 ivica koje izlaze iz njega - po jednu za svaku ćeliju u svom redu, u svom stupcu i u svom podkvadratu 3×3. Ovaj graf od 81 vrha i 810 ivica počinje djelomičnim bojenjem (zadati brojevi). Cilj igre je obojiti ostatak vrhova tako da nikoja dva susjedna nisu iste boje.

Bez obzira na svu pažnju koju su ovi problemi bojenja dobili, još uvijek nemamo dokaz originalne teoreme o četiri boje koju je čovjek samostalno dokazao. Razlog za ovo nije zbog nedostatka pokušaja. Čak i danas se pojavljuju novi dokazi, izazivaju određeni entuzijazam i, kao i Kempeov dokaz, pokazuje se da sadrže greške.

Zadatak. *Igrajući se sa svojom šetogodišnjom kćerkom matematičar je primijetio da djevojčica redovito posloži lego kocke kao na slici. Naime, ona koristi lego kocke u tri boje (crvena, žuta i zelena) i u napravljenoj konstrukciji (piramida) nikoje dvije kocke sa istom bojom se ne dodiruju. Naravno, matematičar se zapitao (ne svoju kćer!) koliko je moguće napraviti različitih varijanti ovakvih piramida sa ovom osobinom o bojama?*