ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

UM TK

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 7, No. 1, TUZLA 2024.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 7, No. 1, 2024.

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. ili direktno na https://evolventa.ba
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa.* Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, decembar 2024. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 2 – 5

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Grafičko određivanje izvoda funkcije

Amar Bapić[1], Amra Lušničkić[2]

[1] *Landesschulamt Sachsen-Anhalt*
[2] *Katolički školski Centar "Sv.Franjo" Tuzla*

Sažetak: U radu je prikazano kako grafički odrediti izvod funkcije jedne realne promjenljive, ukoliko funkcija nije zadana analitički niti tabelarno. Metod je ilustriran pomoću nekoliko odgovarajućih primjera.

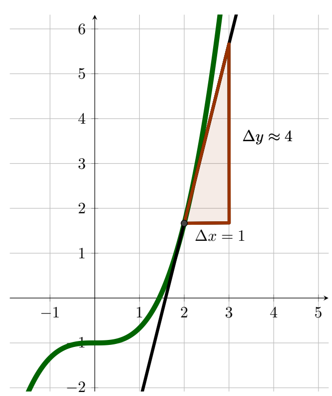
1. Nagibni trougao

Prije nego što objasnimo spomenuti metod, razmotrit ćemo *nagib* ili koeficijent smjera tangente na krivu u zadanoj tački. Koeficijent smjera k prave p definira se kao količnik

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

pri čemu su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) tačke na pravoj p. Poznato je da je vrijednost prvog izvoda u nekoj tački jednaka koeficijentu smjera tangente na krivu u toj tački.

Nagibni trougao ABC pomaže nam ocijeniti vrijednost k, pri čemu su A i B redom tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2), a C je tačka u ravni koja čini trougao ABC pravouglim. Cilj je odabrati tačke A, B i C tako da se priraštaji $\Delta y = y_2 - y_1$ i $\Delta x = x_2 - x_1$ jednostavno ocijene.



Slika 1: Nagibni trougao tangente na graf funcije f u tački $(2, f(2))$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: izvod, grafičko određivanje izvoda, nagibni trougao
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: juli 2024.

Primjer 1.1. *Neka je dat graf funkcije f kao na Slici 1. Konstruišimo tangentu u tački s apscisom $x = 2$ na graf funkcije f i nagibni trougao s katetom dužine $\Delta x = 1$. Sa grafa funkcije primijetimo da je $\Delta y \approx 4$. Otuda slijedi da je*

$$f'(2) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4.$$

2. Grafičko određivanje izvoda funkcije

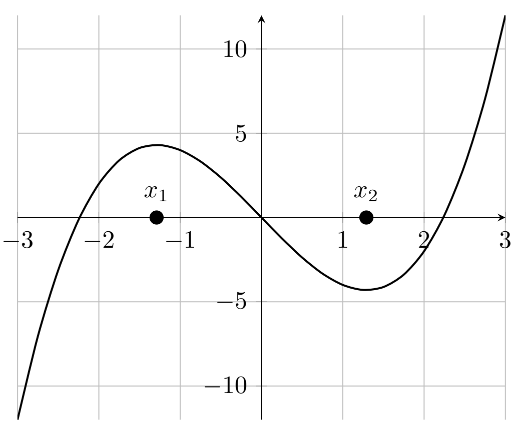
Pretpostavimo da je dat graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja nije zadana analitički. Da bismo grafički odredili izvod funkcije $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ potrebno je razmotriti monotonost funkcije f, tačke lokalnih ekstrema (eventualno sedlaste tačke) i prevojne tačke [1–3]. Sljedeća tabela prikazuje povezanost pomenutih pojmova s funkcijama f i f':

Osobina funkcije f	Značaj osobine za f'
monotono rastuća na datom intervalu	graf iznad x-ose na datom intervalu
monotono opadajuća na datom intervalu	graf ispod x-ose na datom intervalu
stacionarne tačke	nultačke
prevojna tačka (prelaz iz konveksnog u konkavno stanje)	tačka lokalnog maksimuma
prevojna tačka (prelaz iz konkavnog u konveksno stanje)	tačka lokalnog minimuma

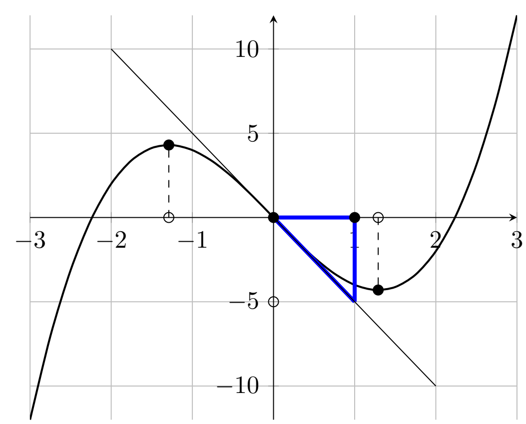
Tablica 1: Povezanost između osobina funkcija f i f'

Postupak grafičkog određivanja izvoda funkcije prikazat ćemo pomoću sljedećeg primjera.

Primjer 2.1. *Na Slici 2 je prikazan graf neke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kako bismo skicirali graf njenog izvoda f', koristit ćemo Tabelu 1.*



Slika 2: Graf funkcije f



Slika 3: Značajne tačke funkcija f i f'

- *Primijetimo da funkcija f ima dva lokalna ekstrema. Maksimum u tački x_1, neposredno lijevo od $x = -1$, te minimum u tački x_2, neposredno desno od $x = 1$. Prema tome:*

  $(x_1, 0)$ *i* $(x_2, 0)$ *su nultačke funkcije* f'.

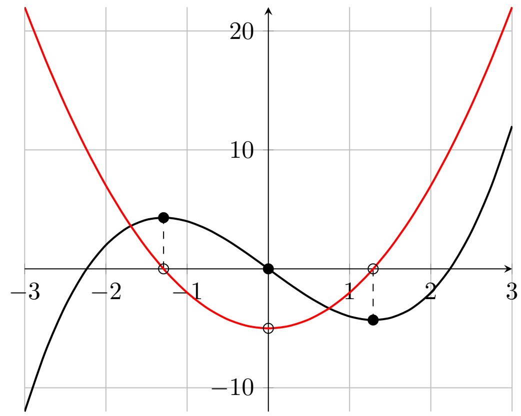
- *U tački $x = 0$ funkcija f prelazi iz konkavnog u konveksno stanje. Prema tome, f' ima u $x = 0$ minimum. Ocijenimo $f'(0)$ pomoću nagibnog trougla. Neka je t tangenta na graf f u tački $x = 0$. Sa Slike 3 primijećujemo da je $t(0) = 0$, $t(1) = -5$ i posljedično $f'(0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-0}{1-0} = -5$. Dakle,*

  $(0, -5)$ *je minimum funkcije* f'.

- *Funkcija je strogo monotono rastuća na* $I_1 = (-\infty, x_1)$ *i* $I_2 = (x_2, +\infty)$*, a strogo monotono opadajuća na* $I_3 = (x_1, x_2)$*. Prema tome:*

  graf funkcije f' *je na intervalu* $I_1 \cup I_2$ *iznad x-ose i na intervalu* I_3 *ispod x-ose.*

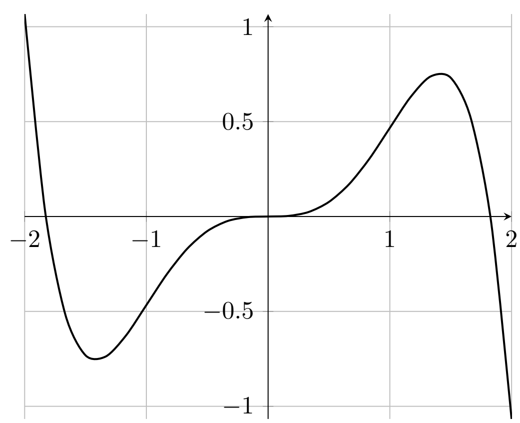
S datim podacima možemo skicirati graf funkcije f'*, koji je prikazan crvenom bojom na Slici 4.*



Slika 4: Grafovi funkcija f i f'

Razmotrimo primjer kada funkcija ima sedlastu tačku, tj. tačku u kojoj je prvi izvod jednak nuli i monotonost ostaje nepromijenjena. U ovom slučaju, graf funkcije f' dodiruje apscisnu osu u posmatranoj tački. Pogledajmo sljedeći primjer koji ilustruje ovaj slučaj.

Primjer 2.2. *Na Slici 5 je prikazan graf neke funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Slika 5: Graf funkcije f

- *Primijetimo da funkcija* f *ima dva lokalna ekstrema. Minimum u tački* x_1*, neposredno lijevo od* $x = -1$*, i maksimum u tački* x_2*, neposredno desno od* $x = 1$*. Prema tome:*

  $(x_1, 0)$ *i* $(x_2, 0)$ *su nultačke funkcije* f'*.*

  Tačka $x = 0$ *je sedlasta tačka za graf* f*. Prema tome,*

  f' *dodiruje* $x-$*osu u tački* $x = 0$*.*

- *U tački* $x = -1$ *funkcija* f *prelazi iz konveksnog u konkavno stanje. Prema tome,* f' *ima u* $x = -1$ *maksimum. Odredimo* $f'(-1)$ *pomoću nagibnog trougla. Neka je* t_1 *tangenta na graf* f *u tački* $x = -1$*. Sa Slike 6 vidimo da je* $t(0) = 0.5$, $t(-1) = -0.5$ *i posljedično* $f'(-1) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.5-0.5}{-1-0} = 1$*. Dakle,*

  $(-1, 1)$ *je maksimum funkcije* f'.

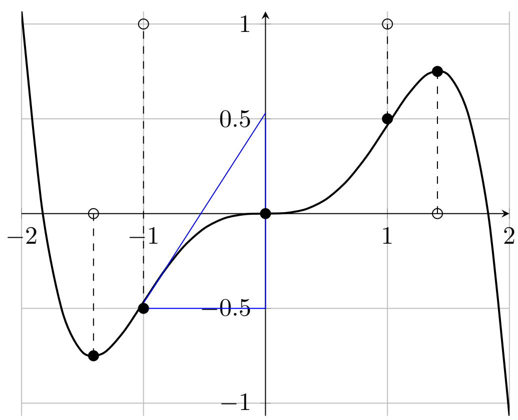
  Sličnim postupkom zaključujemo:

  $(1, 1)$ *je maksimum funkcije* f'.

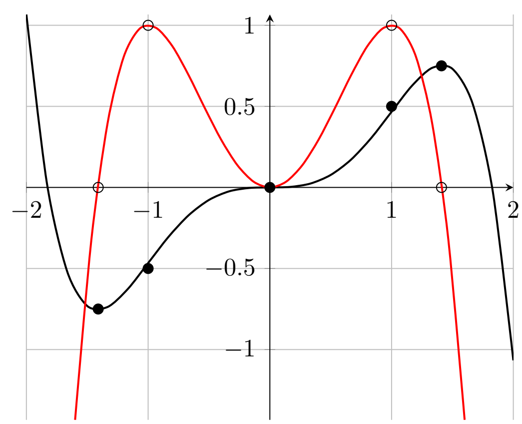
- *Funkcija* f *je strogo monotono rastuća na* $I_1 = (x_1, x_2)$*, a na intervalima* $I_2 = (-\infty, x_1)$ *i* $I_3 = (x_2, +\infty)$ *strogo monotono opadajuća. Prema tome:*

  graf funkcije f' *je na intervalu* I_1 *iznad* x*-ose i na intervalu* $I_2 \cup I_3$ *ispod* x*-ose.*

S datim podacima možemo skicirati graf funkcije f'*, koji je prikazan crvenom bojom na Slici 7.*



Slika 6: Značajne tačke funkcija f i f'



Slika 7: Grafovi funkcija f i f'

Literatura

[1] A. Bigalke, W. Eid, H. Kuschnerow, N. Köhler, G. Ledworuski: *Mathematik - Sachsen-Anhalt: Qualifikationsphase, Band 11*, Cornelsen, 2015

[2] F. Dedagić: *Matematička analiza – prvi dio*, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2005.

[3] F. Dedagić: *Matematička analiza – drugi dio*, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2005.

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 6 – 12

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Zadaci iz maksimuma i minimuma

Milorad Beljić[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: Rad sadrži nekoliko zadataka iz maksimuma i minimuma sa više rješenja prigodnih za rad sa nadarenim učenicima različitih viših uzrasta.

1. Uvod

Zadaci u kojima se određuje najveće ili najmanje značenje promjenljivih veličina predstavlja izuzetno važan, ali i vrlo zahtjevan, materijal za rad sa nadarenim učenicima. Kada ih rješavamo elementarnim metodama povećavamo kod učenika interes i podstičemo razvoj funkcionalnog i estetskog vaspitanja. Njihovo rješavanje je prožeto primjenom različitih metoda koje svakako prate razni misaoni postupci. Pri tome se ispoljavaju zakonitosti koje se suptilnim prelazom uz logičke povezanosti „slivaju“ uz funkcionalnu zavisnost u neku jednačinu, a ona onda "radi za nas".
Sa nadarenim učenicima se manje rješavaju tipski zadaci, a više oni zadaci u kojima se nešto istražuje. Rješavajući tipski zadatak proširivanjem, uopštavanjem ili uvođenjem dodatnih uslova, mnogo puta dobijamo nove zadatke koji su često i teži od početnih. Cijeli ovaj proces nas navodi na usredsređenost pažnje uz umno "dežurstvo" kako bismo uz veliku obazrivost donijeli adekvatan sud. Često su metode u rješavanju zadataka sa nadarenim učenicima nestandardne. Ta vrsta zadataka izlazi iz školskog programa jer su teški. Za njihovo rješavanje potrebno je, pored ličnog poznavanja školske matematike, izvjesna zrelost, dosjetljivost, logička spretnost u naslućivanju "puteva" za rješavanje (intuicija) i izuzetno poznavanje tehnike računanja i transformacija. Uz posjedovanje širokog logičkog znanja radi strogog matematičkog zaključivanja često se povezuju skoro nemoguće činjenice.
Iako je u ovom časopisu ranije bilo riječi o optimizaciji [3], ali korištenjem samo elementarnih metoda, u ovom radu ćemo uključiti i metode izračunavanja ekstremnih vrijednosti koristeći diferencijalni račun funkcija jedne i više varijabli [1, 2, 4, 5, 7].

U narednoj sekciji bit će predstavljeno rješenja nekih zadataka iz maksimuma i minimuma prigodnih za rad sa nadarenim učenicima različitih viših uzrasta.

2. Primjeri urađenih zadataka iz oblasti maksimuma i minimuma

Primjer 2.1. *Među svim pravougaonicima obima 20 naći onaj čija je površina najveća.*

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: maksimum, minimum, funkcija, trougao
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: decembar, 2024.

1. Rješenje: Obilježimo sa x i y stranice pravougaonika. Tada je

$$2x + 2y = 20, \quad P = xy.$$

Iz prve jednakosti dobijamo da je $y = 10 - x$, a uvrštavajući u drugu imamo

$$P = xy = x(10 - x) = -(x-5)^2 + 25,$$

iz čega onda slijedi da je maksimalna površina $P_{\max} = 25$ za $x - 5 = 0$, to jest $x = 5, y = 5$, pa je traženi pravougaonik kvadrat.

2. Rješenje: Iz $O = 20$ dobijamo da je $x + y = 10$. Kako je

$$P = \frac{4xy}{4} = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2) = \frac{1}{4}(100 - (x-y)^2),$$

imamo $P_{\max} = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$ za $x - y = 0$, to jest za $x = y = 5$.

3. Rješenje: Iz $P = x(10-x)$, na osnovu odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo

$$P = x(10-x) \leq \left(\frac{x + (10-x)}{2}\right)^2 = 25.$$

Jednakost vrijedi kada je $x = 10 - x$, pa je $x = 5$.

4. Rješenje: Primjenom diferencijalnog računa jedne varijable na funkciju $P(x) = x(10-x)$, pri čemu je $y = 10 - x$, imamo

$$\begin{aligned} &P'(x) = 0 \Longleftrightarrow 10 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 5, \\ &P''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow P''(5) = -2 < 0. \end{aligned}$$

Vidimo da, za $x = 5$ (što implicira i $y = 5$), funkcija $P(x) = x(10-x)$ dostiže maksimum $P_{\max} = 25$.

5. Rješenje: Razmatrajmo funkciju dviju varijabli $P(x,y) = xy$ i potražimo njenu maksimalnu vrijednost uz uslov $x + y = 10$. Uzimajući da je $\phi(x,y) = x + y - 10$, razmatrat ćemo ustvari sljedeću funkciju

$$F(x,y) = P(x,y) + \lambda\phi(x,y)xy + \lambda(x + y - 10),$$

za koju vrijedi:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda = 0 \Longrightarrow y = -\lambda, \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0 \Longrightarrow x = -\lambda, \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5, \; x = y = 5. \end{aligned}$$

Kako je $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$, imamo

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = dy + dy = 0 \Longrightarrow dy = -dx,$$

pa je

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2dx(-dx) = -2dx^2 < 0,$$

što implicira da funkcija F, odnosno funkcija P dostiže maksimum $P_{\max} = 25$, za $x = 5$ i $y = 5$.

Primjedba 2.2. *Rješenja u prva tri načina mogu se raditi sa nadarenim učenicima osnovne škole ili sa redovnim učenicima drugog razreda srednje škole. Četvrto rješenje se može raditi sa maturantima, a peto rješenje sa studentima. Naravno da se svi načini rješavanja mogu raditi s učenicima srednih škola koji se pripremaju za različite nivoe takmičenja.*

Primjer 2.3. *Iz proizvoljne tačke M unutar datog trougla ΔABC spuštene su normale MA_1, MB_1 i MC_1 redom na stranice BC,CA i AB.* [1] *Naći položaj tačke M unutar trougla ΔABC da zbir*

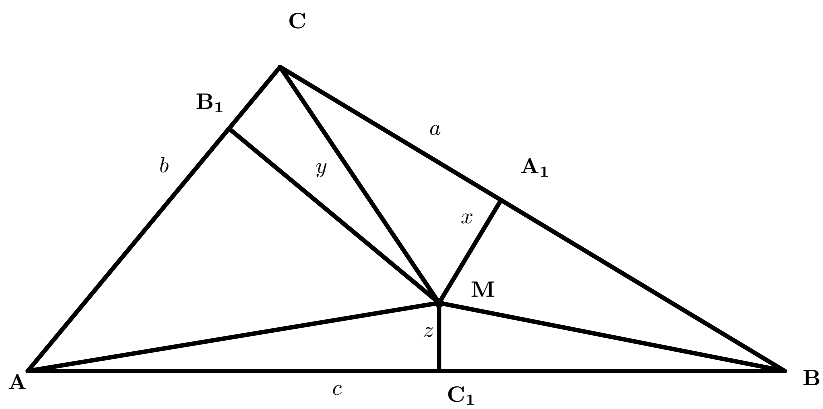
$$\frac{|BC|}{|MA_1|}+\frac{|CA|}{|MB_1|}+\frac{|AB|}{|MC_1|} \tag{1}$$

bude minimalan.

1. Rješenje: Koristeći oznake: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|MA_1| = x$, $|MB_1| = y$, $|MC_1| = z$, dobijamo (v. Sliku 1)

$$ax + by + cz = 2P = \text{const}, \tag{2}$$

pri čemu je P površina trougla ΔABC.



Slika 1

Ako uvedemo oznaku $F = \frac{|BC|}{|MA_1|}+\frac{|CA|}{|MB_1|}+\frac{|AB|}{|MC_1|} = \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$, množenjem sa (2) dobijamo

$$\begin{aligned} F\cdot 2P &= \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz) \\ &= a^2+b^2+c^2+\frac{aby}{x}+\frac{acz}{x}+\frac{abx}{y}+\frac{bcz}{y}+\frac{acx}{z}+\frac{bcy}{z} \\ &= a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

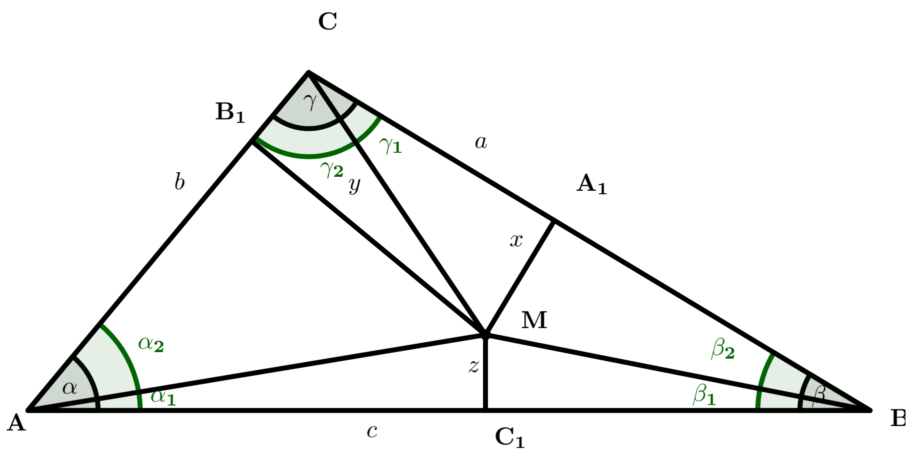
Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine brojeva m i n oblika $\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \geq 2$, $m > 0, n > 0$, gdje znak jednakosti važi za $m = n$, iz (3) dobijamo

$$F\cdot 2P \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = (a+b+c)^2 = 4s^2.$$

[1] Ovaj zadatak je bio (1981. godine) na XXII internacionalnoj matematičkoj olimpijadi srednjoškolaca.

Jednakost vrijedi ako je $x = y = z$, a to znači da je tačka M centar upisanog kruga u dati trougao.

2. Rješenje: Neka su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla $\triangle ABC$ i neka je (vidi Sliku 2) $\angle BAM = \alpha_1$, $\angle MAB_1 = \alpha_2$, $\angle ABM = \beta_1$, $\angle MBA_1 = \beta_2$, $\angle BCM = \gamma_1$, $\angle MCB_1 = \gamma_2$.



Slika 2

Iz trougla ΔA_1MB i trougla ΔA_1MC slijedi

$$\operatorname{ctg}\beta_2 = \frac{BA_1}{x}, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}\gamma_1 = \frac{CA_1}{x}, \tag{5}$$

odakle se sabiranjem dobije

$$\frac{a}{x} = \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\beta_2. \tag{6}$$

Analogno je

$$\frac{b}{y} = \operatorname{ctg}\gamma_2 + \operatorname{ctg}\alpha_2, \tag{7}$$

$$\frac{c}{z} = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1. \tag{8}$$

Sabiranjem (6), (7) i (8) imamo

$$F = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2 + \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\gamma_2,$$

a odavde jednostavnim transformacijama dobijamo

$$F = \frac{2\sin\alpha}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\alpha} + \frac{2\sin\beta}{\cos(\beta_1-\beta_2)-\cos\beta} + \frac{2\sin\gamma}{\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma}. \tag{9}$$

Veličina F je minimalna ako je svaki sabirak u (9) minimalan, odnosno ako su nazivnici maksimalni, što se postiže za

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1,\ \cos(\beta_1 - \beta_2) = 1,\ \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 1,$$

to jest

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,$$

pa je tražena tačka M centar upisanog kruga u trougao ΔABC.

3. Rješenje: Posmatrajmo funkciju $U(x,y,z) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}$ i odredimo vezani (uslovni) ekstremum ove funkcije, uz uslov $ax + by + cz = 2P$, pri čemu je P površina datog trougla $\triangle ABC$. Neka je

$$\phi(x,y,z) = ax + by + cz = 2P.$$

Tada je $F(x,y,z,\lambda) = U(x,y,z) + \lambda \cdot P(x,y,z)$ oblika

$$F(x,y,z,\lambda) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \lambda(ax + by + cz - 2P). \tag{10}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{a}{x^2} + \lambda a = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{b}{y^2} + \lambda b = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{c}{z^2} + \lambda c = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda} = ax + by + cz - 2P = 0,
\end{aligned}$$

pri čemu je $x,y,z > 0$, dobijemo da je $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ i

$$\frac{a}{\sqrt{\lambda}} + \frac{b}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c}{\sqrt{\lambda}} = 2P.$$

Odavde je $\sqrt{\lambda} = \dfrac{a+b+c}{2P} = \dfrac{2s}{2rs} = \dfrac{1}{r}$. Tada je $x = y = z = r$, pa je stacionarna tačka $M(r,r,r)$. Dalje imamo da je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2a}{x^3},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \ldots = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2b}{y^3},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2c}{z^3}.$$

Označimo $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(M), i,j = 1,2,3$. Tada je $a_{11} = \dfrac{2a}{r^3}$, $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 0$, $a_{22} = \dfrac{2b}{r^3}$, $a_{33} = \dfrac{2c}{r^3}$, pa prema tome glavni minori D_1, D_2, D_3 postaju

$$D_1 = a_{11} = \frac{2a}{r^3} > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{4ab}{r^6} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{8abc}{r^9} > 0,$$

Iz toga slijedi da funkcija U u tački $M(r,r,r)$ ima lokalni minimum $U_{\min} = \dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r} + \dfrac{c}{r} = \dfrac{a+b+c}{r} = \dfrac{2s}{r}$, a tačka M je centar upisanog kruga u dati trougao.

Primjer 2.4. *Od svih trouglova datog obima najveću površinu ima jednakostranični trougao. Dokazati.*

1. Rješenje: Neka su a, b i c dužine stranica trougla datog obima $2s$. Na osnovu odnosa aritmetičke i geometrijske sredine brojeva $s-a$, $s-b$ i $s-c$ imamo

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Odavde je

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Sada je $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \dfrac{s^4}{27}$, jer je $P \leq \dfrac{s^2\sqrt{3}}{9}$, pri čemu znak jednakosti važi za $s-a=s-b=s-c$, odnosno $a=b=c$, a to znači da je trougao jednakostraničan.

2. Rješenje: ([6], str. 232-233) Poznato je da se površina trougla, čije su dužine stranica a, b i c, a R dužina poluprečnika oko njega opisane kružnice, može izraziti u obliku $P=\frac{abc}{4R}$. Prema sinusnoj teoremi je $a=2Rsin\alpha$, $b=2Rsin\beta$, $a=2Rsin\gamma$, pa je

$$P = 2R^2 sin\alpha sin\beta sin\gamma. \tag{11}$$

U nastavku ćemo koristiti Jensenovu [2] nejednakost u slučaju kad je funkcija $f: A \to \mathbb{R}$ konveksna na A:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right),$$

uzimajući da je $f(x)=\ln sinx$ (koja je konveksna na $A=(0,\pi)$ jer je $f''(x)=-\frac{1}{sin^2x}<0$ za sve $x\in(0,\pi)$), $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ i $x_3=\gamma$. Tako dobijemo

$$\ln sin\alpha + \ln sin\beta + \ln sin\gamma \leq 3\ln sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

odnosno,

$$sin\alpha sin\beta sin\gamma \leq sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi za $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, a što znači da je trougao jednakostraničan, pa je $a=\frac{2s}{3}$ i $R=\frac{2s\sqrt{3}}{9}$. Odavde, prema (11), slijedi da je površina tog trougla $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{s^2\sqrt{3}}{9}$.

3. Rješenje: Kako iz $a+b+c=2s$ slijedi $c=2s-a-b$, posmatrajmo funkciju

$$g(a,b)=s(s-a)(s-b)(a+b-s)$$

i odredimo njenu maksimalnu vrijednost (pod istim uslovima će i funkcija $\sqrt{g(a,b)}=P$ imati maksimalnu vrijednost). Iz sistema jednačina

$$\frac{\partial g}{\partial a} = s(s-b)(2s-2a-b)=0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial b} = s(s-a)(2s-a-2b)=0,$$

[2] Johan Ludwig Jensen (1859-1925), danski matematičar

dobijamo stacionarnu tačku $S(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3})$, što znači da je $a=b=c=\frac{2s}{3}$. Primijetiomo da $s=a$ i $s=b$ ne dolazi u obzir jer bi tada bilo $c=0$, a to nema smisla.
S obzirom da je

$$A=\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-2s(s-b)|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-\frac{2s^2}{3},$$
$$B=\frac{\partial^2 g}{\partial ab}|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-2s(3s-2a-2b)|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-\frac{s^2}{3},$$
$$C=\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-2s(s-a)|_{a=b=\frac{2s}{3}}=-\frac{2s^2}{3},$$

imamo $AC-B^2=\dfrac{1}{3}s^2>0$, što znači da funkcija g (a samim tim i P) ima ekstremnu vrijednost, a zbog $A=C<0$ u pitanju je maksimum. Pri tome je $a=b=c$, pa je trougao, datog obima $2s$, sa maksimalnom površinom $P=\sqrt{s\cdot\frac{s}{3}\cdot\frac{s}{3}\cdot\frac{s}{3}}=\frac{s^2}{9}\sqrt{3}$, ustvari jednakostranični trougao.

3. Zadaci za vježbu

1. Od svih pravougaonika upisanih u krug poluprečnika 4, odredi onaj koji ima najveću površinu
2. Iz proizvoljne tačke M, unutar datog tetraedra $ABCD$, spuštene su normale MA_1, MB_1, MC_1 i MD_1 na stranice P_A, P_B, P_C i P_D koje čine površine plohe redom BCD, ACD, ABD i ABC. Od svih tačaka M naći takvu tačku da zbir $\dfrac{P_A}{|MA_1|}+\dfrac{P_B}{|MB_1|}+\dfrac{P_C}{|MC_1|}+\dfrac{P_D}{|MD_1|}$ bude minimalan.
3. Neka je tačka O centar opisane kružnice oko trougla ΔABC i normalna rastojanja te tačke od stranica a, b i c redom d_a, d_b i d_c. Dokazati nejednakost $d_a^n+d_b^n+d_c^n\leq 3\left(\dfrac{R}{2}\right)^n$.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2000.
[2] O. Bottema: *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.
[3] N. Karać, A. Šehanović: Neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti, *Evolventa*, vol. 4, no. 2 (2021), 22–23.
[4] D.S. Mitrinović: *Priručnik za takmičenje srednjoškolaca u matematici – Geometrijske nejednakosti*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1966.
[5] T. Begenišić: *Viša matematika*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1968.
[6] T. Tadić: *Pripreme za matematička takmičenja*, Element, Zagreb, 2010.
[7] *"Tangenta"*, No. 47/3, godina 2006/07, DMS, Beograd, 2007.

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 13 - 17

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Jednakokraki trougao sa uglom od 100°

Dragoljub Milošević[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: U radu su navedene i dokazane neke jednakosti u vezi sa jednakokrakim trouglom čiji je jedan unutrašnji ugao jednak 100°.

1. Uvod

Već u osnovnoj školi susrećemo se s trouglom, to jest dijelom ravni koji je ograničen sa tri duži. Osnovni elementi trougla su stranice i uglovi. Trouglove klasificiramo prema stranicama (jednakostranični, jednakokraki, nejednakostranični) i prema uglovima (oštrougli, pravougli, tupougli). Najduža stranica pravouglog trougla naziva se hipotenuza, a ostale dvije nazivamo katete. Kod jednakokrakog trougla jednake stranice su kraci.

Jedno od četiri pravila (stava) podudarnosti (pravilo USU, drugi stav podudarnosti) glasi:

Teorem 1.1. *Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba odgovarajuća ugla nalegla na tu stranicu.*

Takođe navedimo da Pitagorina teorema vrijedi za pravougli trougao:

Teorem 1.2. *Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama.*

Saglasno euklidskoj geometriji koristit ćemo se i tvrdnjama:

Teorem 1.3. *Zbir uglova u proizvoljnom trouglu je* 180°.

Teorem 1.4. *Naspram jednakih uglova (stranica) u trouglu leže jednake stranice (uglovi).*

U radu ćemo koristiti i poznatu *kosinusnu teoremu*:

Teorem 1.5. *U trouglu* $\triangle XYZ$*, čije su stranice* $|YZ| = x$*,* $|ZX| = y$ *i* $|XY| = z$*, vrijedi*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\angle(ZXY).$$

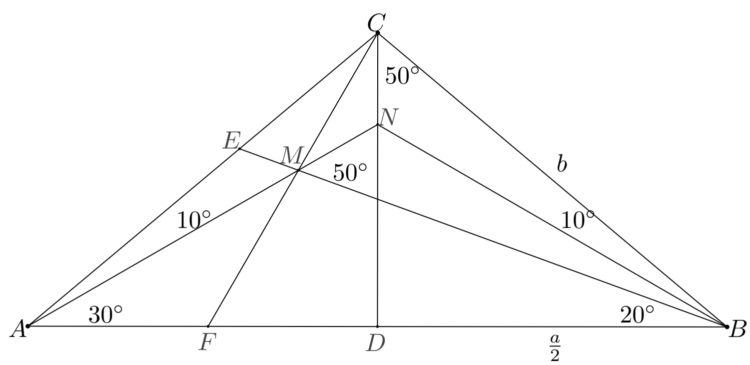
Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trougao
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: maj 2024.

2. Jednakosti za jednakokraki trougao s uglom 100°

Prikazat ćemo po jedan dokaz za pet jednakosti koje vrijede u jednakokrakom trouglu s uglom od 100°, a za posljednju šestu jednakost dat ćemo dva dokaza.

Teorem 2.1. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ u kojem je $|AB| = a$, $|AC| = |BC| = b$ i $\angle ACB = 100°$ izabrana je tačka M tako da je $\angle MAB = 30°$ i $\angle MBA = 20°$. Ako prave BM i CM presjecaju stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ respektivno u tačkama E i F, tada vrijede slijedeće jednakosti:*

1. $\angle CMB = 80°$.
2. $|AF| = |MF|$.
3. $|BE| = |BF|$.
4. $|BF| = |AF| + |CF|$.
5. $|BM| \cdot |CE| = |CM| \cdot |BE|$.
6. $a^3 + b^3 = 3ab^2$.



Slika 1:

Dokaz:

1. Neka je dat jednakokraki trougao $\triangle ABC$ u kome je $\angle ACB = 100°$. Tada je $\angle CAB = \angle ACB = (180° - 100°) : 2 = 40°$. Neka je tačka D podnožje normale iz tačke C na stranicu AB, a tačka N neka je presjek pravih AM i CD (Slika 1). Tada je $\angle BMN$ spoljašnji ugao za trougao $\triangle ABM$, pa je $\angle BMN = 30° + 20° = 50°$. Zbog simetrije je $\angle AND = \angle BND = 60°$ i $\angle CBN = \angle MAC = 10°$. Kako je $\angle BNM = \angle BNC = 120°$, $|BN| = |BN|$ i $\angle MBN = \angle CBN = 10°$, trouglovi $\triangle BMN$ i $\triangle BCN$ su podudarni (pravilo USU), te je $|BC| = |BM|$. Tada je $\triangle BCM$ jednakokraki trougao i $\angle BCM = \angle CMB = (180° - 20°) : 2 = 80°$.
2. Uočavamo da je $\angle CMN = \angle CMB - \angle BMN = 80° - 50° = 30°$. S obzirom da je $\angle MAF = \angle MAB = 30°$ i $\angle AMF = \angle CMN$ (unakrsni uglovi), zaključujemo da je $\triangle AFM$ jednakokraki trougao. Zbog toga je $|AF| = |MF|$.
3. $\angle BFM$ je spoljašnji ugao u $\triangle AFM$, pa je $\angle BFM = 2 \cdot 30° = 60°$. Također, imamo i $\angle BEC = 180° - (20° + 100°) = 60°$. Budući da je $\angle FBM = \angle CBE = 20°$, $|BM| = |BC|$ i $\angle BFM = \angle BEC = 60°$, trouglovi $\triangle BMF$ i $\triangle BCE$ su podudarni (pravilo USU), što znači da je $|BE| = |BF|$.
4. Budući da je $\angle DCF = 30°$, pravougli trougao $\triangle CFD$ je polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{CF}$. Zbog toga je $|FD| = \frac{1}{2}|CF|$, a time je

$$|AF| = |AD| - |FD| = \frac{a}{2} - \frac{|CF|}{2} \qquad (1)$$

i

$$|BF| = |BD| + |DF| = \frac{a}{2} + \frac{|CF|}{2}. \tag{2}$$

Najzad, oduzimanjem jednakosti 1 i 2, dobijamo

$$|BF| - |AF| = \frac{a}{2} + \frac{|CF|}{2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{|CF|}{2}\right) = |CF|,$$

to jest $|bf| = |AF| + |CF|$.

5. Trouglovi $\triangle BMF$ i $\triangle MCE$ imaju jednake uglove, pa su slični. Na osnovu te sličnosti imamo $|BM| : |CM| = |BF| : |CE|$. Kako je $|BF| = |BE|$, slijedi tražena jednakost $|BM| \cdot |CE| = |CM| \cdot |BE|$.
6. Na stranici $\overline{AB}$ uočimo tačku G, tako da je $\angle BCG = \angle ABC = 40°$. Sada imamo da je $\angle ACG = 60°$ (Slika 2). Trougao $\triangle BCG$ je jednakoraki ($\angle GBC = \angle BCG$), što znači da je $|CG| = |BG| = x$. Tada je $|AG| = a - x$. Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle BCG$ imaju jednake uglove, te su slični. Zbog toga je $|AB| : |BC| = |AC| : |CG|$, odnosno vrijedi $a : b = b : x$. Otuda je $x = \dfrac{b^2}{a}$, pa je $|BG| = |CG| = \dfrac{b^2}{a}$ i $|AG| = a - \frac{b^2}{a}$. Neka je tačka H podnožje normale iz tačke A na stranicu $\overline{CG}$. Trougao $\triangle AHC$ je polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{AC}$, što znači da je $|CH| = \dfrac{b}{2}$ i na osnovu Pitagorine teoreme je

$$|AH|^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2}{4}.$$

Dakle, $|AH| = \dfrac{\sqrt{3}b}{2}$.
Nadalje imamo

$$|GH| = |CG| - |CH| = \frac{b^2}{a} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2a}(2b - a).$$

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle AGH$, dobijamo $|AG|^2 = |AH|^2 + |GH|^2$, iz čega onda imamo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2a}(2b-a)\right)^2 &\Longrightarrow \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2} = \frac{3b^2}{4} + \frac{b^2(4b^2 - 4ab + a^2)}{4a^2} \\ &\Longrightarrow 4(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 3a^2b^2 + 4b^4 - 4ab^3 + a^2b^2 \\ &\Longrightarrow 4a^4 + 4ab^3 = 12a^2b^2 \\ &\Longrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2.\end{aligned}$$

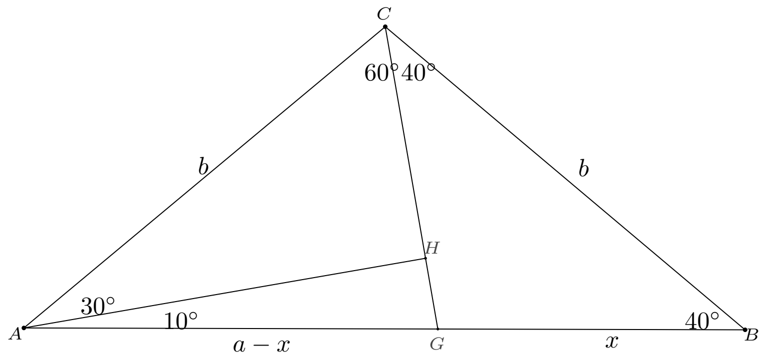
Pokažimo sada i drugačiji način dokazivanja jednakosti 6. Naime, poslužimo se trigonometrijom. Kako je $|CG| = |BG| = x$, primjenom kosinusne teoreme na $\triangle AGC$ imamo

$$(a - x)^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos 60°,$$

odakle je

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a - b}. \tag{3}$$

Iskoristimo sad pomoćno tvrđenje:
Ako u $\triangle ABC$ vrijedi $\alpha = 2\beta$, onda vrijedi jednakost $a^2 = b(b + c)$



Slika 2:

Dokaz ove tvrdnje se izvodi koristeći sličnost trouglova i Pitagorine teoreme, a jedan od dokaza se može naći u [3].
S obzirom da je $\angle AGC = 80° = 2 \cdot 40° = 2 \cdot \angle CAG$, možemo primjeniti navedeno pomoćno tvrđenje na $\triangle AGC$, to jest

$$|AC|^2 = |CG|(|CG| + |AG|) \iff b^2 = x(x + a - x),$$

odakle je

$$x = \frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

Iz jednakosti 3 i 4 slijedi da je

$$\frac{a^2 - b^2}{2a - b} = \frac{b^2}{a},$$

što nam daje traženu jednakost $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

□

Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1. *Dokazati sljedeće jednakosti (v. sliku 1.):*

1. $|AF| = |EF| = |MF|$.
2. $|AM| = |AF|\sqrt{3}$.
3. $|CM| = |MN|\sqrt{3}$.
4. $b^3 + c^3 = 3b^2c$, *gdje je* $c = |CM|$.
5. $|AM| \cdot |MN| = |AF| \cdot |CM|$.
6. $|BE| = \dfrac{a}{a+b}\sqrt{b(a+2b)}$.
7. $|AM| \cdot |BN| = \dfrac{ab^2}{a+b}$.
8. $|CM| = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+2b} + \sqrt{b}}$.
9. $\dfrac{|BC|}{|MC|} - \dfrac{|CF|}{|AF|} = 1$

Zadatak 2. *U jednakokrakom trouglu* $\triangle ABC$*, s uglom* $\angle ACB = 100^\circ$*, odabrana je tačka* M *tako da je* $\angle MAB = 10^\circ$ *i* $\angle MBA = 20^\circ$*.*

1. *Odrediti veličinu ugla* $\angle CMB$*.*
2. *Dokazati da je* $|BM| = |CM| = |AB| - |BC|$*.*

Zadatak 3. *U jednakokrakom trouglu* $\triangle ABC$ *je* $\angle ACB = 100^\circ$*. Krak* $\overline{BA}$ *je produžen do tačke* D *(*A *je između* C *i* D*) tako da je* $|CD| = |AB|$*. Izračunati* $\angle ABD$*.*

Zadatak 4. *U trouglu* $\triangle ABC$ *je* $|AC| = |BC| = b$*,* $|AB| = a$ *i* $a^3 + b^3 = 2ab^2$*. Dokazati da je* $\angle ACB = 20^\circ$ *ili* $\angle ACB = 100^\circ$*.*

Literatura

[1] M. Prvanović: *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.
[2] P. Stojković: *Razvijanje sposobnosti učenja*, Svjetlost, Sarajevo, 1981.
[3] D. Milošević: *Razni dokazi teoreme iz geometrije*, MAT-KOL, XVII (1), (2011.), 49-54.

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 18 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Pogled iz drugog ugla

Alija Muminagić[1], Jens Carstensen[2]

[1]*penzioner, Danska*
[2]*penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom članku pišemo o nekim razmišljanjima tokom rješavanja i nakon rješenja nekog zadatka.

1. Uvod

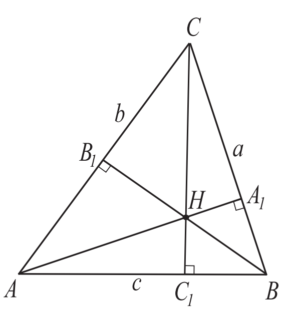
Rješavajući neki zadatak, ponekad dolazimo do nekih relacija, od kojih dobijamo rješenje nekog novog zadatka koji nema nikakve veze s polaznim. Da je to upravo tako, uvjerićemo se rješavajući Zadatak 1. koji je interesantan sam po sebi, a iz kojeg dobijamo vrlo interesantan nusprodukt. Međutim, može se desiti da rješavajući zadatak dobijemo istovremeno i rješenje još jednog novog zadatka. Takav je u našem članku Zadatak 2.2.

2. Zadaci

Zadatak 2.1. *Dokazati da u oštrouglom trouglu* ΔABC *vrijedi*

$$\frac{a}{|AH|}+\frac{b}{|BH|}+\frac{c}{|CH|}\geq\frac{s^2}{T},$$

gdje su a, b *i* c *dužine odgovarajućih stranica tog trougla,* s *- poluobim,* T *- površina i* H *njegov ortocentar.*



Slika 1.

Rješenje: Uz oznake kao na Slici 1. imamo da je

$$\triangle AA_1B\sim\triangle BC_1C \ \text{ i } \ \triangle AA_1B\sim\triangle AC_1H.$$

Odavde slijedi da je $\triangle AC_1H\sim\triangle BC_1C$, pa je $\dfrac{a}{|AH|}=\dfrac{|CC_1|}{|AC_1|}=\operatorname{tg}\alpha$ i analogno $\dfrac{b}{|BH|}=\operatorname{tg}\beta$ i $\dfrac{c}{|CH|}=\operatorname{tg}\gamma$.

Slijedi da treba dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{s^2}{T}$.
Zbog, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, $T=r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})$ i $s=r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})$ (čitaocima preporučujemo da dokažu ove jednakosti, koje vrijede u trouglu).

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: trougao, ugao, nejednakost, minimum funkcije
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: mart 2024.

Tada imamo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{s^2}{T} &\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2}{r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})}\\
&\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\\
&\Longrightarrow \left(\text{zbog}\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},\ \text{dokažite !}\right)\\
&\Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \geq \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\\
&\qquad \left(\text{ovdje smo primijenili da je } \operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\ \text{ i }\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)\\
&\Longrightarrow \frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\\
&\Longrightarrow \left(\text{zbog}\quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x\right)\\
&\Longrightarrow \frac{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\\
&\Longrightarrow (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \geq \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \ \text{(to je naš nusprodukt).}
\end{aligned}
$$

Zaista, neočekivano smo došli do dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti u oštrouglom trouglu, koju nije jednostavno direktno dokazati. Zato ćemo ovdje navesti jedan od mogućih dokaza.

Poznato je da vrijede sljedeće jednakosti (v. [1], [6]):

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2), \tag{1}$$

$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr, \tag{2}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - 4R^2 cos\alpha cos\beta cos\gamma, \tag{3}$$

$$sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}, \tag{4}$$

gdje je O centar opisane kružnice, I centar upisane kružnice, H ortocenar, r poluprečnik upisane kružnice, R poluprečnik opisane kružnice, α, β i γ unutrašnji uglovi trougla ΔABC.

Iz (4), koristeći činjenicu $sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$, dobijamo

$$r = 4Rsin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2} = 4R\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1-cos\beta}{2}}\sqrt{\frac{1-cos\gamma}{2}},$$

odakle je

$$r^2 = 2R^2(1-cos\alpha)(1-cos\beta)(1-cos\gamma). \tag{5}$$

Iz (3) vidimo da vrijedi

$$2r^2 - 4R^2 cos\alpha cos\beta cos\gamma \geq 0,$$

a odavde, zbog (5), imamo

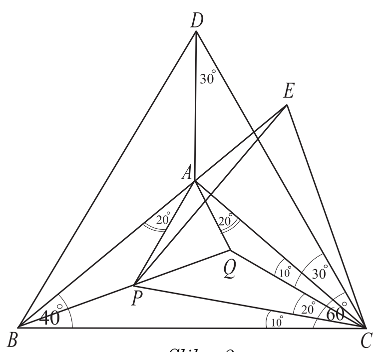
$$4R^2(1-cos\alpha)(1-cos\beta)(1-cos\gamma) - 4R^2 cos\alpha cos\beta cos\gamma \geq 0,$$

odnosno,

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \geq \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

što je i trebalo dokazati. Pri tome jednakost vrijedi samo u slučaju kada je $|IH| = 0$, to jest kad je $I \equiv H$, a to znači da je u pitanju jednakostranični trougao. ■

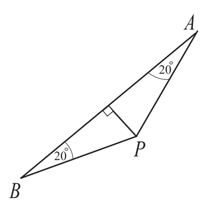
Zadatak 2.2. *U trouglu $\triangle ABC$ su uglovi $\beta = \gamma = 40°$, a tačke P i Q su u unutrašnjosti tog trougla, takve da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ = 20°$ i $\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 10°$. Dokazati da tačke B, P i Q leže na istoj pravoj.*



Slika 2.

Rješenje 1. Neka je tačka D u ravni trougla $\triangle ABC$ (Slika 2), takva da je trougao $\triangle DBC$ jednakostraničan i tačke D i A leže s iste strane stranice $\overline{BC}$. Tada je $\sphericalangle QCD = \sphericalangle CDA = 30°$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAQ = 20°$ i zato je četverougao $\square AQCD$ jednakokraki trapez, tj. $|QC| = |AD|$. Posmatrajmo sada trouglove $\triangle BDA$ i $\triangle BCQ$.
Imamo da je $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCQ = 30°$, $|DA| = |QC|$ i $|DB| = |CB|$, pa je $\triangle BDA \cong \triangle BCQ$ i iz te podudarnosti slijedi da je $|BA| = |BQ|$. Dakle trougao $\triangle BAQ$ je jednakokraki. Kako je $\sphericalangle BAC = \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (40° + 40°) = 100°$, dobijamo da je $\sphericalangle BAQ = \alpha - \sphericalangle CAQ = 100° - 20° = 80° = \sphericalangle BQA$ i $\sphericalangle ABQ = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$. $(*)$
Produžimo stranicu $\overline{BA}$, preko tačke A, do E tako da je $|BE| = |BC|$,
Lako vidimo da je $\sphericalangle CEB = \sphericalangle BCE = 70° = \sphericalangle APC$.
Dalje je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCA = 70° - 40° = 30° = \sphericalangle PCA$.
Tako je $\triangle ACP \sim \triangle ACE$ (jer je $\sphericalangle ACE = 30° = \sphericalangle PCA$ i $\sphericalangle AEC = \sphericalangle CEB = 70° = \sphericalangle APC$), a zbog zajedničke stranice ta dva trugla su i podudarna i iz te podudarnosti proizilazi da je $|AP| = |AE|$ i $|CP| = |CE|$. Osim toga je $\sphericalangle PCE = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCP = 70° - 10° = 60°$ i kako je $|CP| = |PE|$ trougao $\triangle PCE$ je jednakostraničan, to jest $|CP| = |PE|$.
Posmatrajmo trouglove $\triangle BPC$ i $\triangle BPE$. Ovdje je $\sphericalangle BCP = 10° = \sphericalangle BEP$ i $|BE| = |BC|$, $|PC| = |CE|$, što povlači da su ti trouglovi podudarni. Sada imamo $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PBE = \frac{1}{2} \cdot 40° = 20°$ i $\sphericalangle ABQ = 20°$ (v. $(*)$), pa slijedi da tačke B, P i Q leže na istoj pravoj. ■

Pogledajmo šta možemo dobiti nakon što smo riješili ovaj zadatak.



Slika 3.

Vidimo da je trougao $\triangle ABP$ jednakokraki sa uglovima na osnovici $\overline{AB}$, $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAB = 20°$ (Slika 3). Tako je

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| = |BP| \cdot \cos 20° \Leftrightarrow |BP| = \frac{|AB|}{2 \cos 20°} \tag{4}$$

a u jednakorakom trouglu $\triangle ABC$ je

$$\frac{1}{2}|BC| = |AB| \cdot \cos 40° \Leftrightarrow |BC| = 2 \cdot |AB| \cdot \cos 40°. \tag{5}$$

Sinusna teorema primijenjena na trougao $\triangle PBC$ daje

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{\sin 150°}{\sin 10°}. \tag{6}$$

Iz (4) i (5) dobijamo

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{2 \cdot |AB| \cdot \cos 40°}{\frac{|AB|}{2 \cdot \cos 20°}} = 4 \cdot \cos 20° \cos 40° \tag{7}$$

i konačno, uvažavajući (6) i (7), imamo

$$4 \cdot \cos 20° \cos 40° = \frac{\sin 150°}{\sin 10°} \Leftrightarrow 8 \cdot \cos 20° \cos 40° \sin 10° = 1 \Leftrightarrow \cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$$

(primijenili smo da je $\sin 10° = \cos 80°$ i $\sin 150° (= \sin 30°) = \frac{1}{2}$). Dobili smo lijep novi zadatak. ■

Rješenje 2. Dokažimo prvo da u trouglu $\triangle ABC$, sa dužinama stranica $|AC| = b$ i $|AB| = c$ i $\sphericalangle BAC = A$ i $\sphericalangle ABC = B$, vrijedi identitet

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sin A} - \operatorname{ctg} A.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} B &= \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sin A} - \operatorname{ctg} A \quad \left(\text{zbog } \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} \text{ prema sinusnoj teoremi i } \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{sinz}\right)\\
&= \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin C - \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}\\
&= \big(\text{zbog } A+B+C = 180^\circ \Longleftrightarrow C = 180^\circ-(A+B),\ \text{tj. } \sin C = \sin[180^\circ-(A+B)] = \sin(A+B)\big)\\
&= \frac{\sin(A+B) - \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B} = (\text{primjena adicione formule})\\
&= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B - \cos A \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} = \operatorname{ctg} B\,.
\end{aligned}$$

Primijenimo sada ovaj identitet za rješavanje našeg zadatka.

Tačke B, P i Q leže na istoj pravoj ako je $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABQ$. Neka je $|AC| = b = |AB|$. Sinusna teorema primijenjena na trougao $\triangle APC$ daje

$$\frac{|AP|}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ} \Longleftrightarrow |AP| = \frac{b \cdot \frac{1}{2}}{\cos 20^\circ} = \frac{b}{2 \cdot \cos 20^\circ}.$$

U trouglu $\triangle ABP$ je (prema dokazanom identitetu gore) vrijedi

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle ABP = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = \frac{b}{\frac{b}{2 \cdot \cos 20^\circ}} \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = 2 \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

S druge strane, u trouglu $\triangle AQC$ je $\dfrac{\overline{AQ}}{\sin 10^\circ} \cdot \dfrac{b}{\sin 150^\circ} \Longleftrightarrow \overline{AQ} = \dfrac{b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot b \cdot \sin 10^\circ$, a u trouglu $\triangle ABQ$ (identitet gore) je

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} \sphericalangle ABQ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{1}{\sin 80^\circ} - \operatorname{ctg} 80^\circ = \frac{b}{2 \cdot b \cdot \sin 10^\circ} \cdot \frac{1}{\cos 10^\circ} - \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{1}{2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{1-2\sin^2 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = (\text{zbog } 1-2sin^2 x = \cos 2x \text{ i } 2 \sin x \cos x = \sin 2x) = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ.
\end{aligned}$$

Dakle, $\sphericalangle ABQ = 20^\circ = \sphericalangle ABP$ i dokaz je završen.

Dalje, kao i u Rješenju 1, dobijamo jednakost

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8},$$

koju preporučujemo čitaocima da je dokažu i na neke druge načine.

Nadamo se da smo vas uvjerili u tačnost navoda iz uvoda.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *O udaljenosti nekih značajnih tačaka trougla*, Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] D. Bottema, i dr.: *Geometric Inequalities*, Wolters–Nordhoff Publishing, Gröningen, 1969.
[3] J. Carstesen, A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, Vol.1 (1997), No.2, 87-88.
[4] J. Carstesen, A. Muminagić: *Matematiske juveler*, 1. oplag 2006, Frederiksburg.
[5] A. Muminagić, J. Carstesen: *Geometrijski dokazi trigonometrijskih jednakosti*, Evolventa (JAMTK) 6(1)(2023), 10-17.
[6] R. Ibrahimefendić: *Osvrt na jedan zadatak sa više načina rješavanja*, Evolventa (JAMTK) 4(2)(2021), 12-21.
[7] D. Palman: *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
[8] Pavković – Veljan: *Elementarna matemaika* 2., Školska knjiga, Zagreb, 1995.

2

KUTAK ZA ZADATKE

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 23

Zabavna matematika: Pretakanja i mjerenja

Zadatak 1. *Imamo dva pješčana sata. Jedan od njih mjeri tačno 11 minuta, a drugi tačno 7 minuta. Možemo li izmjeriti kontinuirano vrijeme od 15 minuta samo pomoću ova dva sata?*

Zadatak 2. *Imamo šest izgledom identičnih novčića od kojih su četiri teški po 50 grama, a preostala dva su drugačije težine. Pri tome znamo da ta dva novčića zajedno teže 100 grama. Kako pomoću četiri mjerenja na vagi bez utega odrediti koji je od ovih "lažnih" novčića lakši, a koji je teži od 50 grama?*

Zadatak 3. *Imamo sedam novčić a od kojih su šest iste težine, a sedmi je različite težine od ostalih (ne znamo da li je lakši ili teži). Na raspolaganju nam je vaga bez utega.*

- *Pomoću tri vaganja odrediti "lažni" novčić.*
- *Da li pomoću dva vaganja možemo odrediti "lažni" novčić?*

Zadatak 4. *Deset ćupova su napunjeni zlatnicima. U devet ćupova su zlatnici težine po 9 grama, a u desetom ćupu su zlatnici teški po 10 grama. Ako imamo vagu sa utezima, kako pomoću jednog mjerenja utvrditi u kojem ćupu su teži zlatnici.?*

Zadatak 5. *Imamo posudu od 10 litara punu vode i još dvije posude od 7 i od 4 litra koje su prazne. Pretakanjem iz posude u posudu odmjeriti tačno 5 litara vode.*

Zadatak 6. *Imamo tri posude u kojima se nalaze različite količine vode. Nakon pretakanja 11 litara iz prve u drugu posudu, 5 litara iz druge u treću i 3 litra iz treće u prvu, u svakoj posudi je bilo po 20 litara vode. Pitanje je, koje su količine vode bile u posudama na početku?*

Ciljna skupina: svi uzrasti

EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 24

Nagradni zadatak: "Lažna" kuglica

Vaga (njem. *die Waage*), kantar (rum. *cântar*) ili terazije (tur. *terazi*) je mjerni instrument za mjerenje mase. Vage s oprugom mjere masu prema dužini istezanja opruge pod teretom. Balansne vage mjere masu uspoređujući moment sile poluge, na čijem je jednom kraju uzorak referentne mase, a na drugome mjerena količina.
Masa (engleski: mass) je jedna od sedam osnovnih veličina u Međunarodnom sistemu mjernih jedinica SI. Masa iskazuje tromost (inerciju) kojom se tijelo odupire promjeni kretanja. Zbog toga se često naziva i *troma masa.* Za ona tijela koja teže pokrećemo ili teže zaustavljamo ako se kreću, kojima teže mijenjamo brzinu i smjer kretanja, kažemo da imaju veću tromost od onih koje lakše pokrećemo i lakše im mijenjamo smjer i brzinu.
Mjerna jedinica za masu je kilogram (kg), a uobičajena oznaka u fizici za masu je m. Kilogram (kg) je masa prototipa koji je izrađen u obliku valjka, iz legure platine i iridija. Čuva se u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Servesu pokraj Pariza. Kilogram je jedina osnovna jedinica s prototipom, te jedina koja je definisana u odnosu na primjenu, a ne na neko temeljno fizikalno svojstvo.
Kilogram je izveden od jedinice gram (g), i prefiksa kilo u značenju: $1\,kg = 10^3\,g$. Manje jedinice izražavaju se dodatkom prefiksa jedinici gram, na primjer miligram je milioniti dio kilograma: $1\,mg = 10^{-6}\,kg$. Manje jedinice su pikogram, mikrogram, nanogram, miligram, centigram, decigam, gram, dekagram. Veća jedinica su tona, a mogu se dodavati i prefiksi kilo, mega, giga, tera itd.
Pojmovi težina i masa su različiti fizikalni pojmovi, što u svakodnevnom govoru često zanemarujemo. Masa je apsolutna veličina koja se mjeri vagom i izražava se u kilogramima, dok je težina ovisna o gravitaciji, mjeri se dinamometrom i izražava se u njutnima (N).

Zadatak. *Imamo dvanaest kuglica koje su po svemu identične, osim što je jedna od njih drugačije mase. Pri tome ne znamo da li je lakša ili teža od ostalih jedanaest. Na raspolaganju nam je vaga bez utega. Kako pomoću tri mjerenja odrediti koja je kuglica "lažna" i kakve je mase (da li je lakša ili teža od ostalih)?*

Za nagradni zadatak iz prethodnog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni.

Ciljna skupina: svi uzrasti
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.06.2025. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.