ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

UM TK

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126
Vol. 8, No. 1, TUZLA 2025.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Posebno izdanje
Posvećeno radu Prof. Dr. Mehmeda Nurkanovića

Vol. 8, No. 1, 2025.

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. ili direktno na https://evolventa.ba
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:	**Žiro račun udruženja:**
Univerzitetska 4, 75000	Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Tuzla, Bosna i Hercegovina	(za časopis)
Telefon: ++387 61 178 698	3383002261804115
Fax: ++387 35 320 861	(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Ovaj broj časopisa Evolventa predstavlja posebno izdanje i posvećen je jubileju kolege Prof. dr. Mehmeda Nurkanovića. Naime, profesor Nurkanović u septembru puni 65 godina života i preko četrdeset godina rada u oblasti matematike. U tom periodu profesor je dao veliki doprinos u području nauke, edukacije i promocije matematike, o čemu se može saznati više u posebnom članku ovog broja Evolvente.

Osim članka o životu i radu profesora Nurkanovića, ovaj broj Evolvente sadrži članke koje je do sada objavio profesor Nurkanović, sam ili sa saradnicima, u ovom časopisu.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa.* Pri tome se treba držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i profesorima osnovnih i srednjih škola te profesorima i asistentima s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, septembar 2025. godine.

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 2–7

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

U čast profesora Mehmeda Nurkanovića: Život posvećen matematici

Enes Duvnjaković[a]

[a] *Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet, Odsjek Matematika*

Prijatelja i kolegu Prof. Mehmeda Nurkanovića, poznajem još od daleke 1979. godine, kada smo, kao srednjoškolci, učestvovali na regionalnom takmičenju (on iz matematike i fizike, a ja iz fizike) i tom prilikom se kvalifikovali za učešće na republičkim takmičenjima. Kako smo i jedan i drugi upisali studij matematike na PMF-u Univerziteta u Sarajevu, prilično često smo se družili na fakultetu. Mehmed je bio student treće godine kada sam došao na fakultet i započeo studij. Svojim nesebičnim savjetima, iskustvom, znanjem i dobrom voljom, puno mi je pomogao da se u prvim mjesecima snađem, organizujem i lakše prebrodim prve ispite i nadvladam početni strah i tremu od studiranja matematike.

Poslije studija putevi su nam se nakratko razišli, ali se ponovo susrećemo u ratnom vihoru, kao saradnici na novoosnovanom Odsjeku matematike, Filozofskog fakulteta Univerziteta u Tuzli. Od tada, pa do danas (na Odsjeku matematika Prirodno-matematičkog fakulteta), radimo i sarađujemo zajedno pune 32 godine: zajedno smo bili u različitim izazovima, projektima i aktivnostima, od nauke, nastave, popularizacije matematike, seminarima, kolokvijima, takmičenjima i svemu drugome što nas je zateklo u tom prilično dugom periodu. Kada sa nekim radite i sarađujete toliko dugo, onda i upoznate čovjeka. Prof. Mehmeda Nurkanovića znam kao dobrog prijatelja, kolegu, saradnika, koji preko 40 godina vrijedno radi u matematici, na različitim poljima i aktivnostima, znam ga kao dobrog profesora, vrijednog naučnog radnika, koji je postigao vrhunske rezultate, kao velikog zaljubljenika u matematiku, gdje je u svakoj prilici popularizirao matematiku, širio njenu ljepotu i važnost u društvu. Na svemu tome, Meša, veliko ti HVALA.

Radna i životna biografija kolege i prijatelja Prof. Mehmeda Nurkanovića je zaista dojmljiva, te molim čitaoce ovog teksta da odvoje malo vremena i pročitaju kratak sažetak naučnog, profesorskog i životnog puta ovog velikog zaljubljenika u matematiku.

1. Edukacija i naučno-nastavna karijera Profesora Mehmeda Nurkanovića

Mehmed Nurkanović je rođen 1960. godine u Seoni kod Srebrenika, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu (1967-1975) pohađao je u Seoni i u Dubokom Potoku i završio je 1975. godine kao njen najbolji učenik u historiji škole. Zbog svojih kvaliteta predvodio je reprezentaciju škole na mnogim timskim takmičenjima i bio najzaslužniji što je škola u tom periodu bila najuspješnija na općini Srebrenik. Još tada se posebno isticao u matematici i učestvovao na pojedinačnom takmičenju učenika osnovnih škola osmih razreda na (regionalnom) nivou Sjeveroistočne Bosne, zauzevši treće mjesto. Ljubav prema matematici biće odlučujuća da se 1975. godine upiše u Tuzlansku matematičku gimnaziju (u okviru Gimnazije u Tuzli, danas Gimnazija "Meša Selimović"), koju završava 1979. godine, kao najbolji učenik generacije. U toku gimnazijskog školovanja naročito se isticao u matematici i fizici, postižući odlične rezultate na raznim takmičenjima iz ova dva predmeta (bio je jedan od najuspješnijih matematičara generacije u Bosni i Hercegovini). Na svim takmičenjima osvajao je uglavnom neko od prvih mjesta. Najznačajniji uspjesi na ovim takmičenjima bili su mu: prvo mjesto 1979. godine na regionalnom takmičenju učenika srednjih škola iz matematika, zatim drugog mjesta iz fizike (oblast elektricitet i magnetizam u 3. razredu, 1978. godine) i trećeg mjesta iz matematike (u 4. razredu, 1979. godine) na nivou Bosne i Hercegovine. Bio je jedan od pet najuspješnijih rješavatelja konkursnih zadataka iz matematike i fizike u bivšoj Jugoslaviji i zbog toga tri godine uzastopno novčano nagrađivan od strane "Matematičko-fizičkog lista" iz Zagreba (stručnog časopisa za učenike i nastavnike matematike srednjih škola).

Po završetku gimnazije upisuje se na Prirodno-matematički fakultet u Sarajevu, Odsjek za matematiku, smjer opći. Studij završava 1983. godine (u rekordnom roku – tri dana manje od četiri godine), sa prosječnom ocjenom 9,68 (kao student sa najboljom prosječnom ocjenom u generaciji na PMF-u i jedan od pet najuspješnijih studenata generacije Univerziteta u Sarajevu), stekavši zvanje *diplomirani matematičar.* Za odličan uspjeh u toku studija bio je nagrađen Zlatnom značkom Univerziteta u Sarajevu, kao i Srebrnim značkama za svaku godinu studija posebno. Seminarski rad (koji je u to vrijeme bio zamjena diplomskog rada) "*Elementi nelinearne funkcionalne analize*" radio je kod prof. dr. Kalmi Fincija. Takođe je bio i učesnik seminara "Fourier-ova analiza", koji je vodila prof. dr. Naza Tanović-Miller.

Postdiplomski studij započinje na Matematičkom fakultetu u Beogradu, naučni smjer. Naziv postdiplomskog studija bio je *"Teorija sumabilnosti"*. Zbog poznatih ratnih djejstava postdiplomski studij okončava na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu 1997. godine, odbranivši magistarski rad pod nazivom *"Teorija malih talasa"*, a pod mentorstvom prof. dr. Muharema Avdispahića i stiče zvanje *magistra matematičkih nauka.*

Od ljeta 2000. godine, aktivno sarađujuci s prof. dr. Mustafom Kulenovićem, profesorom na University of Rhode Island u SAD-u, područje njegovog zanimanja postaje asimptotska analiza diferentnih jednadžbi i diskretnih dinamičkih sistema. Kao rezultat te saradnje nastaje i doktorska disertacija pod nazivom *"Asimptotsko ponašanje rješenja nekih dvodimenzionalnih sistema diferentnih jednadžbi sa primjenama"*, koju je uspješno odbranio 30.10.2002. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu (Odsjek za matematiku) u Sarajevu, čime je stekao zvanje *doktora matematičkih nauka.*

Rezultati dobijeni u doktorskoj disertaciji publicirani su u obliku pet naučnih radova objavljenih u pet prestižnh matematičkih naučnih časopisa u svijetu. Osim toga, u knjizi: M.R.S. Kulenović and O. Merino, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 2002., citirana su dva naučna rada u kojima je koautor (str. 334 pod oznakama : [KN1] i [KN2]). Takoder, na str. 151 i 152 navedena su dva značajna rezultata iz tih radova u obliku dva teorema, koji se javljaju i u njegovoj doktorskoj disertaciji.

Profesor Mehmed Nurkanović je stekao višegodišnje radno iskustvo u nastavno-naučnom radu, kao i rukovodno iskustvo u privredi. Radio je kao profesor matematike u Srednjoškolskom centru u Srebreniku u periodu od oktobra 1983. do januara 1987. godine, a od 1987. godine do 1990. godine kao **rukovodilac** Službe AOP (automatska obrada podataka) u trgovinskom preduzeću "Velma" u Brčkom (Služba je opsluživala oko 1200 radnika iz 9 različitih trgovinskih djelatnosti (OOUR-a) i računovodstveno finansijski sektor). U tom periodu stiče ogromno iskustvo u oblasti programiranja i projektovanja na računarima, što će rezultirati izradom većeg broja značajnijih zajedničkih i samostalnih projekata i programskih paketa (odnosno softvera ekonomskog tipa – robno i finansijsko poslovanje).

U zvanje asistenta na predmetu Matematika na Tehnološkom fakultetu Univerziteta u Tuzli izabran je 1984. godine (bez zasnivanja radnog odnosa), a od 1987. godine pa do 1991. godine u svojstvu vanjskog saradnika izvodio je vježbe na predmetu Matematika i na Fakultetu elektrotehnike i mašinstva u Tuzli. Od aprila 1990. godine do početka rata u Brčkom (kraj aprila 1992. godine) radi kao asistent na predmetima Matematika i Programiranje i programski jezici na Ekonomskom fakultetu u Brčkom. Nakon formiranja Ekonomskog fakulteta u Tuzli, u ljeto 1992. godine, na ovom fakultetu nastavlja obavljati poslove asistenta na istim predmetima.

Vrijeme agresije na Bosnu i Hercegovinu proveo je sa svojom porodicom u Seoni (do kraja 1994. godine) i u Tuzli (od početka 1995. godine). Zbog ratnih djejstava bio je prinuđen s porodicom napustiti Brčko krajem aprila 1992. godine. Sve vrijeme rata bio je pripadnik Armije RBiH, ali je istovremeno obavljao i poslove asistenta na Ekonomskom fakultetu, kao i na tek formiranom Odsjeku za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Tuzli.

U zvanje višeg asistenta na predmetu Matematika na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Tuzli izabran je 16.06.1998. godine, gdje radi do februara 2003. godine. Nakon toga prelazi na Odsjek matematika na novoformiranom Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli. S obzirom na nastalu situaciju tokom rata i poslije, u periodu od 1994. do 2002. godine, bilo mu je povjereno izvođenje nastave na Odsjeku matematika-fizika Filozofskog fakulteta u Tuzli, kao i na Tehnološkom fakultetu iz više predmeta. Paralelno s tim, zajedno sa suprugom radi na razvoju aplikacionog softvera robno-finansijskog poslovanja za više istaknutih preduzeća i kompanija (Murex Špionica, JATA Srebrenik, JKP Srebrenik, JP Vodovod Srebrenik, Voćar Srebrenik, kao i više manjih privatnih firmi). U to vrijeme uspio je napraviti *softver za automatska knjiženja* i time bio prvi u Bosni i Hercegovini koji je uveo to kao ideju, ali i realizirao je.

U zvanje docenta za užu naučnu oblast "Matematička analiza" izabran je 19.02.2003. godine. U zvanje vanrednog profesora izabran je 22.01.2008. godine na istu oblast, a u zvanje **redovnog profesora** za užu naučnu oblast "Teorijska matematika" izabran je 22.01.2014. godine.

Od izbora u nastavničko zvanje bio je nastavnik na više predmeta na Odsjeku matematika na PMF u Tuzli : Matematička analiza I, Matematička analiza II, Integralni račun, Diferentne jednadžbe, Obične diferencijalne jednadžbe, Kompleksna analiza, Uvod u linearnu algebru i teoriju polinoma, Analitika geometrija, Elementarna algebra, Elementarna matematika sa stanovišta više matematike, Historija i filozofija matematike, Matematika za nadarene te Diskretni dinamički sistemi (PMF), Primijenjena matematika (Tehnološki fakultet), Matematika I i Matematika II (RGGF), Matematika za ekonomiste (Ekonomski fakultet). Također, bio je nastavnik na predmetima Diferentne jednadžbe i Teorija malih talasa (Wavelets) na postdiplomskom studiju "Primijenjena matematika" Odsjeka matematika na PMF u Tuzli (ak. 2003/04. i 2004/05. god.), te na predmetima Diskretni dinamički sistemi i Diferentne jednadžbe, Neke specijalne jednadžbe i Posebni aspekti rada s učenicima (ak. 2008/2009.g.), kao i na predmetu Inžinjerska statistika s teorijom vjerovatnoće na postdiplomskom studiju na RGGF (ak. 2008/2009.g.). U okviru II ciklusa studija na Odsjeku matematika PMF u Tuzli izvodio je nastavu na predmetima : Diskretni dinamički sistemi (ak. 2011/12.g.), Dinamički sistemi (ak. 2012/13.g) i Odabrana poglavlja matematičke analize (ak. 2011/12. I 2012/13.g.), te na II ciklusu studija Ekonomskog fakulteta u Tuzli na predmetu Matematika za ekonomiste (ak. 2012/13.g.) i na II ciklusu studija Odsjeka za matematiku i fiziku Pedagoškog fakulteta u Bihaću na predmetu Matematičke metode u fizici. Osim toga, bio je predavač na predmetu Matematika sa statistikom na Agromediteranskom fakultetu Univerziteta Dž. Bijedić u Mostaru, šk. 2004/05. god., i tri godine predavač na predmetima Matematička analiza III, Matematička analiza IV i Metodika nastave matematike na Pedagoškom fakultetu Univerziteta u Bihaću i na predmetu Matematika na Biotehničkom fakultetu u Bihaću, predavač na predmetu Matematika za ekonomiste na Ekonomskom fakuktetu u Mostaru i na Mašinskom fakultetu u Zenici na predmetu Numeričke metode, te na predmetima Diferencijalna geometrija i Numerička matematika II na I ciklusu i Dinamički sistemi i Funkcionalna analiza na II ciklusu studija matematike i informatike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zenici. Izvodio je nastavu iz predmeta Numerička matematika i statistika (Doktorski studij – Hidrotehnika, RGGF Univerziteta u Tuzli) dvije akademske godine uzastopno.

2. Naučni i stručni istraživački rad Profesora Mehmeda Nurkanovića

Profesor Mehmed Nurkanović je u svojoj 45-togodišnjoj naučnoj i nastavnoj aktivnosti dao izuzetan doprinos u razvoju matematike kao nauke i kao struke na prostoru Bosne i Hercegovine, ali i šire. On je svoj naučni rad prvenstveno usmjerio u razvoj važnih i savremenih oblasti matematičke analize kao što su diferentne jednadžbe i diskretni dinamički sistemi, uključujući teoriju stabilnosti, asimptotsko ponašanje, teoriju oscilacija, bifurkacionu teoriju, egzistenciju haosa, monotone diskretne dinamičke sisteme, normalne forme itd. Diferentne jednadžbe omogućavaju precizno predviđanje kako se neki procesi razvijaju u vremenu, i često se koriste za modeliranje fizičkih, ekonomskih i bioloških fenomena. Istraživanje Prof. Nurkanovića u ovom području obuhvata kako apstraktne matematičke aspekte ovih jednadžbi, tako i konkretne primjene koje mogu unaprijediti razumijevanje i rješavanje realnih problema.

Njegova istraživanja su dala značajan doprinos razumijevanju diskretnih dinamičkih sistema, koji predstavljaju modele sistema čiji se razvoj mijenja u diskretnim vremenskim intervalima. Diskretni sistemi se često koriste za modeliranje procesa koji se razvijaju korak po korak, kao što su evolucija populacija, ekonomija, ili čak složeni algoritmi u računarstvu. On je istraživao stabilnost i egzistenciju različitih tipova bifurkacija i haosa u diskretnim dinamičkim sistemima, fokusirajući se na to kako male promjene u početnim uvjetima mogu utjecati na dugoročni razvoj sistema. Ova istraživanja su važna jer omogućavaju bolje razumijevanje predvidljivosti ili nepredvidljivosti ponašanja sistema, što je ključno u mnogim primjenama. U okviru diskretnih dinamičkih sistema, pojam oscilacija ili periodičnosti je posebno značajan jer se odnosi na situacije u kojima sistem, iako se razvija kroz vrijeme, zapravo pokazuje repetitivne ili ciklične obrasce. Prof. Mehmed je analizirao mnoge modele koji omogućavaju identifikaciju i analizu ovih periodičnih ponašanja u različitim primjenama. Jedan od ključnih aspekata njegovog istraživanja je njegov metodološki pristup, koji obuhvata matematičku analizu, kao i primjenu savremenih numeričkih tehnika za analiziranje složenih diskretnih dinamičkih sistema. Kroz svoja istraživanja, prof. Nurkanović je povezivao apstraktne teorije sa praktičnim primjenama, što je omogućilo da se njegov rad primijeni u širokom spektru naučnih disciplina, od matematičke biologije i fizike, do ekonomije i inženjeristva. Tako je, na primjer, pokazao da se primjenom diferentnih jednadžbi u modeliranju epidemija ili razvoja populacija može pomoći u predviđanju budućih tokova bolesti, dok modeli diskretnih sistema mogu pružiti alate za razumijevanje ekonomske dinamike i određenih efekata u tržištima (primjeri kooperativnih i kompetitivnih diskretnih modela).

Osim toga, treba istaknuti značajan doprinos Prof. Mehmeda u teoriji linearnih diferentnih jednadžbi, što se može vidjeti iz nekoliko naučnih radova i posebno iz dvije njegove knjige na tu temu (za koje treba napomenuti da su prve knjige o diferentnim jednadžbama na prostorima južnoslovenskih jezika).

Prof. Mehmed je do sada objavio ukupno 45 naučnih radova u različitim međunarodnim i domaćim naučnim časopisima i 3 naučna rada objavljena u Zborniku radova s matematičke konferencije. Od toga su 22 naučna rada u naučnim časopisima indeksiranim u bazama ***Current Contents (CC), Science Citation Index (SCI)***, to jest ***Web of Science (WoS)*** te 16 naučnih radova objavljenih u naučnim časopisima indeksiranim u bazama ***Mathematical Reviews, Zentralblatt für Mathematik, Scopus*** i slično (detaljnije na njegovoj web stranici: `https://mehmednurkanovic.com/`).

Svoje radove Prof. Mehmed je izlagao (ili su izlagali koautori) na 19 međunarodnih konferencija i matematičkih naučnih skupova, kako u BiH tako i u inozemstvu (Njemačka i SAD), te u 10 navrata na matematičkim naučnim kolokvijima nekoliko univerziteta u BiH i Hrvatskoj. Njegovi naučni radovi su do sada citirani u svijetu u 669 drugih naučnih radova (podatak sa Google Scholar, 01.09.2025.g. `https://scholar.google.com/citations?user=pqOYDPoAAAAJ\&hl=hr`(Mehmed Nurkanovic (ORCID: 0000-0003-0202-0390)? - Google znalac))), te u jednoj knjizi iz oblasti diferentih jednadžbi, kao i u više magistarskih radova i doktorskih disertacija (BiH, Turskoj i USA).

On je također uspješno učestvovao u realizaciji 12 naučno-istraživačkih projekata (od toga 4 u ulozi voditelja projekta).

Professor Mehmed je autor ili koautor 2 univerzitetska udžbenika (*Diferentne jednadžbe – Teorija i primjene* i *Matematika za ekonomiste*), 3 naučno-stručne knjige (*Linearne diferentne jednadžbe – Teorija i zadaci s primjenama*, *Laplaceova transformacija i primjena* te *Elementarna matematika – Teorija i zadaci*), 1 poglavlja u knjizi na engleskom jeziku izdavača iz Indije i UK te 2 zbirke zadataka iz matematike, kao i tri skripte za studente Matematike na fakultetu.

U okviru stručno-istraživačkog rada istaknimo da je Prof. Mehmed autor ili koautor 19 stručnih i stručno-istraživačkih radova objavljenih u domaćim i stranim časopisima. Osim toga, učestvovao je kao predavač na preko trideset seminara za nastavnike i profesore matematike Federacije Bosne i Hercegovine. Također, bio je recenzent 16 knjiga i udžbenika iz matematike, te 8 univerzitetskih udžbenika. Također je bio recenzent u 17 međunarodnih naučnih časopisa od kojih je većina indeksirana u WoS (SCIE i CC), zatim je bio recenzent jednog znanstvenog projekta iz polja matematike za Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa R Hrvatske, kao međunarodni ekspert. Bio je i recenzent nastavnog plana i programa za novi smjer na FAMNIT Univerziteta u Kopru (R. Slovenija) i tri nova nastavna plana i studijska programa na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku (R. Hrvatska) – u dva navrata.

Također, preko Udruženja matematičara TK bio je voditelj nekoliko projekata organiziranja Federalnog takmičenja iz matematike za učenike osnovnih škola.

Treba istaknuti da je Prof. Mehmed do sada dao značajan doprinos u podizanju nastavnog i naučno-istraživačkog kadra. Bio je mentor pri izradi 2 doktorske disertacije i komentor jedne doktorske disertacije. Također je bio i mentor pri izradi 9 magistarskih radova te mentor pri izradi 43 diplomska rada studentima Odsjeka matematika PMF i Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Tuzli i Pedagoškog fakulteta u Bihaću. Bio je i član komisija za odbranu više magistarskih radova (na PMF i RGGF Univerziteta u Tuzli), predsjednik komisije pri odbrani više magistarskih radova (na PMF u Sarajevu i na PMF u Tuzli), te član komisije pri odbrani četiri doktorske disertacije na PMF u Sarajevu i predsjednik ili član komisije pri odbrani tri doktorske disertacije na PMF u Tuzli.

3. Uredništvo u naučnim i stručnim časopisima

Profesor Mehmed Nurkanović je od 2015. godine *urednik* u naučnom časopisu *"Sarajevo Journal of Mathematics"*, čiji je izdavač ANUBiH, a od 2025. godine je njegov *tehnički urednik* (managing editor). U naučnom časopisu *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* je bio*Review Editor for Dynamical Systems* (od 2023. do jula 2025.), a sada je *Communication Reviewer* (od jula 2025).

U naučnom časopisu `https://www.hindawi.com/journals/ddns/si/612058/`*Discrete Dynamis in Nature and Society' bio je gost urednik specijalnog izdanja (Special Issue) : Stability and Bifurcation Analysis of Discrete Dynamical Systems (2021. godine).* Također je u naučnom časopisu *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol. 18, No. 1 (`http://www.anubih.ba/Journals/sjmath.html`), bio *glavni urednik* s Acc. Mirjanom Vuković specijalnog izdanja: *Special issue dedicated to Professor Mustafa Kulenović on the occasion of his 70th birthday* (2022. godine). Zajedno s Acc. Mirjanom Vuković bio je i*glavni urednik* Zbornika radova: *Proceedings of the Conference on March 14 – International Day of Mathematics*(Academy of Sciences and Arts of Bosnia and Herzegovina, 2024. godine) `https://bastina.anubih.ba/items/8e7e3767-8928-477a-9162-aa520a7d5117`.

Profesor Mehmed je bio član Uređivačkog odbora *Zbornika radova PMF – Svezak Matematika* (2004. g.) i *odgovorni urednik* tog časopisa (2004.-2010.). Također je bio jedan od *urednika* stručnog matematičkog časopisa *TRIANGLE* (svo vrijeme njegovog izlaženja, 1996.-2003. godine), časopisa za učenike i nastavnike osnovnih i srednjih škola u BiH.

Profesor Mehmed je *glavni urednik* stručno-metodičkog časopisa *"Evolventa"* (od 2018. godine), čiji je izdavač Udruženje matematičara TK.

4. Ostale aktivnosti

Profesor Mehmed je u više navrata bio član Centralne državne i član ili predsjednik federalne Takmičarske komisije (matematika) za osnovne i srednje škole, a u periodu 2006.-2014. godine bio je voditelj Federalnog takmičenja iz matematike za učenike osnovnih škola. Bio je član rukovodstva reprezentacije mladih matematičara BiH na 39. Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi (IMO) koja je održana u Tajpehu na Tajvanu, 1998. godine.

Uspješno je organizirao "Zimsku školu matematike – Srebrenik" (i rukovodio školom) u dva navrata, zatim "Zimsku školu matematike: Maglaj – Tešanj - 2008", te pet puta " Zimske škole matematike" na PMF-u Tuzli. Školu su pohađali najbolji matematčari osnovnih i srednjih škola navedenih općina, odnosno cijelog Tuzlanskog kantona. Ta je škola dala odlične rezultate, a jedan od njih je i činjenica da su mnogi od polaznika te škole upisali studij matematike i da su bili među najboljim studentima.

U jednom mandatu je obavljao funkciju **Šefa** Odsjeka matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Tuzli. Bio je i **voditelj** Matematičkog (naučnog) Kolokvija Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta u Tuzli tri akademske godine, zatim voditelj Trogodišnjeg vanrednog studija na odsjeku matematika.
Također, bio je vrlo aktivan član Predsjedništva *Udruženja matematicara BiH*(dok je ono egzistiralo), a sada je aktivni član jednog domaćeg i jednog međunarodnog strukovnog udruženja : *Udruženja matematičara TK* i ISDE (*International Society of Difference Equations*) i od 12.04.2007. godine (od osnivanja) pa do novembra 2017. godine bio je *predsjednik* Udruženja matematičara TK. Bio je predsjednik Komisije za polaganje maturskog ispita (eksterna matura) iz Matematike za učenike gimnazija s područja TK (2006. – 2018.).

5. Nagrade i priznanja

Prof. Mehmed Nurkanović je dobitnik nekoliko nagrada i priznanja za svoj naučni i ukupni rad od kojih izdvajamo sljedeće:

- **Zlatna značka Univerziteta u Sarajevu** (1983.) – za odličan uspjeh u toku četiri godine studija (prosječna ocjena 9,68). Dobitnik priznanja kao najbolji student u svojoj generaciji na Odsjeku za matematiku PMF u Sarajevu (1983. g.) i jedan od pet studenata s najboljim prosjekom u generaciji na cijelom Univerzitetu u Sarajevu, a studij matematike okončan u rekordnom roku (tri dana prije 4 godine).
- **Srebrna značka Univerziteta u Sarajevu (za svaku godinu studija)** – za odličan uspjeh.
- **Povelja Grada Srebrenika za 2025. g.**– za doprinos u razvoju promocije obrazovanja i nauke, kao i značajan doprinos u odbrani BiH.
- Veći broj diploma i novčanih nagrada za osvojeno neko od prva tri mjesta na takmičenjima u matematici i fizici u srednjoj i osnovnoj školi u BiH na raznim nivoima.
- Novčane nagrade od strane *"Matematičko-fizičkog lista"* iz Zagreba (stručnog časopisa za učenike i nastavnike matematike srednjih škola) kao jedan od pet najuspješnijih rješavatelja konkursnih zadataka iz matematike i fizike u bivšoj Jugoslaviji: 2x1500 din (1978. i 1979.).
- **'98 Taiwan (ROC) 39th International Mathematical Olympiad AWARD** - za učešće kao pratilac reprezentacije BiH.
- **ZAHVALNICA Udruženja matematičara u Srednjobosanskom kantonu/kantonu Središnja Bosna** - za izuzetno veliki doprinos u razvoju matematike na prostoru Srednjobosanskog kantona (20.01.2020.).

6. Sretan jubilej, Profesore Mehmede!

Dragi kolega Mehmede,

Proveo si preko 40 godina rada u matematici, na različite načine, sa velikim uspjehom i rezultatima. Sretan ti jubilej i nadam se da ćeš i dalje nastaviti sa istim entuzijazmom da radiš i da ćemo zajedno još mnogo dobrih stvari uraditi i u matematici i u životu.

Uskoro puniš i 65 godina života, nek ti je sretno, ali se nadam da te to neće sprijeciti da i dalje promičemo matematiku i vrijednosti koje ona donosi i pojedincu i cijelom društvu.

Još je mnogo lijepih izazova pred tobom i pred svima nama.

Dobro ti zdravlje i puno sreće u radu i životu.

Idemo dalje !!!

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 8–11

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Diracov problem

Mehmed Nurkanović[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U ovom radu je razmatran poznati Diracov problem o tri ribara. Rješenje problema je određeno metodom diferentnih jednadžbi, uzimajući još u obzir i zahtjeve nenegativnosti i cjelobrojnosti. Također je dato i rješenje općenitog Diracovog problema.

Paul Adrien Maurice Dirac, veliki britanski fizičar, rođen je 08.08.1902. godine u Bristolu, Engleska, a umro 20.10.1984. godine u Tallahasseeu, SAD. Otac mu je bio Švicarac, a majka Engleskinja. Najprije je studirao i diplomirao električni inženjering na Sveučilištu u Bristolu, gdje je započeo i studij matematike koji je kao student-istraživač, završio 1926. godine. Matematiku je najprije studirao na Sveučilištu u Bristolu, a kasnije je studij nastavio na Cambridgeu gdje je diplomirao 1926. godine. Tu će i predavati sve do mirovine, u koju odlazi 1969. godine. Naredne godine je postao jedan od predavača na St.John's College, a 1932. godine postaje profesor matematike na Cambridgeu.

Diracov rad bio je koncentriran na matematičke i teorijske aspekte kvantne mehanike. 1926. godine, ubrzo nakon Nielsa Bohra, razvio je opću teorijsku strukturu za kvantnu mehaniku, a 1928. godine uspio je stvoriti relativistički oblik teorije, odnosno relativističku kvantnu mehaniku koja je opisivala svojstva elektrona i ispravila neuspjeh Schrödingerove teorije pri objašnjavanju spina elektrona. Teorijski je zaključio da postoje antičestice "antielektroni", odnosno pozitivno naelektrizirani elektroni koji su kasnije nazvani pozitroni. Njihovo postojanje je potvrdio i C. D. Anderson 1932. godine. Susret elektrona i pozitrona dovodi do anihilacije (poništenja) ove dvije antičestice te do oslobađanja energije u obliku dva fotona (gama zračenja). Također, po Diracovoj teoriji i sve druge čestice imaju svoj anti-par ili antičesticu. Godine 1930. Paul Dirac je objavio Principe kvantne mehanike (eng. The Principles of Quantum Mechanics), djelo koje je potvrdilo njegov ugled Newtona 20. stoljeća, a 1933. godine je dobio *Nobelovu nagradu* za fiziku koju je dijelio s Erwinom Schrödingerom.

Bitno je uočiti da je Dirac do svog velikog otkrića došao zahvaljujući njegovoj vjeri u povezanost matematike s fizikom i ispravnost matematičkih rezultata čak i kad oni u datom trenutku nemaju fizikalnog smisla (budući da se može raditi o novim, do tada fizici nepoznatim, pojmovima). On je maestralno postavio matematičku jednadžbu čija rješenja u tom trenutku nisu imala fizikalnog smisla, ali su opisivala nepoznatu česticu koja se ne razlikuje od elektrona osim u suprotnom (pozitivnom) električnom naboju iste veličine. Zahvaljujući upravo ovakvom "slobodnom" promišljanju za njega (u mladosti) je vezan i legendarni problem o tri ribara, koji se u različitim oblicima pojavljivao u mnogim naučno-popularnim knjižicama.

1. Diracov problem o tri ribara

Tri ribara su lovila ribu jedne tamne noći. Nakon što su se umorili oni su legli i zaspali, ne podijelivši ulov. U zoru se jedan od njih probudio i, ne želeći da budi drugove, podijelio je ribe na tri jednaka dijela i

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Prezentovano na: Seminar Fojnica 2015 (UMTK)
Rad preuzet: 2017.
Email adresa: mehmed.nurkanovic@untz.ba (Mehmed Nurkanović)

uzevši svoj dio, otišao je kući. Prilikom dijeljenja riba uočio je da mu je jedna riba suvišnom te ju je bacio u more. Nakon toga probudio se drugi ribar. Ne znajući da je prvi ribar otišao zajedno sa svojim dijelom, on je također podijelio ribe na tri dijela, pri čemu je jednu trećinu odabrao za sebe i otišao. Pri tome je i njemu pri dijeljenju jedna riba bila suvišnom te ju je bacio u more. Konačno se probudio i treći ribar. Ne znajući šta su uradila druga dva ribara i on je postupio na isti način: podijelio je ribe na tri dijela, uzeo sebi jednu trećinu i pri tome također bacio jednu ribu u more koja mu je pri podjeli bila suvišnom. Postavlja se pitanje: koliko je ukupno riba bilo ulovljeno?

DIRACOV ODGOVOR
"Bilo je ulovljeno ... minus dvije ribe!"

Lahko je provjeriti da je u ovom, neobičnom i smjelom odgovoru (kako i priliči Diracu) formalno sve ispravno. Naime, prvi ribar, zaključivši da ima minus (!) dvije ribe, jednu ribu "baca" u more i od preostale (-3) ribe uzima jednu trećinu, tj. (-1) ribu. Na taj način ponovo ostaje (-2) ribe, te onda isti postupak prave i ostala dva ribara.

Zaista bi teško bilo naći jednostavniji i elegantniji primjer koji bi tako dobro ilustrirao odvažne ideje i vjeru u "neshvatljivu efektivnost matematike u prirodnim naukama" (kako se izrazio drugi nobelovac, američki fizičar U. Vinger), osobine tako svojstvene savremenoj fizici i fizičarima.

Međutim, Diracov problem o ribarima je zanimljiv sam po sebi. Pokušajmo ga riješiti tako što ćemo uvjete zadatka prevesti u matematički model, tj. na jezik jednadžbi.

Neka je:

- $N = N_0$ - količina svih ulovljenih riba,
- N_1 - količina riba koje ostaju nakon prvog dijeljenja,
- N_2 - količina riba koje ostaju nakon drugog dijeljenja,
- N_3 - količina riba koje ostaju nakon trećeg dijeljenja.

Tada je očigledno:

$$N_1 = \frac{2}{3}\left(N_0 - 1\right)$$

i općenito:

$$N_{k+1} = \frac{2}{3}\left(N_k - 1\right), \quad k = 0, 1, 2. \tag{1}$$

Uočimo da je jednadžba (1) *linearna diferentna jednadžba prvog reda*, koja se može eksplicitno riješiti, tj. može se dobiti zatvorena formula za svaki član niza N_k, $k = 1, 2, 3, ...$, znajući početni član niza N_0. Dakle, jednadžba (1) u općenitom smislu, bez dodatnih ograničenja, ima beskonačno mnogo rješenja.

Za početak riješimo zadatak bez ograničenja *nenegativnosti (!)*. Pretpostavimo prvo da su svi N_k, $k = 1, 2, 3, ...$ jednaki jednom te istom broju D. Tada bismo imali

$$D = \frac{2}{3}\left(D - 1\right),$$

odakle je $D = -2$, što je "Diracovo rješenje".

No, podsjetimo se ukratko na način rješavanja linearne diferentne jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima (v. [2], [3]), jer je upravo takva jednadžba (1).

Teorem 1.1. *Općenita linearna diferentna jednadžba s konstantnim koeficijentima*

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

u slučaju $a \neq 1$ ima rješenje:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Poredeći jednadžbe (1) i (2), vidimo da je u jednadžbi (1):

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{2}{3},$$

pa je njeno rješenje (koristeći formulu (3)) dato sa:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \ ,$$

odnosno

$$N_k = (N_0 + 2)\left(\frac{2}{3}\right)^k - 2, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Riješimo sada Diracov problem uz uvjete *nenegativnosti* i *cjelobrojnosti*, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

  N_k za $k = 0, 1, 2, 3$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $3^3 \mid (N_0 + 2)$, odnosno ako i samo ako je

  $$N_0 = 27n - 2, \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

- *Nenegativnost:*

  Broj N_3, što znači i N_k za $k = 0, 1, 2$, će biti nenegativni ako je

  $$N_3 = 27n \cdot \frac{8}{27} - 2 = 8n - 2 \geq 0 \ ,$$

  odnosno ako je $n \geq 1$.

Specijalno, najmanje nenegativno rješenje $N_{\min} = N_{0\,\min} = 25$ se dobija za $n = 1$, dok se za $n = 0$ dobije Diracovo rješenje $N = -2$. Interesantno je primijetiti da je

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \lim_{k\to\infty}\left[(N_0 + 2)\left(\frac{2}{3}\right)^k - 2\right] = -2 \ ,$$

za bilo koje $N_0 = N$.

Razmotrimo sada Diracov problem u općenitoj formi.

2. Općeniti Diracov problem

Neka je ribara bilo r i pri svakom dijeljenju na r jednakih dijelova neka su oni bacali q suvišnih riba u more ($q < r$). Koliko je u ovom slučaju bilo ulovljenih riba (u realnom smislu, tj. uključujući uvjete cjelobrojnosti i nenegativnosti)?

Odgovarajući matematički model (oznake imaju značenje kao i u slučaju osnovnog Diracovog problema) je oblika:

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(N_k - q) \ ,$$

odnosno

$$N_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)N_k - \left(1 - \frac{1}{r}\right)q, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

U posljednjoj jednadžbi (5) je

$$a = 1 - \frac{1}{r}, \quad b = -\left(1 - \frac{1}{r}\right) q \ ,$$

pa, koristeći formulu (3) za rješenje diferentne jednadžbe, imamo:

$$N_k = \left(N_0 - \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k + \frac{-\left(1 - \frac{1}{r}\right) q}{1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \ ,$$

odnosno:

$$N_k = \left[N_0 + q\left(r-1\right)\right] \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k - q\left(r-1\right), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Riješimo sada općeniti Diracov problem uz uvjete nenegativnosti i cjelobrojnosti, tj. zahtijevajmo da su N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ cijeli nenegativni brojevi.

- *Cjelobrojnost:*

  N_k za $k = 0, 1, 2, ..., r$ će biti cijeli brojevi ako i samo ako $r^r \mid \left[N_0 + q\left(r-1\right)\right]$, odnosno ako i samo ako je

  $$N_0 = nr^r - q\left(r-1\right), \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

- *Nenegativnost:*

  Broj N_r, što znači i N_k za $k = 0, 1, ..., r-1$, će biti nenegativni ako je

  $$N_r = nr^r \cdot \frac{\left(r-1\right)^r}{r^r} - q\left(r-1\right) = n\left(r-1\right)^r - q\left(r-1\right) \geq 0 \ ,$$

  odnosno ako je $n \geq \dfrac{q}{\left(r-1\right)^{r-1}}$ i $n \in \mathbb{Z}$.

Literatura

[1] I. Kamishko: *Paul Dirac and the problem of three fishermen*, Kvant, 9 (1982), 3p (in Russian).
[2] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci sa primjenom*, PrintCom, Tuzla 2016.
[4] http://hr.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 12–24

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se detaljnije razmatraju iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, sa i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Praksa pokazuje da su iracionalne jednadžbe i nejednadžbe možda i najkompliciranije od svih jednadžbi i nejednadžbi elementarne algebre. Naime, razlog za to je nepostojanje općeg postupka za njihovo rješavanje. Tako je moguće riješiti samo neke jednostavne tipove iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, dok je bilo kakav pokušaj njihove klasifikacije prema načinu rješavanja relativno vrlo složen. U ovom radu bit će ipak napravljena osnovna klasifikacija ovih jednadžbi prema načinu rješavanja (s parnim ili neparnim korijenima) i date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Treba istaknuti da se vrlo često ove jednadžbe i nejednadžbe pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola i obično veoma mali broj takmičara uspije da ih riješi. Poseban problem je ako se zahtijeva diskusija rješenja iracionalne jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

2. Iracionalne jednadžbe

Definicija 2.1. *Jednadžba u kojoj se nepoznanica javlja i pod korijenom naziva se* ***iracionalnom*** *jednadžbom.*

Korijen se u tom slučaju uzima samo kao aritmetički.

Osnovni metod za rješavanje iracionalnih jednadžbi je metod eliminacije korijena. Taj metod se sastoji u tome da se jednadžba algebarskim transformacijama (prije svega stepenovanjem) svede na jednadžbu u kojoj se nepoznanice ne pojavljuju pod znakom korijena. Međutim, stepenovanje ne dovodi uvijek do ekvivalentne jednadžbe, već do jednadžbe koja je samo posljedica polazne.

Primjer 2.2. *a) Jednadžba $\sqrt{x} = -1$ nema rješenja (u skupu realnih brojeva), ali se nakon kvadriranja dobije $x = 1$.*

b) $\sqrt{x} = x - 2 \Longrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow (x = 1 \vee x = 4)$. Provjerom ustanovimo da $x = 1$ nije rješenje polazne jednadžbe, već samo $x = 4$.

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: juni 2019.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad

a) ***Iracionalne jednadžbe s neparnim korijenima***

Pri rješavanju ovakvih jednadžbi (da bismo se "oslobodili" korijena) koristimo se sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne za neparan broj n $(n \in \mathbb{N})$.

Kada se radi s iracionalnim jednadžbama s trećim korijenima ili korijenima višeg reda, postupak racionalizacije (tj. oslobađanja od korijena) obično dovodi do vrlo složenih jednadžbi. Zbog toga se one često rješavaju određenim smjenama ili nekim drugim 'trikovima'. Sljedeća dva primjera to dobro ilustriraju, ali i pokazuju da se procesom racionalizacije ne dobija uvijek niz ekvivalentnih jednadžbi.

Primjer 2.4. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3. \tag{1}$$

Rješenje: Definiciono područje je skup $\mathbb{R}$. Koristeći identitet

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab\,(a+b) + b^3, \tag{2}$$

nakon stepenovanja date jednadžbe s tri, dobijamo

$$\begin{aligned}
(1) \quad \Longleftrightarrow \quad & 3 - x + 3\sqrt[3]{(3-x)(6+x)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x}\right)}_{\overset{(1)}{=}3} + 6 + x = 27 \\
\Longleftrightarrow \quad & \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 2 \Longleftrightarrow (3-x)(6+x) = 8 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 + 3x - 10 = 0 \Longleftrightarrow (x = 2 \vee x = -5)\,.
\end{aligned}$$

Budući da smo u prvom koraku izvršili zamjenu zbira dva kubna korijena brojem 3 (prema(1)), obavezno treba izvršiti provjeru dobijenih vrijednosti za x, tj. provjeriti da li zadovoljavaju polaznu jednadžbu. Ovdje je to zadovoljeno. □

Primjer 2.5. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}. \tag{3}$$

Rješenje: Analogno prethodnom primjeru, imamo

$$\begin{aligned}
(3) \quad \Longleftrightarrow \quad & x + 1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right)}_{\overset{(3)}{=}\sqrt[3]{x-1}} + 3x + 1 = x - 1 \\
\Longrightarrow \quad & 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -3x - 3 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(x^2 - 1\right)(3x+1) = -(x+1)^3 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee x = -1)\,.
\end{aligned}$$

Neposrednim uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednadžbu zaključujemo da je samo $x = -1$ njeno rješenje. □

Postavlja se pitanje: u čemu se razlikuju ove dvije jednadžbe iz posljednja dva primjera, bolje rečeno u čemu je razlika u rješavanju tih jednadžbi kada je korišten isti metod? Odgovor je zasnovan na činjenici da smo u prvom slučaju opći izraz predstavljen lijevom stranom jednadžbe zamijenili brojem, a u drugom ponovo novim izrazom (uočite da je u drugom koraku ovog primjera stavljen znak '$\Longrightarrow$'a ne znak ekvivalencije $\Longleftrightarrow$", te nismo dobili niz ekvivalentnih jednadžbi).

b) ***Iracionalne jednadžbe s parnim korijenima***

U slučaju iracionalne jednadžbe u kojoj se pojavljuju parni korijeni treba voditi računa o definicionom području te jednadžbe, to jest o skupu dopustivih vrijednosti nepoznanice za koje su nenegativne sve potkorjene veličine parnih korijena. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.6. *Za paran broj n jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne u oblasti u kojoj je

$$f(x) \geqslant 0 \quad i \quad g(x) \geqslant 0,$$

ili

$$f(x) < 0 \quad i \quad g(x) < 0.$$

Specijalno,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Uočimo da izraz $f(x)$ pod korijenom treba da je nenegativan (tj. $f(x) \geqslant 0$). Međutim, to je automatski zadovoljeno, jer je

$$f(x) = g^2(x) \geqslant 0.$$

Primjer 2.7. *Riješiti jednadžbu* $x + 1 = \sqrt{x+7}$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x+7} \Longleftrightarrow \left((x+1)^2 = x+7 \wedge x+1 \geqslant 0\right) \\ &\Longleftrightarrow [(x = 2 \vee x = -3) \wedge x \geqslant -1] \Longleftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.8. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4.$$

Rješenje: $DP : (2x + 1 \geqslant 0 \wedge x - 3 \geqslant 0) \Longleftrightarrow x \geqslant 3$
Budući da je lijeva strana date nejednadžbe nenegativna, ona se smije kvadrirati, naravno za one vrijednosti nepoznanice koje zadoviljavaju DP. Dakle, data njednadžba je, uz uvjet DP, ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} 2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)} &= 16 \Longleftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 18-3x \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 18-3x \geqslant 0 \\ 4(2x+1)(x-3) = (18-3x)^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Prema tome, uzimajući u obzir definiciono područje, data nejednadžba je ekvivalentna sa

$$(x = 4 \vee x = 84 \wedge x \geqslant 3 \wedge x \leqslant 6) \Longleftrightarrow x = 4.$$

□

Već smo ranije napomenuli da se iracionalne jednadžbe s trećim, četvrtim itd. korijenima vrlo često rješavaju određenim smjenama. Sljedeći primjer nam pokazuje kako se u određenim situacijama dobro odabranim smjenama iracionalna jednadžba može efikasno riješiti.

Primjer 2.9. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4.$$

Rješenje: DP: $x\in\left[-\dfrac{35}{2},\dfrac{47}{2}\right]$. Uvedimo smjene: $u=\sqrt[4]{47-2x}, v=\sqrt[4]{35+2x}$. Tako dobijamo sljedeći sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} u^4+v^4 &= 82,\\ u+v &= 4. \end{aligned}$$

Transformacijom lijeve strane prve jednadžbe, te uvođenjem smjene $t=uv$, dobijamo

$$\begin{aligned} u^4+v^4 &= \left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2\\ &= (16-2t)^2-2t^2, \end{aligned}$$

odnosno dobijamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-32t+87=0,$$

s rješenjima $t_1=3, t_2=29$.

Na taj način dobijamo sljedeća dva sistema jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{c} u+v=4,\\ uv=3, \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{c} u+v=4,\\ uv=29. \end{array}\right.$$

Rješenja prvog sistema su uređeni parovi $(1,3)$ i $(3,1)$, odakle slijedi $x_1=-17, x_2=23$. Drugi sistem nema realnih rješenja. Uočimo da oba rješenja pripadaju definicionom području date jednadžbe, tako da su to ujedno njena rješenja. □

b1) *Iracionalne jednadžbe s parametrima*

Istaknimo da su iracionalne jednadžbe s parametrima posebno komplicirane. Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 2.10. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x, \tag{4}$$

u ovisnosti o realnom parametru p.

Rješenje: DP: $x^2-p\geqslant 0 \wedge x^2-1\geqslant 0$, pa razlikujemo sljedeće slučajeve

i) $p\leqslant 1 \Longrightarrow DP:\ x\in\langle-\infty,-1]\cup[1,+\infty\rangle,$

ii) $p>1\Longrightarrow DP: x\in\left\langle-\infty,-\sqrt{p}\right]\cup\left[\sqrt{p},+\infty\right\rangle$

No, uočimo sljedeće: $L\geqslant 0\Longrightarrow D=x\geqslant 0$ (L označava lijevu stranu, a D desnu stranu date jednadžbe), pa zbog toga i zbog DP u obzir dolaze sljedeće vrijednosti za x :

$$\begin{aligned} p &\leqslant 1\Longrightarrow x\in[1,+\infty\rangle, && (5)\\ p &> 1\Longrightarrow x\in[\sqrt{p},+\infty\rangle. && (6) \end{aligned}$$

Uz uvjete (5) ili (6) imamo:

$$\begin{aligned} (4) &\iff x^2-p+4x^2-4+4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=x^2\\ &\iff 4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=p+4-4x^2 && (7) \end{aligned}$$

Desna strana posljednje jednadžbe (7) mora biti nenegativna, to jest mora biti

$$x^2 \leqslant \frac{p+4}{4}. \tag{8}$$

Uz uvjet (8) imamo

$$\begin{aligned}(7) \quad &\Longleftrightarrow \quad 16\left(x^2-p\right)\left(x^2-1\right) = p^2+8p+16-8\left(p+4\right)x^2+16x^4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 8\left(2-p\right)x^2 = \left(p-4\right)^2 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{\left(p-4\right)^2}{8\left(2-p\right)},\end{aligned}$$

odakle neposredno slijedi da mora biti $p<2$. Provjerimo sada uvjet (8):

$$x^2 \quad \leqslant \quad \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow \frac{\left(p-4\right)^2}{8\left(2-p\right)} \leqslant \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow 3p^2-4p \leqslant 0 \Longleftrightarrow p \in \left[0, \frac{4}{3}\right].$$

Zbog toga preostaje provjeriti još samo uvjete (5) i (6) za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant p \quad &\leqslant \quad 1 \Longrightarrow \left(x^2 \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{\left(p-4\right)^2}{8\left(2-p\right)} \geqslant 1 \Longleftrightarrow p^2 \geqslant 0\right), \\ p \quad &\in \quad \left\langle 1, \frac{4}{3}\right] \Longrightarrow \left(x^2 \geqslant p \Longleftrightarrow \frac{\left(p-4\right)^2}{8\left(2-p\right)} \geqslant p \Longleftrightarrow \left(3p-4\right)^2 \geqslant 0\right),\end{aligned}$$

što je zadovoljeno u oba slučaja.

Rezultat: $x = \dfrac{4-p}{2\sqrt{2\left(2-p\right)}}$ za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$; za ostale vrijednosti paramatra p jednadžba nema rješenja.

□

Primjer 2.11. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x-2} = x+a$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: Jasno je da treba biti $x \geqslant 2$ i $x \geqslant -a$. Razlikujemo dva slučaja:

$$-a < 2, \text{ tj. } a > -2: \quad x \geqslant 2 \tag{9}$$

i

$$-a \geqslant 2, \text{ tj. } a \leqslant -2: \quad x \geqslant -a. \tag{10}$$

Uz te uvjete data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} x-2 \quad &= \quad x^2+2ax+a^2 \Longleftrightarrow x^2+\left(2a-1\right)x+a^2+2=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}\right).\end{aligned}$$

Odavde slijedi da data jednadžba nema rješenja kada je $-4a-7<0$, to jest kada je $a > -\frac{7}{4}$. U slučaju kada je $a = -\frac{7}{4}$, polazna jednadžba ima rješenje $x = \frac{9}{4}$, a za $a < -\frac{7}{4}$, imamo da je $x_{\pm} \in \mathbb{R}$. Treba vidjeti samo kada te vrijednosti zadovoljavaju uvjete (9) i (10).

i) Za $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ imamo

$$x_+ \geqslant 2 \iff \sqrt{-4a-7} \geqslant 3+2a,$$

što je za sve promatrane vrijednosti od a zadovoljeno (naime, $3+2a<0$, za sve $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$), pa je x_+ rješenje date jednadžbe. Također,

$$x_- \geqslant 2 \iff -3-2a \geqslant \sqrt{-4a-7} \iff (a+2)^2 \geqslant 0$$

$$(\text{jer je } -3a-2>0 \text{ za } a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle),$$

što je uvijek zadovoljeno, pa je i x_- rješenje.

ii) Za $a \in \langle -\infty, -2]$ imamo

$$x_+ \geqslant -a \iff 1+\sqrt{-4a-7} \geqslant 0,$$

što je očito uvijek zadovoljeno, pa je x_+ rješenje date jednadžbe. Također,

$$x_- \geqslant -a \iff 1 \geqslant \sqrt{-4a-7} \iff a \geqslant -2.$$

Pošto je $a \leqslant -2$, to znači da je x_- rješenje samo za $a=-2$.

Rezime:

1° Za $a \in \langle -\infty, -2\rangle$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x_+ = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-7}}{2}$.

2° Za $a \in \left[-2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ jednadžba ima dva rješenja $x_\pm = \frac{1}{2}\left(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}\right)$.

3° Za $a = -\frac{7}{4}$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{9}{4}$.

4° Za $a \in \left\langle -\frac{7}{4}, +\infty \right\rangle$ jednadžba nema rješenja. □

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće jednadžbe:

1. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$
2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$
3. $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-37} = 6.$
4. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4} + \sqrt[3]{2x^2-5x-3} = \sqrt[3]{2x+1}.$
5. $x - \sqrt[3]{x^2-x-1} = 1.$
6. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$
7. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}.$

8. $x+\sqrt{1-15x}=3.$
9. *a)* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5,$ *b)* $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$
10. $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x+5}=\sqrt{x-7}.$
11. $\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+6)}.$
12. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34.$
13. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$
14. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$
15. $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$
16. *a)* $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$ *b)* $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8.$

Diskutirati rješenja sljedećih jednadžbi u ovisnosti o parametru $a\in\mathbb{R}$:

17. $\sqrt{2-x}=-\dfrac{x}{2}+a.$
18. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$
19. $\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}=a.$
20. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x.$

3. Iracionalne nejednadžbe

Definicija 3.1. *Nejednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi i pod korijenom zove se* ***iracionalna*** *nejednadžba.*

Problematika rješavanja iracionalnih nejednadžbi slična je problematici rješavanja iracionalnih jednadžbi. Zbog toga su i metodi za njihovo rješavanje dosta slični, ali ima i bitnih razlika o kojima itekako valja voditi računa. Tu se prije svega misli na poteškoće koje se javljaju kao rezulltat množenja nejenadžbe negativnim brojem, što prouzrokuje promjenu smisla nejednakosti. Naročito je opasno izvoditi neoprezno i nekritički množenje nejednadžbe brojnim izrazom u kojem figurira nepoznanica. Zato se preporučuje da se to nikad i ne radi, osim u slučaju kada za brojni izraz znamo da je pozitivan ili negativan za sve dozvoljene vrijednosti nepoznanice. S druge strane, posebnu pažnju moramo posvetiti i kvadriranju date nejednadžbe u cilju oslobađanja od kvadratnog korijena. To se smije raditi samo u slučaju kada su i lijeva i desna strana nejednadžbe nenegativne. Da je kvadriranje nedozvoljeno u slučaju kad su obje strane nejednadžbe negativne pokazuje sljedeći primjer: ako tačnu nejednakost $-4<-2$ kvadriramo, dobit ćemo nejednakost $16<4$, koja je netačna. Slično će se dogoditi i u slučaju $-3<2$. S druge strane, nakon kvadriranje nejednakosti $-1<2$, dobit čn tačnu nejednakost. Dakle, ako je barem jedna strana nejednakosti negativna, nismo sigurni da li čn nakon kvadriranja dobiti tačnu nejednakost. Prema tome, treba strogo voditi računa o sljedećem pravilu:

$$(L<D\wedge L\geqslant 0\wedge D\geqslant 0)\Longleftrightarrow L^2<D^2. \tag{11}$$

Pri tome se nejednakost $<$ može zamijeniti bilo kojom od nejednakosti: $>,\geqslant$ ili $\leqslant$.

Ako se ne držimo ovog pravila, mogu nastupiti različite problematične situacije. Pokazuje nam to sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 3.2. *Riješiti sljedeće nejednadžbe:*
a) $\sqrt{x} < 2$; *b)* $\sqrt{x} < -2$; *c)* $\sqrt{x} > 2$; *d)* $\sqrt{x} > -2$.

Rješenje: Uočimo da je definiciono područje svake od nejednadžbi $x \geqslant 0$.

a) Obje strane ove nejednadžbe su nenegativne, pa se može primijeniti gornje pravilo kvadriranja nejednadžbe, nakon čega dobijemo $x < 4$. Uzimajući u obzir definiciono područje, vidimo da mora biti $x \in [0, 4\rangle$ i to je traženi skup rješenja nejednadžbe.

b) Desna strana nejednadžbe je negativan broj, pa se ne smije kvadrirati. No, budući da je lijeva strana nejednadžbe nenegativna, jasno je da taj broj ne može biti manji od negativnog broja na desnoj strani. Dakle, u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

c) Kao i u slučaju *a)* smijemo kvadrirati nejednadžbu, nakon čega dobijemo $x > 4$. Uporeďujući to s DP, dobijamo skup rješenja nejednadžbe $\langle 4, +\infty\rangle$.

d) Ni ovdje ne smijemo kvadrirati nejednadžbu, jer je desna strana negativna. Kako je, međutim, lijeva strana nenegativna, ona je uvijek veća od desne strane. Zato je skup rješenja skup svih vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP, tj. $x \in [0, +\infty\rangle$.

□

Vrlo je bitno promatrati sljedeća četiri tipa iracionalnih nejednadžbi:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Posljednja dva tipa su jednostavna, dok su prva dva kompliciranija i zato obratimo posebnu pažnju na njih.

U prvoj nejednadžbi je $DP : f(x) \geqslant 0$ i lijeva strana je nenegativna. Zbog navedenog pravila kvadriranja nejednakosti (11) i stroge nejednakosti desna strana nejednadžbe mora biti pozitivna, tj. $g(x) > 0$. Uz ta dva uvjeta, nakon stepenovanja sa $2n$, dobijamo $f(x) < [g(x)]^{2n}$. Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Primjedba 3.3. *Naravno, u svim slučajevima treba uključiti i definiciona područja funkcija f i g, što u daljem tekstu nećemo posebno isticati, ali će se podrazumijevati.*

Teorem 3.4. *Nejednadžba*

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je sistemu nejednadžbi i to:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < [g(x)]^{2n} \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Primjer 3.5. *Riješiti nejednadžbu* $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 4} \quad < \quad x - 3 &\Longleftrightarrow \left[0 \leqslant x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \wedge x - 3 > 0\right] \\ &\Longleftrightarrow \{x \in \langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty\rangle \wedge x < 5 \wedge x > 3\} \\ &\Longleftrightarrow x \in [4, 5\rangle . \end{aligned}$$

□

I u drugoj nejednadžbi u (12) je $DP : f(x) \geqslant 0$ i lijeva strana je nenegativna. Ovdje su moguća dva slučaja: da je desna strana negativna ili da je nenegativna. Ako je $g(x) < 0$, tada je rješenje svako x iz DP. Dakle, u ovom slučaju skup rješenja R_1 nejednadžbe ima oblik

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0 \wedge g(x) < 0\} .$$

Ako je $g(x) \geqslant 0$, tada smijemo nejednadžbu spepenovati sa $2n$, jer su joj obje strane nenegativne, pa dobijamo $f(x) > [g(x)]^{2n}$. Uočimo da je uvjet DP u ovom slučaju automatski ispunjen, budući da je $f(x) > [g(x)]^{2n} \geqslant 0$, za sve realne vrijednosti nepoznanice x. Prema tome, u ovom slučaju skup rješenja R_2 nejednadžbe je predstavljen skupom

$$R_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > [g(x)]^{2n} \wedge g(x) \geqslant 0 \right\}.$$

Na taj način dobijamo skup rješenja R nejednadžbe kao $R = R_1 \cup R_2$, a što se može iskazati i sljedećim teoremom.

Teorem 3.6. *Za nejednadžbu oblika*

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vrijedi

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \right).$$

Primjer 3.7. *Riješiti nejednadžbu* $\sqrt{1-4x^2} \geqslant 1-3x$.

Rješenje: Koristeći prethodni teorem imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x^2} \quad &\geqslant \quad 1-3x \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 1-4x^2 \geqslant 0 \\ 1-3x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-4x^2 \geqslant (1-3x)^2 \\ 1-3x \geqslant 0 \end{cases} \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{6}{13} \\ x \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2} \vee 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \right) \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

□

Primjer 3.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

Rješenje: DP: $\left(x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \geqslant 0 \wedge x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geqslant 0 \right) \Longleftrightarrow x \in [-1, 0\rangle \cup [1, +\infty\rangle$.

Za ove vrijednosti nepoznanice x, desna strana nejednadžbe je nenegativna, pa rješenje nejednadžbe postoji ako je lijeva strana nejednadžbe pozitivna, tj. ako je

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$$

što je zadovoljeno za $x > 1$. Uz taj uvjet datu nejednadžbu smijemo kvadrirati pa imamo

$$x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x} \right)^2,$$

odnosno

$$x - \frac{2}{x} + 1 - 2\frac{x-1}{x}\sqrt{x+1} > 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Sada, množenjem sa x^2 i dijeljenjem sa $x-1$ (što je dozvoljeno za $x>1$) dobijamo

$$\left(x^2+x+1>2x\sqrt{x+1}\wedge x>1\right)\Longleftrightarrow\left[\left(x^2+x+1\right)^2>4x^2\left(x+1\right)\wedge x>1\right],$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}
&\left[x^4+2x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2>4x^2\left(x+1\right)\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left[x^4-2x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2>0\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left[\left(x^2-x-1\right)^2>0\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left(x>1\wedge x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Za posljednja dva tipa iracionalnih nejednadžbi iz (12), tj. za nejednadžbe s neparnim korijenima vrijede sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.9. *Nejednadžba oblika*

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x)\quad(n\in\mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x)<[g(x)]^{2n+1}\ .$$

Nejednadžba oblika

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x)\quad(n\in\mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x)>[g(x)]^{2n+1}\ .$$

I ovdje moramo istaknuti da su posebno komplicirane **iracionalne nejednadžbe s parametrima**. Ilustriraćemo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.10. *Diskutiarti rješenje nejednadžbe*

$$2\sqrt{x+a}>x+1$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: Prema Teoremu 3.6 imamo

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x+a}\quad>\quad x+1\ &\Longleftrightarrow\ \left(\left\{\begin{array}{l}x+a\geqslant 0\\ x+1<0\end{array}\right.\ \vee\ \left\{\begin{array}{l}4\left(x+a\right)>\left(x+1\right)^2\\ x+1\geqslant 0\end{array}\right.\right)\\
&\Longleftrightarrow\ \left(\left\{\begin{array}{l}x\geqslant -a\\ x<-1\end{array}\right.\ \vee\ \left\{\begin{array}{l}x^2-2x+1-4a<0\\ x\geqslant -1\end{array}\right.\right).
\end{aligned}$$

Primijetimo da u prvoj nejednadžbi drugog sistema vrijedi

$$x^2-2x+1-4a<0\quad\Longleftrightarrow\quad x\in\left\langle 1-2\sqrt{a},1+2\sqrt{a}\right\rangle\quad\text{za } a>0,$$

dok za $a \leqslant 0$ slijedi $x \in \emptyset$. No, također, za $a \leqslant 0$, ni prvi sistem nema rješenja (jer je $-1 < 0 \leqslant -a$). To znači da data nejednadžba nema rješenja za $a \leqslant 0$. Zbog toga preostaje da promatramo oba sistema u slučaju $a > 0$. Kako broj $-a$ može biti ili s lijeve ili s desne strane broja -1, imamo sljedeće slučajeve.

i) Za $0 < a \leqslant 1$, sistem nejednadžbi $x \geqslant -a \wedge x < -1$ nema rješenja, dok je

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geqslant -1 \end{array} \right\} \iff x \in \left\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \right\rangle,$$

što i predstavlja skup rješenja R nejednadžbe za ove vrijednosti parametra a.

ii) Za $a > 1$ imamo

$$\begin{array}{ccc} (x \geqslant -a \ \wedge \ x < -1) & \iff & x \in [-a, -1\rangle\,, \\ & & \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geqslant -1 \end{array} \right\} & \iff & x \in \left[-1, 1 + 2\sqrt{a}\right\rangle. \end{array}$$

Dakle, skup rješenja nejednadžbe za $a > 1$ je:

$R = [-a, -1\rangle \cup [-1, 1 + 2\sqrt{a}\rangle = [-a, 1 + 2\sqrt{a}\rangle\,.$

Rezime:

1° Za $0 < a \leqslant 1$ rješenje nejednadžbe je $\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a}\rangle\,.$
2° Za $a > 1$ rješenje nejednadžbe je $[-a, 1 + 2\sqrt{a}\rangle\,.$
3° Za $a \leqslant 0$ data nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 3.11. *Diskutirati rješenja nejednadžbe*

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} < \sqrt{2a+x}. \tag{13}$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: DP: $a + x \geq 0, a + x \neq 0, 2a + x \geq 0$, odnosno $x > -a, x \geq -2a$.
Kako

$$\begin{array}{lll} a & \geq & 0 \Longrightarrow -a \geq -2a, \\ a & < & 0 \Longrightarrow -a < -2a, \end{array}$$

to je

$$\text{DP:} \left\{ \begin{array}{ccc} x \geq -2a & \text{za} & a < 0, \\ x \geq -a & \text{za} & a \geq 0. \end{array} \right. \tag{14}$$

Uzimajući u obzir da je $a + x > 0$ i

$$\sqrt{a^2} = |a| = \left\{ \begin{array}{ccc} -a & \text{za} & a < 0, \\ 0 & \text{za} & a = 0, \\ a & \text{za} & a > 0, \end{array} \right.$$

imat ćemo da je

$$\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \frac{|a|}{\sqrt{a+x}} = \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za} & a < 0, \\ 0 & \text{za} & a = 0, \\ \frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za} & a > 0. \end{array} \right. \tag{15}$$

Dakle, imamo tri kvalitativno različita slučaja.

1) Za $a<0$, koristeći (15), nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x}+\frac{a}{\sqrt{a+x}}<\sqrt{2a+x}, \tag{16}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad a+x+a<\sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}\\ &\Longleftrightarrow \quad 2a+x<\sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}.\end{aligned}$$

Sada, zbog $2a+x\geq 0$, smijemo kvadrirati obje strane posljednje nejednakosti, pa je

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2a+x)^2<(a+x)(2a+x)\Longleftrightarrow (2a+x)^2-(a+x)(2a+x)<0\\ &\Longleftrightarrow \quad (2a+x)(2a+x-a-x)<0\Longleftrightarrow (2a+x)\,a<0 \overset{a<0}{\Longleftrightarrow} 2a+x>0\\ &\Longleftrightarrow \quad x>-2a.\end{aligned}$$

Imajući na umu (14) zaključujemo da za $a<0$ nejednadžba (13) ima rješenje $x>-2a$, odnosno

$$R_1=\langle -2a,+\infty\rangle \quad \text{za } a<0.$$

2) Za $a=0$ vrijedi

$$(13)\Longleftrightarrow \sqrt{x}<\sqrt{x}\Longleftrightarrow 1<1,$$

što nije tačno. Dakle, $R_2=\emptyset$ za $a=0$.

3) Za $a>0$ nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x}-\frac{a}{\sqrt{a+x}}<\sqrt{2a+x}.$$

odnosno

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad a+x-a<\sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}\\ &\Longleftrightarrow \quad x<\sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \qquad (17)\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je sigurno tačna za $x\leq 0$, tj. za

$$x\in R_3=\langle -\infty,0]\cap DP=\langle -\infty,0]\cap\langle -a,+\infty\rangle=\langle -a,0]\,.$$

S druge strane, za $x>0$, kvadriranjem (17) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2<(a+x)(2a+x)\\ &\Longleftrightarrow \quad 0<a(2a+3x)\,,\end{aligned}$$

što je uvijek tačno za $a>0$ i $x>0$, tj. $x\in R_4=\langle 0,+\infty\rangle$. Dakle, u slučaju $a>0$ rješenje je

$$R_5=R_3\cup R_4=\langle -a,0]\cup\langle 0,+\infty\rangle=\langle -a,+\infty\rangle\,.$$

Rezime:

1° Za $a<0$ rješenje date nejednadžbe je $\langle -2a,+\infty\rangle$.

2° Za $a=0$ data nejednadžba nema rješenja.

3° Za $a>0$ rješenje date nejednadžbe je $x\in\langle -a,+\infty\rangle$.

□

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

1. a) $\sqrt{4x+10} < 2x+1$, b) $\sqrt{x+7} < x+1$.
2. a) $\sqrt{2x+1} > x-1$, b) $\sqrt{x-1} > x-3$.
3. a) $x > \sqrt{x^2-3x+2}$, b) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$.
4. $\sqrt{x+1} < \sqrt{2x-4}$.
5. $\sqrt{x-6} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{2x-1}$.
6. $\sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-4} > \sqrt{10x-6}$.
7. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} > 2$.
8. $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} - \sqrt{\dfrac{x-2}{x}} > \dfrac{1}{x}$.
9. $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.
10. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$.

Diskutirati rješenja sljedećih nejednadžbi u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

11. $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2ax-x^2} > a, \quad (a \in \mathbb{R})$.
12. $a\sqrt{x+1} < 1$.
13. $\sqrt{x-1} \geqslant a-x$.
14. $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} > a$.
15. $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin, *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.
[2] V.T. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.
[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.
[5] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar, *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 25–33

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[a]

[a]***Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika***

Sažetak: U radu se, nakon razmatranja osnovnih osobina eksponencijalne funkcije, detaljnije razmatraju eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe, s i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Slično kako je to pokazano u [5], u slučaju iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe su također poprilično nezgodne za ispitivanje. I za njih naravno ne postoji opći postupak rješavanja. Tako smo u mogućnosti riješiti samo neke relativno jednostavne tipove eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi. U ovom radu bit će date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Budući da se eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe vrlo često pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola, to nam daje razlog više za motivaciju pri pisanju ovog rada. Poseban problem je, kao i kod drugih jednadžbi elementarne matematike, kad se zahtijeva diskusija rješenja eksponencijalne jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

Kako bi kvalitetno mogao pratiti naredno izlaganje, čitatelj treba dobro da poznaje teoriju i primjene kvadratnih jednadžbi i nejednadžbi, kao i iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi (v. [1–6]). Prije nego pristupimo detaljnijem proučavanju ovih jednadžbi i nejednažbi, upoznajmo se prvo s eksponencijalnom funkcijom i njenim osobinama, koje će nam biti od velike koristi kasnije.

Definicija 1.1. *Funkcija* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=a^x,\ \ 0<a\neq 1,$ *naziva se* ***eksponencijalnom funkcijom.***

Osobine eksponencijalne funkcije:

a) Funkcija $y=a^x$ je definirana za svako x u skupu realnih brojeva.

b) Funkcija $y=a^x$ je pozitivna za svako realno x $\quad (a^x>0\,,\quad x\in\mathbb{R})$.

c) Ako je $a>1$, tada $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$, tj. funkcija je monotono rastuća. Ako je $0<a<1$, tada $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$, to jest funkcija je monotono opadajuća. Međutim, uočimo sljedeće: ako je $a=1$, tada je $a^x=1^x=1$ za svako x, tj. funkcija ima konstantnu vrijednost, pa nije zanimljiva za ispitivanje zbog činjenice da nije injekcija, tj. nema inverznu funkciju. To je razlog zbog čega je u definiciji eksponencijalne funkcije nametnuto ograničenje $a\neq 1$.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: eksponencijalna funkcija, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe
Rad preuzet: Rad preuzet: 30. septembar 2020.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad

Slika 1: Grafici eksponencijalnih funkcija: (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$.

d) Ako je $x = 0$, tada je $a^x = 1$ za sve $a > 0$.

e) Za $a > 1$ u intervalu $(-\infty, 0)$ je $0 < a^x < 1$, a za $0 < a < 1$ je $a^x > 1$.

U intervalu $(0, +\infty)$ za $a > 1$ je $a^x > 1$, a za $0 < a < 1$ je $0 < a^x < 1$.

2. Eksponencijalne jednadžbe i nejednažbe - teorijski osvrt

Definicija 2.1. *Jednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo* ***eksponencijalnom jednadžbom****.*

Naravno, u općem slučaju eksponencijalnu jednadžbu nije moguće riješiti. To se može učiniti samo s jednostavnijim oblicima tih jednadžbi.
Budući da je eksponencijalna funkcija bijektivna, to vrijedi

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad (0 < a \neq 1) \iff x_1 = x_2.$$

Na ovoj činjenici je zasnovano rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih jednadžbi. Naime, datu eksponencijalnu jednadžbu je najčešće moguće svesti na oblik

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1)\,, \tag{1}$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$f(x) = g(x)\,,$$

vodeći, naravno, računa i o definicionim područjima funkcija f i g.
Međutim, često se u zadacima pojavljuju eksponencijalne jednadžbe, gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena. Najjednostavniji oblik takve jednadžbe je

$$[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)} \quad (a(x) > 0)\,. \tag{2}$$

Uočimo prvo da je definiciono područje ove jednadžbe ustvari presjek definicionih područja funkcija f, g i a, tj. $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Tada vrijedi

$$(2) \iff \{x \in DP \ \wedge \ [a(x) = 1 \ \vee \ (0 < a(x) \neq 1 \ \wedge \ f(x) = g(x))]\}\,.$$

Definicija 2.2. *Nejednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo* ***eksponencijalnom nejednadžbom****.*

Eksponencijalne nejednadžbe se u općem slučaju ne mogu riješiti. Naime, moguće je riješiti samo neke jednostavnije klase nejednadžbi i tada su postupci slični kao prilikom rješavanja eksponencijalnih jednadžbi. Na osobini **c)** eksponencijalne funkcije zasnovano je rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih nejednadžbi. Naime, data eksponencijalna nejednadžba najčešće se može svesti na oblik:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

i) Ako je $a > 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) < g(x).$$

ii) Ako je $0 < a < 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) > g(x).$$

Pri tome, naravno, moramo voditi računa o definicionom području date nejednadžbe kao presjeku definicionih područja funkcija f i g

Razmotrimo sada i eksponencijalne nejednadžbe gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena:

$$[a(x)]^{f(x)} < [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0) \tag{3}$$

i

$$[a(x)]^{f(x)} \leq [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0)\,. \tag{4}$$

Definiciono područje u slučaju obje nejednadžbe je presjek definicionih područja funkcija f, g i a, to jest $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Vrijedi

$$(3) \iff \left\{ x \in DP \;\wedge\; \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge\ f(x) < g(x)\ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge\ f(x) > g(x)\ ) \end{array} \right] \right\} \tag{5}$$

i

$$(4) \iff \left\{ x \in DP \;\wedge\; \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge\ f(x) \leq g(x)\ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge\ f(x) \geq g(x)\ ) \\ \vee \\ a(x) = 1 \end{array} \right] \right\}. \tag{6}$$

2.1. Primjeri zadataka bez parametara

Primjer 2.3. *Riješiti jednadžbu*

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Rješenje: Data se jednadžba može napisati u obliku

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 6^{2x}.$$

Nakon dijeljenja sa 6^{2x}, dobijamo

$$3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^{2x} = 5 \iff 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 5.$$

Uvedimo smjenu: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$. Imamo

$$3t + 2 \cdot \frac{1}{t} = 5 \iff 3t^2 - 5t + 2 = 0 \iff \left(t = \frac{2}{3} \ \vee \ t = 1\right).$$

$R : x = \frac{1}{2} \vee x = 0.$ □

Primjer 2.4. *Riješiti jednadžbu*

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}. \tag{7}$$

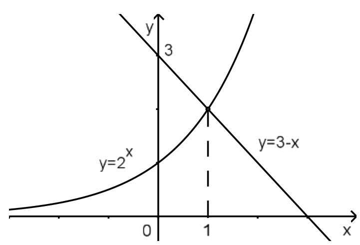
Rješenje: $DP : x \geq 0$. Uz ovaj uvjet, imamo

$$\begin{aligned}
(7) \iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 9^x = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{2x} = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) - 3^x \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) = 0 \\
\iff & \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right)\left(9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x\right) = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x = 0 \text{ (jer je } 3^x + 3^{\sqrt{x}} > 0) \\
\iff & 3^{2+\sqrt{x}} = 3^x \iff 2 + \sqrt{x} = x \\
\iff & \left(x \geq 2 \ \wedge \ x = (x-2)^2\right) \iff x = 4,
\end{aligned}$$

a to je rješenje date jednadžbe, budući da zadovoljava uvjet DP. □

Primjer 2.5. *Riješiti jednadžbu* $2^x = 3 - x$.

Rješenje: Ovo je primjer eksponencijalne jednadžbe koja se ne može svesti na oblik (1), te iako se čini vrlo jednostavnom ne može biti riješena na standardan način. Međutim, jednadžba se može riješiti grafički: u istom koordinatnom sistemu konstruirajmo grafike funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3 - x$ (v. Sliku 2).



Slika 2: Grafici funkcija $y = 2^x$ i $y = 3 - x$.

Sa Slike 2 je jasno da ti grafici imaju jednu jedinu tačku zajedničku, što znači da data jednadžba ima jedinstveno rješenje. To rješenje je jednostavno uočiti: $x = 1$. □

Primjer 2.6. *Riješiti jednadžbu* $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

Rješenje: Nakon uvođenja smjene $y = \frac{x}{2}$, data jednadžba poprima oblik

$$1 + 3^y = 4^y \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y = 1.$$

Iskoristit ćemo sada osobine monotonosti eksponencijalne funkcije (u slučaju kad je baza manja od 1 funkcija je opadajuća, v. osobinu c)).

Za $y < 1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y > \frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y > \frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y > 1$, tj. u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

Za $y > 1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y < \frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y < \frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y < 1$, te ni u ovom slučaju jednadžba nema rješenja. Jasno je da je transformirana jednadžba zadovoljena za $y = 1$, to jest $x = 2$ je jedino rješenje date jednadžbe. □

Primjer 2.7. *Riješiti jednadžbu*

$$\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1.$$

Rješenje: DP: $x \in \mathbb{R}$, pa imamo

$$\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1 \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 - x - 1 = 1 \\ \vee \\ \left(0 < x^2 - x - 1 \neq 1 \wedge x^2 - 1 = 0\right) \end{array} \right\}.$$

$R : x = -1 \vee x = 2.$ □

Primjer 2.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\left(4x^2 - 10x + 7\right)^{x^2-x} \geq 1.$$

Rješenje: Na osnovu (6) imamo (imajući na umu da je DP: $x \in \mathbb{R}$)

$$\left(4x^2 - 10x + 7\right)^{x^2-x} \geq 1 \iff \left\{ \begin{array}{c} 4x^2 - 10x + 7 > 1 \ \wedge \ x^2 - x \geq 0 \\ \vee \\ 0 < 4x^2 - 10x + 7 < 1 \ \wedge \ x^2 - x \leq 0 \\ \vee \\ 4x^2 - 10x + 7 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle \ \wedge \ x \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle \\ \vee \\ x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle \ \wedge \ x \in [0, 1] \\ \vee \\ x = 1 \ \vee \ x = \frac{3}{2} \end{array} \right\}.$$

$R : x \in \langle -\infty, 0] \cup \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle.$ □

Primjer 2.9. *Riješiti sljedeću nejednadžbu*

$$\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x \leq 62.$$

Rješenje: S obzirom da je

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{16 - 15}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}},$$

data nejednadžba je ekvivalentna s

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x} \leq 62.$$

Uvođenjem smjene: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t$, dobijamo

$$\begin{aligned} t+\frac{1}{t} \leq 62 \quad &\Longleftrightarrow \quad t^2-62t+1 \leq 0 \Longleftrightarrow 31-8\sqrt{15} \leq t \leq 31+8\sqrt{15} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(4-\sqrt{15}\right)^2 \leq \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(4+\sqrt{15}\right)^{-2} \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Longleftrightarrow -4 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Rezultat: $-4 \leq x \leq 4$. □

2.2. Primjeri zadataka s parametrima

Primjer 2.10. *Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba*

$$|x+2|-|2x+8| = a^x \quad :$$

a) ima tačno jedno rješenje,
b) ima više od jednog rješenja,
c) nema rješenja?

Rješenje: Jasno je da mora biti $a>0$, pa zbog $a^x>0$ za sve $x\in\mathbb{R}$, lijeva strana date jednadžbe mora biti pozitivna, to jest

$$|x+2| > |2x+8| \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 > (2x+8)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2+28x+60<0,$$

odakle slijedi

$$x \in \left\langle -6, -\frac{10}{3} \right\rangle. \tag{8}$$

Dakle, ako data jednadžba ima rješenja, ona moraju pripadati intervalu (8). Zadatak ćemo riješiti grafičkim putem. Na slici 3 predstavljeni su grafici funkcija $y=|x+2|-|2x+8|$ (u intervalu (8)) i $y=a^x$ (za različite vrijednosti a).

a) Da bi jednadžba imala tačno jedno rješenje, grafik funkcije $y=a^x$ mora prolaziti tačkom $M(-4,2)$ (jer on ne može prolaziti tačkama $A(-6,0)$ ili $B\left(-\frac{10}{3},0\right)$, tj. biće $a^{-4}=2$, odnosno $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

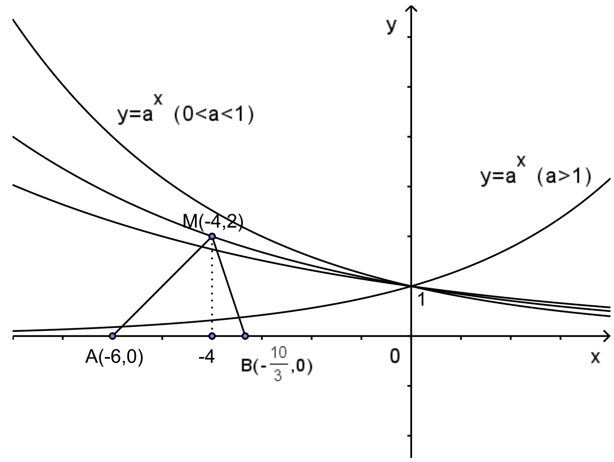
b) Za $a>\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y=a^x$ siječe liniju AMB u dvije tačke, pa jednadžba ima dva rješenja.

c) Za $0<a<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y=a^x$ nema zajedničkih tačaka s linijom AMB, pa jednadžba nema rješ enja. Jednadžba nema rješenja ni kada je $a\leq 0$. □

Primjer 2.11. *Naći sve vrijednosti realnog parametra a za koje nejednakost*

$$a\cdot 9^x + 4(a-1)\cdot 3^x + a > 1$$

vrijedi za sve $x\in\mathbb{R}$.



Slika 3: Grafici funkcija $y = |x+2| - |2x+8|$ i $y = a^x$ (za razne vrijednosti a).

Rješenje: Uvedemo li smjenu $t = 3^x > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, problem se svodi na iznalaženje svih vrijednosti realnog parametra a tako da vrijedi

$$f(t) = at^2 + 4(a-1)t + a - 1 > 0 \text{ za svako } t > 0.$$

Kako je $f(t)$ kvadratna funkcija njen znak je najlakše ispitivati znajući položaj njenog grafika, odnosno odgovarajuće parabole, koji zavisi od znaka koeficijenata a uz t^2 i od znaka njene diskriminante $D = 4(a-1)(3a-4)$. Zbog toga ćemo razmatrat sljedeće slučajeve.

1. $a \leq 0$

   Tada za $t > 0$ vrijedi $at^2 \leq 0$, $4(a-1)t < 0$ i $a - 1 < 0$, što implicira $f(t) < 0$ za sve $t > 0$, pa ove vrijednosti parametra a ne dolaze u obzir.

2. $a > 0$ (grafik funkcije $f(t)$ je otvorom okrenut prema gore)

   i) Ako je $D < 0$, to jest $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$, tada se grafik funkcije $f(t)$ nalazi u cijelosti iznad Ot-ose, pa je $f(t) > 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. To znači da u obzir dolaze sve razmatrane vrijednosti od a, odnosno $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$.

   ii) Ako je $D \geq 0$, to jest $a \in \langle 0, 1] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty \right\rangle$, tada da bi bilo $f(t) > 0$ za sve $t > 0$, grafik funkcije $f(t)$ za sve $t > 0$ mora biti u cijelosti iznad Ot-ose. To je moguće samo ako je veća nula funkcije $f(t)$ nepozitivna. Kako je, za $a > 0$, ta veća nula oblika $t_2 = \frac{2(1-a)+\sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a}$, to znači da mora vrijediti

   $$\frac{2(1-a) + \sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a} \leq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{(a-1)(3a-4)} \leq 2(a-1).$$

   Uočimo da je za $a \in \langle 0, 1]$, desna strana posljednje nejednakosti nepozitivna, dok je lijeva nenegativna, što je moguće samo ako je $a = 1$. S druge strane, za $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right\rangle$ imamo da je (nakon kvadriranja) posljednja nejednakost zadovoljena za sve pozitivne vrijednosti od a, što znači da u obzir dolaze sve vrijednosti $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right\rangle$.

   Dakle, u slučaju $a > 0$, zaključujemo da je $f(t) > 0$ za sve $t > 0$ ako je $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle \cup \{1\} \cup \left[\frac{4}{3} + \infty \right\rangle = [1, +\infty\rangle$, a što ujedno predstavlja rješenje zadatka.

□

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

1. Ispitati tok i konstruisati grafike sljedećih funkcija:

a) $y = 3^x$, b) $y = 2^{-x+1}$, c) $y = 2^x - 1$, d) $y = \begin{cases} 2^x, & x < -1, \\ 2^{-1}, & -1 \le x \le 1, \\ 2^{-x}, & x > 1. \end{cases}$

2. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Definirajmo realne funkcije s, c, t sljedećim formulama:

$$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \quad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

Dokazati da vrijedi:

a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$, b) $s(2x) = 2s(x)c(x)$,

c) $c(2x) = c^2(x) + s^2(x)$, d) $t(2x) = \dfrac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$,

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Riješiti sljedeće jednadžbe (**3-11**):

3. a) $2^{x-1} = 4^5$, b) $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$, c) $4^x - 4^{x-2} = 240$.

4. a) $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3}$, b) $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$.

5. a) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$, b) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.

6. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

7. a) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$, b) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

8. a) $0,5^{x^2-20x+61,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$, b) $5^x - 5^{3-x} = 20$.

9. a) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$, b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

10. a) $x^x + 27 \cdot x^{-x} - 28 = 0$, b) $|x|^{x^2-2x} = 1$.

11. $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$, b) $|x-1|^{10x^2-20x+9} = |x-1|^{3x+3}$.

12. Odrediti broj $t \in R$ takav da je $f(t) = t$ ako je $f(x)$ dato sa

$$f(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 4^{x+\sqrt{x^2-2}} + 6 + x.$$

13. Za koje vrijednosti parametara a i m jednadžba

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$$

ima rješenje?

Riješiti sljedeće nejednadžbe (**14-19**):

14. a) $2^{2x^2}+25^{\frac{x^2-1}{2}}>5^{x^2}$, b) $21\cdot 3^x+100\cdot 5^x-3^{x+4}>0$.

15. a) $4^x\leq 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}+4^{\sqrt{x}+1}$, b) $4^{\sqrt{x-2}}+16\geq 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

16. a) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}-3^{x+\frac{1}{2}}+2^{2x-1}<0$, b) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$.

17. a) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$, b) $\left(9+6x+x^2\right)^{-x-5}<1$.

18. a) $\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x}\leq 1$, b) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$.

19. $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{x+\sqrt{x^2-1}}\leq\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{x^2-1}}$.

20. Odrediti broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$2^{4x-2}\cdot 4^{-(x-1)^2}-3\cdot 2^{4x-1-x^2}+8\leq 0.$$

21. Za koje je vrijednosti a trinom $x^2-2^{a+2}\cdot x-2^{a+3}+12$ pozitivan za sve realne vrijednosti promjenljive x?

22. Za koje pozitivne vrijednosti p jednadžba

$$9^{x+1}+3x+2=9p^2-3p-2$$

ima nenegativne korijene?

23. U koordinatnoj ravni odrediti skup tačaka (uz grafičku ilustraciju) čije koordinate (x,y) zadovoljavaju nejednakosti:

a) $x^{x^2+y^2}<x^9\quad(x>0)$,

b) $x^y>x^{\cos x}\quad(x>0)$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 2(1), 21-33, 2019.

[6] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 34–48

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Logaritmi, logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se, nakon razmatranja osnovnih osobina logaritma i logaritamske funkcije, detaljnije razmatraju logaritamske jednadžbe i nejednadžbe, s i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Pojam logaritma i sve što je vezano za njega predstavlja vrlo kompleksnu problematiku u nastavi matematike srednjih škola, kako za učenike, tako i za njihove nastavnike. Nastavnici obično nemaju odgovarajuću literaturu za pripremu predavanja, a učenicima se to prezentira skromno i s posvećivanjem nedovoljno vremena za dobro razumijevanje te problematike. I, kako to najčesće biva, izostane prijeko neophodna motivacija, kojom bi trebalo opravdati izučavanje logaritama. Prije svega, potrebno je napraviti historijski osvrt razvoja logaritama (zbog čega su se pojavili i kako se razvijala teorija koja je zadovoljavala potrebe prakse, posebno u pomorstvu pri navigaciji). Naravno, pri tome, ne treba štedjeti previše vrijeme na ovim uvodnim činjenicama budući da će to rezultirati boljim razumijevanjem logaritama i njihove primjene. Samom pojmu logaritma treba pristupiti lagano, bez žurbe, s dosta primjera, a tek onda ići na njihovu primjenu u rješavanju logaritamskih jednadžbi s i bez parametara.

Slično kako je to pokazano u [5, 6], u slučaju iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, kao i u slučaju eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi, i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe su također poprilično nezgodne za ispitivanje. Logaritamske jednadžbe spadaju u tzv. transcedentne jednadžbe i bitno se razlikuju od algebarskih jednadžbi. No, uvijek se svode na neku algebarsku jednadžbu. I za njih naravno ne postoji opći postupak rješavanja. Tako smo u mogućnosti riješiti samo neke relativno jednostavne tipove logaritamskih jednadžbi i nejednadžbi. U ovom radu bit će date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Budući da se i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe vrlo često pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola, to nam daje razlog više za motivaciju pri pisanju ovog rada. Poseban problem je, kao i kod drugih jednadžbi elementarne matematike, kad se zahtijeva diskusija rješenja logaritamske jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

Kako bi kvalitetno mogao pratiti naredno izlaganje, čitatelj treba dobro da poznaje teoriju i primjene kvadratnih, eksponencijalnih i iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi (v. [1–7]). Prije nego pristupimo detaljnijem proučavanju ovih jednadžbi i nejednažbi, upoznajmo se prvo s pojmom logaritma i logaritamskom funkcijom i njenim osobinama, koje će nam biti od velike koristi kasnije.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: logaritam, funkcija, jednadžba, nejednadžba
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: april 2021.

2. Pojam logaritma

Promatrajmo jednadžbu

$$b^x = a, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Iz praktičnih razloga zanimaju nas samo one vrijednosti za a i b za koje jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje samo kad je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$.*

Proof. Imamo nekoliko kvalitativno različitih slučajeva.

1° Za $a = b = 0$ jednadžba (1) je oblika $0^x = 0$, čije je rješenje skup svih pozitivnih realnih brojeva.

2° Za $a = 0, b \neq 0$ jednadžba (1) ima oblik $b^x = 0$, a ona očito nema rješenja.

3° Za $a \neq 0, b = 0$ jednadžba (1) je oblika $0^x = a$, i ona nema rješenja.

4° Za $a < 0$ ili $b < 0$ jednadžba (1) nekad ima rješenje, a nekad nema, tj. nema uvijek rješenja (npr. jednadžba $(-2)^x = 8$, kao ni jednadžba $2^x = -8$ nemaju rješenja).

5° Pretpostavimo da je sada $b = 1$. Ukoliko je $a = 1$, tada jednadžba (1) ima oblik $1^x = 1$ i skup njenih rješenja je cijeli skup realnih brojeva. Ako je, pak, $a \neq 1$, tada očito jednadžba (1) nema rješenja.

Odbacujući sve navedene slučajeve slijedi zaključak teorema. Naime, u slučaju kada je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$, znamo da je $y = b^x$ eksponencijalna funkcija i da svakom realnom broju x odgovara tačno jedna pozitivna realna vrijednost b^x koju možemo označiti s a. □

Jedinstveno rješenje jednadžbe (1) ćemo nazvati **logaritmom** broja a za bazu b i pisati $x = \log_b a$. Preciznije se to može iskazati sljedećom definicijom.

Definicija 2.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$. **Logaritmom** broja a za bazu b nazivamo broj x kojim treba stepenovati broj b da bi se dobio broj a, tj. za koji vrijedi $b^x = a$. Taj broj označavamo s $x = \log_b a$. Dakle, simbolički zapisano*

$$x = \log_b a \iff b^x = a \quad (a > 0,\ 0 < b \neq 1)\,. \tag{2}$$

Primjedba 2.3. *Napomenimo da je u slučaju $b = 10$ uobičajeno izostaviti pisanje baze u logaritmu. Tako je $\log x = \log_{10} x$, $x > 0$. Logaritmi čija je baza 10 zovu se dekadski logaritmi.*

Primjer 2.4. *Naći: a)* $\log_2 \dfrac{1}{32}$, *b)* $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

Rješenje: Označimo li traženi logaritam s x, prema definiciji (2), imamo:

a) $\log_2 \dfrac{1}{32} = x \iff 2^x = \dfrac{1}{32} \iff 2^x = 2^{-5} \iff x = -5$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 81 \iff x = -4$. □

Primjer 2.5. *Odrediti x ako je: a)* $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, *b)* $\log_x \dfrac{1}{27} = 3$.

Rješenje: a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = x \iff x = 8$,

b) $\log_x \dfrac{1}{27} = 3 \iff x^3 = \dfrac{1}{27} \iff x = \dfrac{1}{3}$. □

Važno je istaknuti neke bitne osobine logaritama. Tako iz (2) očigledno slijede jednakosti

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b a} = a. \tag{3}$$

Sljedeće osobine su poznate kao *logaritamska pravila*.

1° *Prvo logaritamsko pravilo* možemo iskazati u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 2.6. *Neka je* $0 < b \neq 1$. *Tada za sve* $x > 0$, $y > 0$ *vrijedi*

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y. \tag{4}$$

Proof. Zbog pretpostavki $0 < b \neq 1$, $x > 0$, i $y > 0$, postoje realni brojevi

$$A = \log_b x, \quad B = \log_b y,$$

što prema definiciji (2) znači da je $b^A = x$, $b^B = y$. Kako je $xy > 0$, zaključujemo da postoji $\log_b xy$ i da vrijedi

$$b^{\log_b xy} \overset{(3)}{=} xy = b^A \cdot b^B = b^{A+B} = b^{\log_b x + \log_b y},$$

odakle slijedi (4). □

2° Sljedećim teoremom iskazuje se tzv. *drugo logaritamsko pravilo.*

Teorem 2.7. *Neka je* $0 < b \neq 1$, $t \in \mathbb{R}$. *Za sve* $x > 0$ *vrijedi*

$$\log_b x^t = t \log_b x. \tag{5}$$

Proof. Zbog pretpostavki $0 < b \neq 1$, $x > 0$, i $t \in \mathbb{R}$, postoji realan broj $A = \log_b x$, a zbog $x^t > 0$ postoji $\log_b x^t$. Imamo

$$b^{\log_b x^t} \overset{(3)}{=} x^t \overset{(3)}{=} \left(b^{\log_b x}\right)^t = b^{t \log_b x} \implies \log_b x^t = t \log_b x.$$

□

Kao neposrednu posljedicu prethodna dva pravila dobijamo i dva nova pravila iskazana u obliku sljedeća dva teorema.

Teorem 2.8. *Neka je* $0 < b \neq 1$, $t \in \mathbb{R}$. *Tada za sve* $x > 0$, $y > 0$ *vrijedi*

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \tag{6}$$

Proof. Kako je $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, prema prva dva pravila imamo

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b xy^{-1} \overset{(4)}{=} \log_b x + \log_b y^{-1} \overset{(5)}{=} \log_b x - \log_b y.$$

□

Teorem 2.9. *Ako je* $0 < b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, *tada za sve* $x > 0$, *vrijedi*

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x. \tag{7}$$

Proof. $\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{\frac{1}{n}} \overset{(5)}{=} \frac{1}{n} \log_b x.$ □

Primjer 2.10. *Odrediti* x *ako je:*

a) $\log_3 x = \log_3 9 + \log_3 2 - \log_3 3$,

b) $\log x = \frac{1}{3} \left[\log x + \frac{1}{2} (\log y - \log z) \right]$.

Rješenje: Primjenom logaritamskih pravila imamo:

a) $\log_3 x = \log_3 \dfrac{9 \cdot 2}{3} = \log_3 6 \;\Rightarrow\; x = 6,$

b) $\dfrac{2}{3}\log x = \dfrac{1}{6}\log \dfrac{y}{z} \implies \log x = \dfrac{1}{4}\log \dfrac{y}{z} \implies \log x = \log\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{4}} \implies x = \sqrt[4]{\dfrac{y}{z}}.$ □

Navedimo još nekoliko važnih osobina logaritama.

1. Za $0 < b \neq 1$, vrijedi $b^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_b 1 = 0$. Dakle,

$$\log_b 1 = 0, \quad 0 < b \neq 1. \tag{8}$$

2. Za $0 < b \neq 1$, vrijedi $b^1 = b \Longleftrightarrow \log_b b = 1$. Dakle,

$$\log_b b = 1, \quad 0 < b \neq 1. \tag{9}$$

3. Vrijedi

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n, \quad a > 0,\; 0 < b \neq 1,\; n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Zaista, označimo li s $A = \log_{b^n} a^n$, tada je $(b^n)^A = a^n$, odakle slijedi $b^A = a$, a odavde je $A = \log_b a$.

4. Neka je $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$. Logaritmiranjem jednakosti $b^{\log_b a} = a$ za bazu a, dobijamo $\log_a b^{\log_b a} = \log_a a = 1$, odnosno primjenom drugog logaritamskog pravila i formule (9): $\log_b a \cdot \log_a b = 1$. Dakle,

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad 0 < a \neq 1,\; 0 < b \neq 1. \tag{11}$$

Ova se osobina može smatrati i specijalnim slučajem naredne osobine.

5. Neka je $0 < b \neq 1$, $0 < c \neq 1$, $a > 0$. Označimo s $\log_b a = x$, odakle je $b^x = a$. Nakon logaritmiranja posljednje jednakosti (koristeći bazu c), dobijamo $x \log_c b = \log_c a$, odnosno $\log_b a \log_c b = \log_c a$. Prema tome, vrijedi osobina

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad 0 < b \neq 1,\; 0 < c \neq 1,\; a > 0. \tag{12}$$

Osobina (12) je od velike praktične koristi kada je potrebno preći na logaritam s novom bazom.

6. Vrijedi osobina

$$\log_{b^t} x = \frac{1}{t}\log_b x, \quad 0 < b \neq 1,\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\; x > 0.$$

Zaista, primjenom osobine **4**. dvaput i drugog logaritamskog pravila, dobijamo

$$\log_{b^t} x = \frac{1}{\log_x b^t} = \frac{1}{t \log_x b} = \frac{1}{t}\log_b x.$$

Primjer 2.11. *Ako je* $\log_{30} 3 = x$, $\log_{30} 5 = y$, *izračunati* $\log_{30} 8$.

Rješenje: Primjenom gornjih osobina logaritama, imamo

$$\begin{aligned} \log_{30} 8 &= \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \frac{30}{3 \cdot 5} \\ &= 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3\left(1 - x - y\right). \end{aligned}$$

□

Primjer 2.12. *Odrediti x ako je* $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

Rješenje: Primjenom logaritamskih pravila, dobijamo

$$6 = \frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_x \sqrt{3}} + \frac{1}{\log_x \dfrac{1}{3}} = \frac{1}{\log_x 3} + \frac{2}{\log_x 3} - \frac{1}{\log_x 3},$$

odakle slijedi

$$\frac{2}{\log_x 3} = 6 \iff \log_x 3 = \frac{1}{3} \iff x^{\frac{1}{3}} = 3 \iff x = 27.$$

□

Primjer 2.13. *Dokazati jednakost*

$$\frac{1}{\log_a A} + \frac{1}{\log_{a^2} A} + ... + \frac{1}{\log_{a^n} A} = \frac{n(n+1)}{\log_a A^2} \quad (0 < A \neq 1,\ 0 < a \neq 1,\ n \in \mathbb{N}).$$

Rješenje: Koristeći formulu (11), lijeva strana gornje jednakosti ima oblik

$$\begin{aligned}\log_A a + \log_A a^2 + ... + \log_A a^n &= (1 + 2 + \cdots + n) \log_A a = \frac{n(n+1)}{2} \log_A a \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{\log_a A} = \frac{n(n+1)}{\log_a A^2}.\end{aligned}$$

□

3. Logaritamska funkcija

Definicija 3.1. *Eksponencijalna funkcija*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1, \quad (x \in \mathbb{R})$$

je bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$

koju zovemo ***logaritamskom funkcijom.***

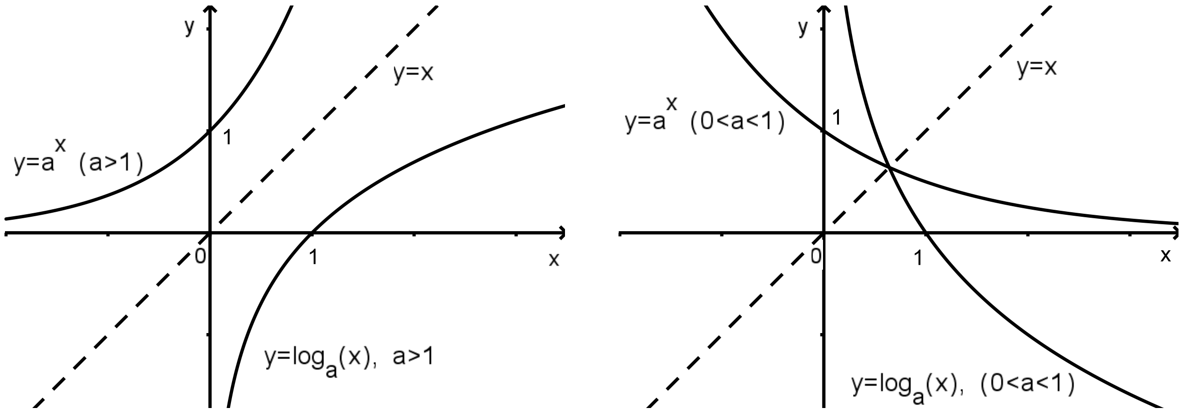
Na osnovu definicije logaritma vrijedi ekvivalencija

$$\log_a x = y \iff x = a^y, \quad x > 0, \quad 0 < a \neq 1.$$

Logaritamska funkcija ima sljedeće osobine (v. grafike na Slici 1):

1. Funkcija $y = \log_a x$ definirana je za svako $x > 0$, a uvjet za bazu je $0 < a \neq 1$.
2. Logaritamska funkcija je bijektivna, pa jednakim brojevima (numerusima) pripadaju jednaki logaritmi za istu bazu i obrnuto, tj.

$$x_1 = x_2 \iff \log_a x_1 = \log_a x_2 \tag{13}$$



(a) (b)

Slika 1: Grafici logaritamskih funkcija: (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$.

3. Znak logaritamske funkcije

$$\text{za} \quad a > 1 \qquad \text{imamo:} \quad \begin{cases} \log_a x < 0 \iff (0 < x < 1), \\ \log_a x > 0 \iff x > 1, \end{cases}$$

$$\text{za} \quad 0 < a < 1 \quad \text{imamo:} \quad \begin{cases} \log_a x > 0 \iff (0 < x < 1), \\ \log_a x < 0 \iff x > 1. \end{cases}$$

4. Logaritamska funkcija ima jednu jedinu nulu (vidjeti (8)), a to je broj 1, za bilo koju bazu $0 < a \neq 1$, tj.

$$\log_a x = 0 \iff x = 1. \tag{14}$$

5. Za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća, tj. za

$$a > 1 : \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2. \tag{15}$$

6. Za $0 < a < 1$ funkcija je strogo opadajuća, tj. za

$$0 < a < 1 : \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2. \tag{16}$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati vrijednosti logaritama:

a) $\log_2 \dfrac{1}{128}$; b) $\log_{\sqrt{2}} 8$; c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$; d) $\log_2 \sqrt[3]{512}$; e) $\log_3 \sqrt[5]{243}$.

2. Odrediti x iz jednadžbi:

a) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$; b) $\log_{\sqrt{2}} x = -8$; c) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$; d) $\log_{4\sqrt{5}} x = -\dfrac{2}{3}$.

3. Izračunati vrijednost izraza:

a) $\frac{5}{4}\log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;

b) $\log_2 \log_2 16 + \log_3 \log_3 27$; c) $5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4-2\log_{25} 5}$.

4. Odrediti oblast definicije (definiciono područje) funkcija:

a) $y = \log_3(1-x^2)$; b) $y = \log(2x^2+5x-3)$.

5. Logaritmirati sljedeće izraze:

a) $x = \dfrac{5a^3 y}{b^4 \sqrt[3]{ay^2}}$; b) $x = \left(\dfrac{c^6 z^2 \sqrt{cd}}{\sqrt[4]{ab^3}}\right)^2$; c) $x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{(y+z)^2 \sqrt[3]{b^2}}\right)^2}$.

6. Odrediti x iz jednadžbi:

a) $\log x = \log 3 + 4\log n - \log 5 - 5\log m - \log p$;

b) $\log x = \log 5 + \frac{1}{2}(\log a + 2\log b) - 2\log d - \frac{2}{5}\log c$.

7. Bez upotrebe logaritamskih tablica ili kalkulatora ispitati šta je veće: $\log_2 3$ ili $\log_3 4$.

8. Dokazati da je

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$$

ako su a i b dužine kateta, a c dužina hipotenuze pravouglog trougla.

4. Logaritamske jednadžbe

Definicija 4.1. ***Logaritamske jednadžbe*** *su jednadžbe u kojima se nepoznanica javlja i pod znakom logaritma.*

Kod ovih jednadžbi vrlo važna karakteristika je njeno definiciono područje. Kao što smo vidjeli u prethodnoj sekciji, izraz

$$\log_{b(x)} a(x)$$

je definiran ako i samo ako je $0 < b(x) \neq 1$, $a(x) > 0$.

Slično kao kod iracionalnih jednadžbi, mogu se riješiti samo neki relativno jednostavniji primjeri logaritamskih jednadžbi. Logaritamsku jednadžbu treba, koristeći se osobinama logaritama, pokušati dovesti na oblik

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Ova se jednadžba zatim rješava koristeći se definicijom logaritma i osobinom logaritamske funkcije (13). Naime, logaritamska jednadžba

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \tag{17}$$

ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \ \wedge\ g(x) > 0 \ \wedge\ f(x) = g(x). \tag{18}$$

Zajednička rješenja prve dvije nejednadžbe sistema određuju domenu jednadžbe (17), a jednadžba $f(x) = g(x)$ slijedi iz formule (13). Pri tome se podrazumijeva uključivanje i definicionih područja funkcija f i g.

Ako umjesto jednadžbe (17) imamo jednadžbu

$$\log_a f(x) = k, \tag{19}$$

možemo je svesti na oblik (17), stavljajući $\log_a a^k$ umjesto k, ili, koristeći definiciju logaritma (v. formulu (3)), možemo je odmah svesti na ekvivalentnu jednadžbu

$$f(x) = a^k.$$

Ukoliko svi logaritmi u datoj jednadžbi nemaju istu bazu, prvo ih treba svesti na istu bazu, koristeći neku od formula (11) ili (12).

Istaknimo sada jednu vrlo važnu činjenicu:

Primjedba 4.2. *Logaritam $\log_b a^p$, za $a < 0$, $0 < b \neq 1$ i p paran broj,* ***ne smijemo zamijeniti*** *s $p \log_b a$, nego s $p \log_b |a|$. Dakle, vrijedi*

$$\log_b a^p = p \log_b |a|\,, \quad a < 0,\ 0 < b \neq 1 \text{ i } p \text{ paran broj.} \tag{20}$$

Primjer 4.3. *Riješiti jednadžbu*

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3\,.$$

Rješenje: $DP : (x+2)^2 \neq 0,\ 4-x > 0,\ x+6 > 0$, tj. $x \in \langle -6, -2 \rangle \cup \langle -2, 4 \rangle$.
Prema gornjoj napomeni, odnosno prema (20), data jednadžba, uz uvjet za DP, je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \cdot 2 \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} &= 3 \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}} (x+6) \\ &\Longleftrightarrow\ \log_{\frac{1}{4}} (|x+2| \cdot 4) = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)(x+6) \\ &\Longleftrightarrow\ 4|x+2| = (4-x)(x+6)\end{aligned}$$

1° $x \in \langle -6, -2 \rangle$

U ovom slučaju imamo

$$-4(x+2) = (4-x)(x+6) \iff x = 1 - \sqrt{33},$$

jer $x = 1 + \sqrt{33} \notin \langle -6, -2 \rangle$.

2° $x \in \langle -2, 4 \rangle$, kada imamo

$$4(x+2) = (4-x)(x+6) \iff x = 2,$$

jer $x = -8 \notin \langle -2, 4 \rangle$.

$R : x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$. □

Primjedba 4.4. *Nekada je definiciono područje vrlo teško odrediti. U takvim slučajevima se ne treba iscrpljivati na tom problemu, već je mnogo zgodnije pronaći sve kandidate za rješenje i neposrednim uvrštvanjem u polaznu jednadžbu odrediti koje je od njih zaista rješenje te jednadžbe.*

Primjer 4.5. *Riješiti jednadžbu*

$$\log_{x^3+2x^2-3x+5} \left(x^3 + 3x^2 + 2x - 1\right) = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$$

Rješenje: Skup dozvoljenih vrijednosti za x (def. područje) je rješenje sistema nejednadžbi

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 1 > 0,\ 0 < x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \neq 1,\ 0 < 2x \neq 1. \tag{21}$$

Ovo definiciono područje se ne može tako jednostavno odrediti (osim, eventualno grafički). Zbog toga ćemo postupiti prema preporuci u prethodnoj napomeni. Naime, uz uvjet (21), data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\log_{x^3+2x^2-3x+5} \left(x^3 + 3x^2 + 2x - 1\right) = 1 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = 1,\ x = -6.$$

Pošto uvjet (21) zadovoljava samo $x = 1$, zaključujemo da je rješenje jednadžbe $x = 1$. □

Primjer 4.6. *Riješiti jednadžbu*

$$x^{\log^2 x+\log x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

Rješenje: $DP: x>0$. Kako je

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}=x,$$

data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned}\left(x^{\log^2 x+3\log x+3}=x\right) &\Longleftrightarrow \left[\log x^{\log^2 x+3\log x+3}=\log x \ \wedge \ \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(\log^2 x+3\log x+3\right)\log x=\log x \ \ \wedge \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(\log^2 x+3\log x+3-1\right)\log x=0 \ \ \wedge \ \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(x=1 \ \vee \ \log^2 x+3\log x+2=0\right) \ \wedge \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left(x=1 \ \vee \ x=\frac{1}{10} \ \vee \ x=\frac{1}{100}\right).\end{aligned}$$

□

Treba istaknuti da su posebno komplicirane **logaritamske jednadžbe s parametrima**. Ilustriraćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 4.7. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje jednadžbe*

$$2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0.$$

Rješenje: $DP: 0<x\neq 1,\ 0<ax\neq 1,\ 0<a^2x\neq 1$; $UP: a>0$ (UP - znači uvjet za parametre). Uočimo odmah da je za $a=1$ rješenje svako $x\in DP$, tj. svako $x\in\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$. Razmotrimo sada slučaj $a\neq 1$. Svođenjem na istu bazu data jednadžba ekvivalentna je s jednadžbom

$$\frac{2}{\log_a x}+\frac{1}{1+\log_a x}+\frac{3}{2+\log_a x}=0.$$

Uvođenjem smjene $\log_a x=t$, posljednja jednadžba se svodi na kvadratnu jednadžbu

$$6t^2+11t+4=0,$$

odakle je $t_1=-\frac{4}{3}, t_2=-\frac{1}{2}$. Vraćanjem smjene dobijamo $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}, x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$. Neposredno provjeravajući u DP, zaključujemo da data jednadžba ima dva rješenja $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$ za $a\neq 1$.

Rezime:

i) za $0<a\neq 1$ jednadžba ima dva rješenja: $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$,

ii) za $a=1$ rješenje jednadžbe je svako $x\in\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$,

iii) za $a\leqslant 0$ jednadžba nema rješenja. □

Primjer 4.8. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati ješenje jednadžbe*

$$\log_a x+|a+\log_a x|\cdot\log_{\sqrt{x}} a=a\log_x a.$$

Rješenje: $DP: 0 < x \neq 1$, a uvjet za parametre je $UP: 0 < a \neq 1$.
Pod navedenim uvjetima, koristeći relaciju (11), data jednadžba se može transformirati na sljedeći način

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{x}} = \frac{a}{\log_a x} \iff \log_a^2 x + 2\,|a + \log_a x| - a = 0.$$

Zbog apsolutne vrijednosti razlikujemo dva slučaja.

i) $a + \log_a x \geqslant 0$, odnosno $t \geqslant -a$, za $t = \log_a x$
U ovom slučaju se data jednadžba svodi na kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 2t + a = 0 \iff t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Očito za $a > 1$ ova kvadratna jednadžba nema realnih rješenja. S obzirom na UP, mora biti $a \in \langle 0, 1\rangle$. Preostaje provjeriti da li t_1 i t_2 zadovoljavaju uvjet $t \geqslant -a$, za $a \in \langle 0,1\rangle$. Neposredno se provjerava da taj uvjet zadovoljava samo $t = -1 + \sqrt{1-a}$, odakle, nakon vraćanja smjene, dobijamo rješenje date jednadžbe u obliku $x = a^{-1+\sqrt{1-a}}$ za $a \in \langle 0,1\rangle$.

ii) $a + \log_a x < 0$, odnosno $t < -a$, za $t = \log_a x$
Sada se data jednadžba svodi na kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2t - 3a = 0 \iff t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3a}.$$

Zbog UP slijedi da su rješenja ove kvadratne jednadžbe realna. Preostaje provjeriti da li t_1 i t_2 zadovoljavaju uvjet $t < -a$. Neposredno se provjerava da taj uvjet zadovoljava samo $t = 1 - \sqrt{1+3a}$, ali za $a \in \langle 0,1\rangle$, odakle, nakon vraćanja smjene, dobijamo rješenje date jednadžbe u obliku $x = a^{1-\sqrt{1+3a}}$ za $a \in \langle 0,1\rangle$.
Rezime:
1° za $a \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle$ jednadžba nema rješenja,
2° za $a \in \langle 0,1\rangle$ jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = a^{-1+\sqrt{1-a}}$, $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$. □

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti jednadžbe 1-8.

1. a) $\log x + \log(x+3) = 1$, b) $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$.

2. a) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2 = \log_{\frac{1}{2}}(10+3x-x^2) - 1$, b) $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

3. a) $\dfrac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2\left(x^3+2x^2-3x+5\right)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2$, b) $\dfrac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$.

4. a) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} = 1$. b) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$.

5. a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$.

6. a) $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5.5$, b) $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$.

7. a) $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$, b) $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \dfrac{1}{4}\log 16 - \sqrt{x+0,25}\log 4$.

8. a) $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$, b) $(x+1)^{\log_3(x-2)} + 2\,(x-2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

9. Naći sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ za koju jednadžba

$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$$

ima tačno jedno rješenje.

U ovisnosti o realnom parametru a riješiti jednadžbe 10-12.

10. a) $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$, b) $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$.

11. a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$, b) $\dfrac{1}{2}\log_a(1+x) + 3\log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}\left(1-x^2\right)^2 + 2$.

12. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1$.

5. Logaritamske nejednadžbe

Definicija 5.1. ***Logaritamske nejednadžbe*** *su nejednadžbe u kojima se nepoznanica javlja i pod znakom logaritma.*

Razmatrat ćemo logaritamske nejednadžbe koje se primjenom definicije logaritma i logaritamskih osobina mogu svesti na nejednadžbu oblika

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{22}$$

ili oblika

$$\log_a f(x) < k. \tag{23}$$

Nejednadžbe koje se svode na nejednadžbe, a koje se od posljednjih dviju razlikuju samo po prirodi nejednakosti, analogno se razmatraju.

Na osnovu formula (15) i (16) vrijedi slijedeće:

i) ako je $a > 1$, nejednadžba (22) je ekvivalentna sistemu nejednadžbi

$$f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \wedge \ f(x) < g(x),$$

ii) ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna sistemu nejednadžbi

$$f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \wedge \ f(x) > g(x).$$

Nejednadžba (23) se, uz uvjet $f(x) > 0$, svodi na nejednadžbu

$$f(x) < a^k \quad \text{za} \quad a > 1,$$

odnosno na nejednadžbu

$$f(x) > a^k \quad \text{za} \quad 0 < a < 1.$$

Pri tome, naravno, mora se voditi računa i o definicionim područjima funkcija f i g.

Primjer 5.2. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_3\left(x^2 - 5x + 7\right) \leqslant 0.$$

Rješenje: Budući da je $x^2-5x+7>0$ za sve $x\in\mathbb{R}$ (jer je odgovarajuća diskriminanta $D=-3<0$), to je $DP: x\in\mathbb{R}$. Zbog toga i zbog činjenice da je baza logaritma veća od 1, data nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi $x^2-5x+7\leqslant 1$, odakle se dobija rješenje: $x\in[2,3]$. □

Primjer 5.3. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-2x-x^2}{14} \geqslant 1. \tag{24}$$

Rješenje: Odredimo prvo područje dozvoljenih vrijednosti za x. Naime, istovremeno moraju biti ispunjeni uvjeti:

$$\frac{24-2x-x^2}{14}>0 \ \text{ i } \ 0<\frac{25-x^2}{16}\neq 1,$$

to jest

$$\begin{aligned}
\frac{24-2x-x^2}{14} &> 0 \iff x\in\langle -6,4\rangle\,,\\
\frac{25-x^2}{16} &> 0 \iff x\in\langle -5,5\rangle\,,\\
\frac{25-x^2}{16} &\neq 1 \iff 9-x^2\neq 0 \iff x\neq\pm 3.
\end{aligned}$$

Dakle, područje dozvoljenih vrijednosti za x je

$$DP: \quad x\in\langle -5,-3\rangle\cup\langle -3,3\rangle\cup\langle 3,4\rangle\,. \tag{25}$$

Razlikujemo dva slučaja:

i) $\dfrac{25-x^2}{16}>1$, tj. $x\in\langle -3,3\rangle$ i tada je nejednadžba (24) ekvivalentna s

$$\frac{24-2x-x^2}{14}\geqslant\frac{25-x^2}{16} \iff x^2+16x-17\leq 0 \iff x\in[-17,1]\,.$$

Odatle se dobija sljedeći podskup rješenja

$$R_1=\langle -3,3\rangle\cap[-17,1]=\langle -3,1]\,.$$

ii) $0<\dfrac{25-x^2}{16}<1$, što zajedno s DP znači da je $x\in\langle -5,-3\rangle\cup\langle 3,4\rangle$ i tada je nejednadžba (24) ekvivalentna s

$$\frac{24-2x-x^2}{14}\leqslant\frac{25-x^2}{16} \iff x\in\langle -\infty,-17]\cup[1,+\infty\rangle\,.$$

Odatle se dobija drugi podskup rješenja

$$R_2=(\langle -5,-3\rangle\cup\langle 3,4\rangle)\cap(\langle -\infty,-17]\cup[1,+\infty\rangle)=\langle 3,4\rangle\,.$$

Rezultat: $R=R_1\cup R_2=\langle -3,1]\cup\langle 3,4\rangle\,.$ □

Primjer 5.4. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_{|x+4|}2\cdot\log_2\left(x^2-5x+4\right)\geqslant 1.$$

Rješenje: Svodeći sve logaritme na istu bazu, tj. $|x+4|$, data se nejednadžba može napisati u obliku

$$\log_{|x+4|}\frac{x^2-5x+4}{|x+4|}\geqslant 0.$$

Posljednja nejednadžba je ekvivalentna disjunkciji

$$\left(0<|x+4|<1\ \wedge\ 0<\frac{x^2-5x+4}{|x+4|}\leqslant 1\right)\vee\left(|x+4|>1\ \wedge\ \frac{x^2-5x+4}{|x+4|}\geqslant 1\right)$$

koja je zadovoljena ako i samo ako je $x\in\langle-\infty,-5\rangle\cup\langle-3,0]\cup[6,+\infty\rangle$. □

Logaritamske nejednadžbe s parametrima su posebno komplicirane i zahtijevaju vrlo obazriv pristup u rješavanju. Ilustrirajmo to sljedećim primjerima.

Primjer 5.5. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje nejednadžbe*

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1.$$

Rješenje: $DP: x\in\mathbb{R}$. Zbog uvjeta za bazu logaritma razmatrat ćemo dva odvojena slučaja.

1° $a(a+1)>1$, tj.

$$a\in\left\langle-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right\rangle. \tag{26}$$

Za ove vrijednosti parametra a data nejednadžba je ekvivalentna s (zbog zamjene $1=\log_{a(a+1)}a(a+1)$)

$$|x|\quad>a(a+1)-4. \tag{27}$$

Sada su moguća ova dva slučaja:

i) $a(a+1)-4<0$, tj. $a\in\left\langle\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\rangle$, što zajedno s (27) daje

$$a\in\left\langle\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\rangle.$$

Tada je nejednadnadžba (27) zadovoljena za svako $x\in\mathbb{R}$, a time je, u ovom slučaju, rješenje polazne nejednadžbe svako $x\in\mathbb{R}$.

ii) $a(a+1)-4\geq 0$, tj. $a\in\left\langle-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right\rangle$, što zajedno s (26) daje

$$a\in\left\langle-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right\rangle.$$

Tada je $-a(a+1)+4<a(a+1)-4$, pa vrijedi

$$(27)\Longleftrightarrow x\in\langle-\infty,-a(a+1)+4\rangle\cup\langle a(a+1)-4,+\infty\rangle.$$

2° $0<a(a+1)<1$, tj. $a\in\left\langle\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right\rangle\cup\left\langle 0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$

Za ove vrijednosti parametra a data nejednadžba je ekvivalentna s nejednadžbom

$$|x|<a(a+1)-4\,(<1-4=-3),$$

što je nemoguće za bilo koje $x \in \mathbb{R}$, tj. u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja. Ovome treba pridodati i preostali slučaj, tj. za $a \in [-1, 0]$ i $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ nejednadžba nema rješenja, jer tada baza logaritma ne zadovoljava uvjet pozitivnosti i različitosti od 1.

Rezime

1. Za $a \in \left\langle -\infty, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty \right\rangle$ rješenje je

$$x \in \langle -\infty, -a(a+1)+4 \rangle \cup \langle a(a+1)-4, +\infty \rangle .$$

2. Za $a \in \left\langle \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rangle$ rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$.
3. Za $a \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$ nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 5.6. *Naći sve vrijednosti realnog parametra a za koje nejednakost*

$$\log_{\frac{a}{a+1}} \left(x^2+2\right) > 1$$

vrijedi za sve realne vrijednosti x.

Rješenje: $DP : x \in \mathbb{R}$. Zbog uvjeta za bazu logaritma razmatrat ćemo dva slučaja.

1° $\dfrac{a}{a+1} > 1$, tj. $\dfrac{-1}{a+1} > 0 \Longleftrightarrow a < -1$

Tada je data nejednadžba ekvivalentna s

$$x^2+2 > \frac{a}{a+1} \iff x^2 > \frac{a}{a+1} - 2 \iff x^2 > \frac{-a-2}{a+1},$$

što je zadovoljeno za sve $x \in \mathbb{R}$ samo ako je $\dfrac{-a-2}{a+1} < 0$, to jest (uzimajući i da je $a < -1$) ako je $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$.

2° $0 < \dfrac{a}{a+1} < 1$, tj. $a \in \langle 0, +\infty \rangle$

Tada imamo

$$x^2+2 < \frac{a}{a+1} \iff x^2 < -\frac{a+2}{a+1} < 0,$$

što je nemoguće, tj. $x \in \emptyset$.

R : Samo za $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$, data nejednakost vrijedi za sve realne vrijednosti x. □

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti nejednadžbe 1-8.

1. a) $\log(x+2) - \log x > 1$, b) $\log(x-4) - \log(x+1) \leqslant 1$.

2. a) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log\ _2 x - 1} < 1,$ b) $\log \dfrac{6}{x} > \log(x+5).$

3. a) $\log_3 \left(x^2 - 5x + 6\right) < 0,$ b) $\log_{0,1} \left(x^2 + 1\right) < \log_{0,1}(2x+9).$

4. a) $\log_{2x} \left(x^2 - 5x + 6\right) < 1,$ b) $\log_{25}(3x+4) \cdot \log_{\sqrt{x}} \sqrt{25} > 1.$

5. a) $2 \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 < \log_{9\sqrt{x}} 3,$ b) $\log_{1+\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{7}{4x} + \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 1.$

6. a) $\log_{1-x^2} \left(2 - \dfrac{5x}{2}\right) \geqslant 1,$ b) $\left(4x^2 - 8x - 5\right) \log_3 (x+1) < 0.$

7. a) $\left(4x^2 - 16x + 7\right) \log_2 (x-3) > 0,$ b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} \left(5^{x+1} - 25^x\right) > -2.$

8. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(3^{x+1} - 9^x\right) > -2.$

U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenja nejednadžbi 9-10.

9. $\log_a^4 x - \log_{\frac{1}{a}}^2 \dfrac{x^5}{a^2} - 20 \log_a x + 148 < 0.$

10. $\log_{\sqrt{a}} \left(\sqrt{x+a} - x + \sqrt{a}\right) \geqslant 1.$

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 2(1) (2019), 21-33.

[6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 3(1) (2020), 2-10.

[7] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 49–61

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama

Mehmed Nurkanović[a], Mirsad Trumić[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se, u nekoliko specijalno odabranih primjera, uz komparativan pristup, ispituje konvergencija nizova koji su zadani rekurentnim formulama s konstantnim koeficijentima. Koriste se metodi standardne teorije nizova iz matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija i metodi diferentnih jednadžbi.

1. Uvod

Poznata je činjenica iz metodike nastave matematike da je određeni zadatak dobro riješiti na više načina, koristeći raličite metode, o čemu se više govori u [3]. U nekim slučajevima jedan metod ima preimućstvo nad drugim, što ćemo pokazati u ovom radu. Kada treba ispitati konvergenciju niza koristeći metode matematičke analize, onda to uglavnom radimo tako što pokažemo da je niz monoton i ograničen. U slučaju kada je niz zadan nekom rekurentnom formulom vrlo često se pokazuje samo konvergencija niza, a samu graničnu vrijednost niza je teško ili nemoguće izračunati bez korištenja metoda diferentnih jednadžbi. I kod jednog i kod drugog postupka (monotonost i ograničenost) javljaju se kognitivne prepreke, jer nailazimo na različite problemske situacije. Svaki novi zadatak podrazumijeva neke druge (nove) tehnike rješavanja. Međutim, ako problem rješavamo primjenom metoda diferentnih jednadžbi, onda je postupak ponekad značajno jednostavniji (naravno, samo u situaciji kad se diferentna jednadžba može riješiti, [4]). U ovom slučaju je potrebno naći opći član niza te odrediti njegov limes. Kako ćemo se, dakle, u radu baviti nizom koji je zadan rekurentnom formulom, potrebno ga je definirati.

Definicija 1.1. *Za niz x_n kažemo da je zadan rekurentno ako je zadano nekoliko prvih članova niza i pravilo po kojem se x_n računa pomoću nekoliko prethodnih članova niza.*

Rekurentne formule su ekvivalentne s diferentnim jednadžbama, stoga navodimo definiciju i teorem koji slijede, a neophodni su nam u narednoj sekciji [1, 5, 6].

Definicija 1.2. *Neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Tada se jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

naziva linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda s konstantnim koeficijentima.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: niz, rekurentna formula, monotonost, ograničenost, metod diferentnih jednadžbi
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: maj 2021.

Teorem 1.3. *Linearna diferentna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima (1), u slučaju $a \neq 1$, ima rješenje:*

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

2. Primjeri ispitivanja konvergencije nizova

Primjer 2.1. *Data su dva niza prirodnih brojeva:*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2p_n + 3q_n, \qquad p_1 = 2, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n, \qquad q_1 = 1. \end{aligned}$$

Dokazati da je niz $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentan.*

Rješenje: *Prvi način*
Riješimo ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize (teorija nizova). Uočimo da vrijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(2p_n + 3q_n) - p_n(p_n + 2q_n)}{q_n(p_n + 2q_n)} = \frac{3q_n^2 - p_n^2}{q_n(p_n + 2q_n)} < 0$$

ako i samo ako je $\dfrac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za sve $n = 1, 2, ...$, a što se dokazuje matematičkom indukcijom. Naime, očito je $\dfrac{p_1}{q_1} = 2 > \sqrt{3}$. Iz pretpostavke da vrijedi $\dfrac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za neki prirodni broj $n > 1$, slijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2p_n + 3q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = 2 - \frac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} > 2 - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3},$$

to jest, po principu potpune matematičke indukcije je $\dfrac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za svaki prirodni broj n. To znači da je niz $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ strogo monotono opadajući i ograničen je odozdo s $\sqrt{3}$. Zbog toga je taj niz i konvergentan.

Drugi način
Rekurentne formule za nizove p_n i q_n mogu se promatrati kao sistem diferentnih jednadžbi prvog reda koji se u matričnom obliku može napisati kao

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n = 1, 2, ...$$

pri čemu je

$$X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje sistema je $X_n = A^n X_0$, a matricu A^n izračunat ćemo koristeći Hamilton-Cayleyev teorem. Iz karakterističnog polinoma matrice A

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

dobiju se svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \quad i \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3},$$

pa je

$$A^n = C_1 \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right)^n, \tag{3}$$

gdje su C_1 i C_2 konstantne matrice. Njih ćemo odrediti koristeći početne uvjete. Za $n = 0$ imamo

$$A^0 = C_1 + C_2 \Longrightarrow I = C_1 + C_2,$$

a za $n = 1$ je

$$A = C_1 \left(2 + \sqrt{3}\right) + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right),$$

odakle se dobije

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zamjenom u (3), imamo

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] & \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] & \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{bmatrix}$$

Kako je $X_n = A^n X_0$, konačno dobijamo

$$X_n = \begin{bmatrix} \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{bmatrix},$$

odnosno

$$p_n = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)^n,$$

$$q_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)^n.$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

Primjedba 2.2. *Na ovaj drugi način dobili smo preciznu graničnu vrijednost niza, što je prednost u odnosu na prethodni, prvi način, gdje je ustanovljena samo konvergencija niza.*

Primjer 2.3. *Neka je dat niz realnih brojeva:*

$$x_1 = a, \;\; x_2 = b, \;\; x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \;\; (n = 3, 4, ..).$$

Ispitati konvergenciju datog niza i u slučaju konvergencije izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rješenje: *Prvi način*
Riješimo i ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija matematike. Očito je da ovaj iterativni postupak predstavlja dobro poznati metod polovljenja intervala. Primijetimo da je za $a = b$ niz konstantan, to jest vrijedi $x_n = a = b$ $(n = 1, 2, ...)$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = b$. Zato pretpostavimo da je $a < b$ (analogno bi se dokazivalo i u slučaju $a > b$). Naime, ako uvedemo oznake

$$I_n = [x_n, x_{n+1}], \quad n = 1, 2, ...,$$

onda će nam $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ predstavljati niz umetnutih (gnijezdo) zatvorenih intervala jer je

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad d(I_n) = \frac{d(I_1)}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, ...$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} d(I_n) = 0$. Prema odgovarajućem teoremu (teorem o gnijezdu) postoji tačno jedan realan broj c takav da je $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ i pri tome su nizovi $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ monotoni (prvi monotono rastući, a drugi monotono opadajući) i, budući da svi članovi tih nizova leže u $[a, b]$, oni su i ograničeni, pa zbog toga i konvergentni i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = c$. Preostaje samo odrediti broj c. To se može postići induktivnim putem na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = x_{2\cdot 2-1} = \frac{a+b}{2}, \quad x_4 = x_{2\cdot 2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{a + (1+2)\,b}{2^{2\cdot 2-2}},\\
&x_5 = x_{2\cdot 3-1} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+(1+2)b}{2^2}}{2} = \frac{(1+2)\,a + \left(1+2^2\right) b}{2^{2\cdot 3-3}},\\
&x_6 = x_{2\cdot 3} = \frac{\frac{a+(1+2)b}{2^2} + \frac{(1+2)a+\left(1+2^2\right)b}{2^3}}{2} = \frac{\left(1+2^2\right) a + \left(1+2+2^3\right) b}{2^{2\cdot 3-2}},\\
&x_7 = x_{2\cdot 4-1} = \frac{\frac{(1+2)a+\left(1+2^2\right)b}{2^3} + \frac{\left(1+2^2\right)a+\left(1+2+2^3\right)b}{2^4}}{2} = \frac{\left(1+2+2^3\right) a + \left(1+2^2+2^4\right) b}{2^{2\cdot 4-3}},\\
&x_8 = x_{2\cdot 4} = \frac{\frac{\left(1+2^2\right)a+\left(1+2+2^3\right)b}{2^4} + \frac{\left(1+2+2^3\right)a+\left(1+2^2+2^4\right)b}{2^5}}{2} = \frac{\left(1+2^2+2^4\right) a + \left(1+2+2^3+2^5\right) b}{2^{2\cdot 4-2}},
\end{aligned}$$

iz čega se mogu naslutiti opće formule

$$\begin{aligned}
x_{2k-1} &= \frac{\left(1+2+2^3+...+2^{2k-5}\right) a + \left(1+2^2+...+2^{2k-4}\right)}{2^{2k-3}} = \frac{\left(1 + 2\cdot\frac{\left(2^2\right)^{k-2}-1}{2^2-1}\right) a + \frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1} b}{2^{2k-3}},\\
x_{2k} &= \frac{\left(1+2^2+...+2^{2k-4}\right) a + \left(1+2+2^3+...+2^{2k-3}\right) b}{2^{2k-2}} = \frac{\frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1} a + \left(1 + 2\cdot\frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1}\right) b}{2^{2k-2}},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
x_{2k-1} &= \frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{3\cdot 2^{2k-3}},\\
x_{2k} &= \frac{a+2b}{3} - \frac{a-b}{3\cdot 2^{2k-2}},
\end{aligned}$$

za $k \in \{1, 2, ...\}$.

Primjenom potpune matematičke indukcije dokazuje se potpuna ispravnost prethodnih općenitih formula za članove nizova s parnim i s neparnim indeksima. Sada je očito da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{a+2b}{3}.$$

Drugi način
Jednakost $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ možemo napisati u obliku: $2x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$, što predstavlja homogenu diferentnu jednadžbu drugog reda. Njena karakteristična jednadžba je

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Opće rješenje spomenute diferentne jednadžbe je oblika:

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Odredimo konstante C_1 i C_2, koristeći početne uvjete x_1 i x_2. Za $n = 1$ imamo

$$x_1 = C_1 + C_2\left(\frac{-1}{2}\right) \Longrightarrow a = C_1 - \frac{C_2}{2},$$

a za $n = 2$ je

$$x_1 = C_1 + C_2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \Longrightarrow b = C_1 + \frac{C_2}{4}.$$

Rješavanjem posljednjeg sistema dobijemo $C_1 = \dfrac{a+2b}{3}$ i $C_2 = \dfrac{4(b-a)}{3}$, pa je rješenje diferentne jednadžbe:

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Sada možemo naći limes niza x_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = \frac{a+2b}{3}$$

□

Primjedba 2.4. *Prethodni primjer u najboljoj mjeri pokazuje da je ponekad metod diferentnih jednadžbi znatno jednostavniji od metoda standardne matematičke analize.*

Primjer 2.5. *Dokazati da je niz zadat rekurentnom relacijom:*

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2}, \quad n \in N,$$

konvergentan.

Rješenje: *Prvi način*
Primijetimo prvo da će niz biti strogo monotono rastući (jer je $a_1 = 0$) ako i samo ako vrijedi

$$2(a_{n+1} - a_n) = 3 - a_n > 0 \Longleftrightarrow a_n < 3 \ (n = 1, 2, ...).$$

Matematičkom indukcijom dokažimo da je zaista $a_n < 3$ za $n = 1, 2, \ldots$. Naime, za $n = 1$ nejednakost je očito tačna. Koristeći pretpostavku da vrijedi $a_n < 3$ za neko $n > 1$, imamo

$$a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2} < \frac{3+3}{2} = 3,$$

pa je na osnovu principa potpune matematičke indukcije tačna nejednakost $a_n < 3$ za sve $n = 1, 2, \ldots$. To ujedno znači da je niz i ograničen odozgo s 3. Zbog toga je on i konvergentan.

Drugi način

Jednadnakost $a_{n+1} = \dfrac{3 + a_n}{2}$, možemo napisati i kao

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n + \frac{3}{2},$$

što predstavlja nehomogenu linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda s konstantnim koeficijentima, čije je opće rješenje dato u obliku (prema Teoremu 1.3)

$$a_n = \left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a},$$

gdje je $\alpha = a_0 = 0$ početni uvjet. Zbog toga je

$$a_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3,$$

iz čega neposredno slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) = 3.$$

□

Primjedba 2.6. *I u ovom slučaju, metodom matematičke analize (prvi način) ustanovili smo samo konvergenciju datog niza, a metodom diferentnih jednadžbi (drugi način) izračunali smo tačnu graničnu vrijednost niza.*

Primjer 2.7. *Neka je dat niz formulom*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3, \tag{4}$$

pri čemu su početni uvjeti $a_1 = a_2 = 1$ (dobro poznati Fibonaccijev niz, [1, 2, 5, 6]). Naći

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Rješenje: Jednakost (4) možemo napisati u obliku diferentne jednadžbe

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad n \geq 3. \tag{5}$$

Odgovarajuća karakteristična jednadžba jednadžbe (5) je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zato opće rješenje date jednadžbe (5) ima oblik

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstante C_1 i C_2 odredit ćemo koristeći početne uvjete

$$\begin{aligned} n=1 &\Longrightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1, \\ n=2 &\Longrightarrow a_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_2 = 1, \end{aligned}$$

odakle se dobija da je $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pa je rješenje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Pošto smo našli opći član niza (4), sada možemo izračunati tražene limese

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}\right)^{-\frac{(1+\sqrt{5})^n}{(1-\sqrt{5})^n}}\right]^{-\frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-\sqrt{5})^n}{n(1+\sqrt{5})^n}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^0 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

b) (v. sličan postupak u [2, 5, 6])

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

□

Primjedba 2.8. *Vidimo da smo u oba slučaja kao rezultat izračunavanja limesa dobili konstantu* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *poznatu kao* **zlatni presjek.**

Primjedba 2.9. *Iz teorije nizova u matematičkoj analizi poznato je da, ukoliko postoji limes b), postoji i limes a) i oni su međusobno jednaki. Naime, koristeći Stolzov teorem, imamo*

$$\begin{aligned} \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\triangle(\ln a_n)}{\triangle(n)} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

U prethodnom primjeru smo to samo dodatno potvrdili.

Primjer 2.10. *Ispitati konvergenciju niza zadanog rekurentnom formulom*

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

uzimajući da je $0 \leq x_0 < 2$.

Rješenje: *Prvi način*
Upotrijebimo prvo metode iz teorije nizova. Očito je da vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2 + x_0} < \sqrt{2 + 2} = 2, \\ x_2 &= \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2 + 2} = 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

i ako pretpostavimo da je za neki prirodni broj $n > 1$ tačna nejednakost $x_n < 2$, tada je

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Dakle, primjenom principa potpune matematičke indukcije zaključujemo da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ograničen odozgo s 2. S druge strane, iz (6) slijedi

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n > x_n^2,$$

ako je

$$x_n^2 - x_n - 2 < 0,$$

a što je sigurno zadovoljeno za $0 \leq x_n < 2$. Dakle, $x_{n+1} > x_n$ za sve $n = 0, 1, 2, ...$, što znači da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo monotono rastući, pa je, zbog ograničenosti odozgo s 2, ujedno i konvergentan niz.

Drugi način
Jednakost (6) možemo razmatrati kao nelinearnu diferentnu jednadžu prvog reda. Uvedimo smjenu: $x_n = 2\cos(2z_n)$. Tada (6) poprima oblik

$$2\cos(2z_{n+1}) = \sqrt{2 + 2\cos(2z_n)},$$

odnosno,

$$\cos(2z_{n+1}) = \cos(z_n),$$

odakle je

$$z_{n+1} = \pm\frac{1}{2}z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Razmotrimo ove slučajeve odvojeno.

i) $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opće rješenje ove jednadžbe je, prema (2),

$$z_n = (z_0 - 2k\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pri tome je

$$x_0 = 2\cos(2z_0) \Longrightarrow z_0 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

što implicira

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 2k\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednadžbe

$$x_n = 2\cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4k\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4k\pi\right), \; n = 0, 1, 2, ..., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos(4k\pi) = 2 \cdot 1 = 2,$$

što znači da je niz konvergentan.

ii) $z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opće rješenje ove jednadžbe je, prema (2),

$$z_n = \left(z_0 - \frac{2k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

odnosno

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednadžbe

$$x_n = 2\cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{4k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4k\pi}{3}\right), \; n = 0, 1, 2, ..., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Zbog činjenice da je $x_n > 0$ za sve $n = 1, 2, ...$, u obzir dolazi samo slučaj $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

□

Primjer 2.11. *Neka je dat niz*

$$a_{n+1} = a + b - \frac{ab}{a_n} \qquad n = (1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rješenje: Jednakost (7) možemo napisati u obliku

$$a_{n+1} = \frac{(a+b)a_n - ab}{a_n} \qquad n = (1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

što je ustvari Riccatijeva diferentna jednadžba.Uvodenjem smjene $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, ta se jednadžba transformira u linearnu jednadžbu oblika

$$b_{n+2} - (a+b)b_{n+1} + abb_n = 0. \tag{9}$$

Jednadžba (9) ima karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0,$$

čiji su korijeni $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$, pa je njeno opće rješenje

$$b_n = C_1 a^n + C_2 b^n.$$

Vraćanjem u smjenu dobijamo rješenje polazne jednadžbe

$$a_n = \frac{C_1 a^{n+1} + C_2 b^{n+1}}{C_1 a^n + C_2 b^n}, \tag{10}$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Potrebno je razmatrati dva slučaja

i) $C_2 \neq 0$
Tada je

$$a_n = \frac{Ca^{n+1} + b^{n+1}}{Ca^n + b^n},$$

gdje je $C = \frac{C_1}{C_2}$. U zavisnosti od toga da li je a jednako, manje ili veće od b razlikujemo sljedeće situacije.

1° Ako je $a = b$, tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(C+1)a^{n+1}}{(C+1)a^n} = a = b.$$

2° Ako je $a < b$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aC(\frac{a}{b})^n + b}{C(\frac{a}{b})^n + 1} = b.$$

3° Ako je $a > b$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aC + b(\frac{b}{a})^n}{C + (\frac{b}{a})^n} = a.$$

ii) $C_2 = 0$
U ovom slučaju se dobije još jedno rješenje date jednadžbe, konstantan niz

$$a_n = a \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

□

Primjer 2.12. *Nizovi* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *i* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *zadani su rekurentnim formulama*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n),\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n),\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ n = 0, 1, 2, ...,$$

gdje su $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.
Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Rješenje: Dati sistem se može napisati u matričnom obliku

$$X_{n+1} = AX_n,$$

gdje je

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Pošto vrijedi

$$X_n = A^n X_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

to je dovoljno naći matricu A^n. Problem ćemo riješiti korištenjem Hamilton-Cayleyevog teorema, prema kojem je

$$k(A) = \mathbf{0},$$

gdje je $k(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A, a $\mathbf{0}$ nula matrica. Kako je

$$k(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{-4\lambda^3 + 3\lambda + 1}{4},$$

prema Hamilton-Cayleyevom teoremu imamo

$$4A^3 - 3A - I = 0,$$

odnosno,

$$4A^{n+3} - 3A^{n+1} - A^n = 0,$$

što predstavlja linearnu diferentnu jednadžbu trećeg reda s konstantnim koeficijentima. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$, odakle je onda,

$$A^n = C_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (C_2 + C_3 n), \tag{11}$$

gdje su C_1, C_2 i C_3 konstantne matrice koje treba naći koristeći početne uvjete.

Za $n = 1$ imamo,

$$A = C_1 - \frac{1}{2}C_2 - C_3\frac{1}{2}.$$

Za $n = 2$ je

$$A^2 = C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_3,$$

dok je za $n = 3$

$$A^3 = C_1 - \frac{1}{8}C_2 - \frac{3}{8}C_3.$$

Odavde se dobija

$$C_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem C_1, C_2 i C_3 u (11), imamo,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c \\ (1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c \\ (1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}\Big[(1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c\Big], \\ b_n &= \frac{1}{3}\Big[(1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c\Big], \\ c_n &= \frac{1}{3}\Big[(1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c\Big]. \end{aligned}$$

Tražene granične vrijednosti su

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\Big[(1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-1(-\frac{1}{2})^n)b + (1-1(-\frac{1}{2})^n)c\Big] = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\Big[(1-1(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-1(-\frac{1}{2})^n)c\Big] = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\Big[(1-1(-\frac{1}{2})^n)a + (1-1(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c\Big] = \frac{1}{3}(a+b+c).$$

□

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da je niz zadan s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 4}{4a_n + 5}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

konvergentan.

2. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{ab}{a + b - a_n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = \dfrac{ab}{a+b}$.

a) Naći opći član niza a_n.

b) Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = 1$. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{1}{4(1 - a_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = 0$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Literatura

[1] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.), Springer, New York, 2005.
[2] A. Nurkanović, A. Muminagić: Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva, *Evolventa*, 1(2), 20-26, 2018.
[3] A. Muminagić: Jedan zadatak s više načina rješavanja, *Evolventa*, 2(1), 2-11, 2019.
[4] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, 1(1), 2-5, 2018.
[5] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
[6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 62–74

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Kompleksni brojevi i trigonometrijske jednakosti

Mehmed Nurkanović

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla

Sažetak: Često se na takmičenjima iz matematike učenika srednjih škola, kao i na ispitima kod studenata na fakultetima, pojavljuju problemi iz trigonometrije (posebno problemi dokazivanja raznih trigonometrijskih jednakosti ili nejednakosti) koji znaju biti izazovni i za najbolje među njima. U ovom radu će biti demonstrirana upotreba kompleksnih brojeva u trigonometriji pri dobijanju nekih vrlo specifičnih jednakosti, koristeći osobine n-tog korijena jedinice, binomnu formulu, geometrijski niz ili neku drugu ideju.

1. Uvod

Nekada trigonometrijski problemi mogu zadavati popriličnu glavobolju studentima na ispitima kao i učenicima koji se spremaju za takmičenja. Koristiti isključivo trigonometrijski ili općenito geometrijski metod u njihovom rješavanju zna biti često vrlo komplicirano i naizgled nemoguća misija. Budući da kompleksni brojevi mogu biti predstavljeni na tri različita načina, od kojih je jedan u trigonometrijskom obliku (ostala dva su: algebarski i Eulerov), to se nameće ideja o mogućnosti primjene kompleksnih brojeva u rješavanju takvih problema. Problemi dokazivanja nekih trigonometrijskih jednakosti mogu biti riješeni ponekad upotrebom potpune matematičke indukcije. Međutim, ukoliko je problem oblika da se izračuna neka suma ili proizvod nekih trigonometrijskih funkcija, onda to poprima znatno veću težinu. Ideja ovog rada je da ilustriramo primjenu kompleksnih brojeva s nekoliko zanimljivih primjera dobijanja nekih trigonometrijskih jednakosti. No, prije toga podsjetimo se nekih baznih činjenica o kompleksnim brojevima. Prije svega, kako je već rečeno, kompleksan broj možemo predstaviti u sljedećim oblicima:

a) algebarskom

$$z = a + ib,$$

b) trigonometrijskom

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

i

c) Eulerovom

$$z = |z| e^{i\varphi}, \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: kompleksan broj, n-ti korijen jedinice, binomna formula, geometrijski niz, Moivreova formula
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

pri čemu je: $a = \mathrm{Re}\{z\}$, $b = \mathrm{Im}\{z\}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i φ je ugao koji se dobije iz jednakosti

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Važno je istaknuti još i sljedeće:

$$i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1, \ i^{4k+3} = -i, \ k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

i da vrijedi tzv. *Moivreova formula*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3}$$

2. Primjena n-tog korijena jedinice

U mnogim problemima iz trigonometrije moguće je primijeniti metod kompleksnih brojeva u slučaju korištenja osobina n-tog korijena jedinice (n je prirodan broj). Prisjetimo se tog fenomena. Naime,

$$z^n - 1 = 0 \Longleftrightarrow z^n = e^{2k\pi i} \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Longleftrightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} \ (k = 1, 2, ..., n).$$

Znamo da algebarska jednadžba n-tog stepena ima n rješenja u skupu kompleksnih brojeva, računajući pri tome i višestrukost pojedinih rješenja (osnovni teorem algebre). Tako se brojevi z_k, $k = 1, 2, ..., n$, zovu n-tim korijenima jedinice. Oni geometrijski predstavljaju vrhove pravilnog n-tougla koji su raspoređeni na jediničnoj kružnici (s centrom u koordinatnom početku) u kompleksnoj ravni.
Uzmemo li specijalno $n = 5$, imamo jednadžbu

$$z^5 - 1 = 0, \tag{4}$$

za koju znamo da su joj rješenja 5-i korijeni jedinice: 1, $e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $e^{\frac{8\pi}{5}i}$. S druge strane, jednadžbu (4) možemo riješiti i na drugi način i tako njena rješenja dobiti u algebarskom obliku, koja ćemo moći uporediti s već dobijenim oblicima rješenja u Eulerovom, odnosno trigonometrijskom obliku. Naime,

$$z^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0,$$

odakle se dobije $z_1 = 1$ i

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

što je simetrična jednadžba koja se, dijeljenjem s z^2, svede na ekvivalentnu jednadžbu

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0.$$

Uvođenjem smjene $w = z + \frac{1}{z}$ posljednja jednadžba prelazi u jednadžbu oblika

$$w^2 + w - 1 = 0,$$

čija su rješenja $w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, te nakon vraćanja smjene dobijemo

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_4 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_5 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

Gledajući položaj ovih rješenja u kompleksnoj ravni, zaključujemo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
z_2 &= e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\\
z_3 &= e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5},\\
z_4 &= e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5},\\
z_5 &= e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Upoređivanjem svakog od dobijenih rješenja u njegovom algebarskom i njegovom trigonometrijskom obliku, dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\\
&\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}
$$

Odavde se mogu sada dobiti vrijednosti tangensa ovih uglova, što nam predstavlja rješenje problema navedenog u [3], Zad. 797. Naime, tako imamo

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}},\\
\tan\frac{4\pi}{5} &= -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Naravno, korištenjem adicionih teorema i formula za polovične uglove, jednostavno se dobije i da su

$$
\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \tan\frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}.
$$

Čitaocu preporučujemo da do ovih rezultata dođe i geometrijskim putem (vidjeti geometrijski način rješavanja sličnog problema u [2], V Način).
Time smo pokazali kako se može uspješno pristupiti rješavanju problema u obliku Zad. 797 [3], kao i njemu sličnih problema, koristeći upravo kompleksne brojeve i osobine n-tog korijena jedinice.

Sada se, naravno, mogu izvesti i drugi rezultati slično prethodnom razmatranju. Naime, već smo vidjeli da vrijedi

$$
x^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^5 = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \;\; k = 1,2,3,4,5,
$$

gdje je $x_5 = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je

$$
x^5 - 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4). \tag{5}
$$

Kako je

$$
x_4 = e^{\frac{8\pi i}{5}} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \overline{x}_1
$$

i analogno i $x_3 = \overline{x}_2$, zamjenom u (5) dobijemo zanimljivu vezu

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x-1)(x-x_1)(x-\overline{x}_1)(x-x_2)(x-\overline{x}_2) \\ &= (x-1)\left[x^2 - (x_1+\overline{x}_1)x + x_1\overline{x}_1\right]\left[x^2 - (x_2+\overline{x}_2)x + x_2\overline{x}_2\right] \\ &= (x-1)\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_1\}x + |x_1|^2\right]\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_2\}x + |x_2|^2\right] \\ &= (x-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}x + 1\right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1\right). \tag{6}$$

Dokazati jednakost (6) se javlja kao problem u obliku Zad. 826 [3].

Posljednji se rezultat može i popćiti za proizvoljan prirodni broj n. Razmatranja se razlikuju za parne i neparne n. Prvo, razmotrimo slučaj neparnog stepena

$$x^{2n+1} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n+1} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n+1}i},\ \ k = 1, 2, ..., 2n+1,$$

gdje je $x_{2n+1} = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je, zbog $x_{2n+1-k} = \overline{x}_k$,

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - 1 &= (x-1)\prod_{k=1}^{2n}(x-x_k) = (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - (x_k+\overline{x}_k)x + x_k\overline{x}_k\right] \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right], \end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right). \tag{7}$$

U slučaju parnog stepena, imamo

$$x^{2n} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n}i},\ \ k = 1, 2, ..., 2n,$$

gdje je $x_n = -1$, $x_{2n} = 1$ i $|x_k| = 1$. Međutim, zbog $x_{2n-k} = \overline{x}_k$, bit će

$$\begin{aligned} x^{2n} - 1 &= (x-x_n)(x-x_{2n})\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(x-x_k) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{2n-k}) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right], \end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{8}$$

Slično se dobije da je

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}+1\right) \tag{9}$$

i

$$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1\right). \tag{10}$$

Problem dokazivanja jednakosti (7), (8), i (10) javlja se u npr. [3] u obliku Zad. 829, 827 i 828, respektivno. Primijetimo sada da možemo iz ovih jednakosti dobiti vrlo zanimljive veze. Kako je, s jedne strane,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1\right),$$

a s druge, kako smo već vidjeli,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right),$$

imamo da je

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{11}$$

Uzimajući da je $x=1$ u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

odakle je

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2=\frac{n}{4^{n-1}},$$

odnosno

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1, \tag{12}$$

čime smo upravo demonstrirali i rješenje problema datog kao Zad. 830, 1° [3].
Analogno, uzimajući da je $x=-1$ u (11), dobije se

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}...\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1. \tag{13}$$

Također, na analogan način se iz jednakosti (7) dobiju sljedeće formule

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},\quad n\in\mathbb{N} \tag{14}$$

i

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}...\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

3. Primjena binomne formule

Koristeći binomnu formulu i kompleksne brojeve moguće je doći do vrlo zanimljivih jednakosti (a koje se često pojavljuju u literaturi kao problemi za rješavanje, te kao problemi na raznim takmičenjima iz matematike ili ispitima na fakultetima).
Tako, na primjer, imamo

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+\binom{n}{5}i^5+...+i^n \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i-\binom{n}{2}-\binom{n}{3}i+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}i+...+i^n\ ,\end{aligned}$$

gdje smo koristili (2) i binomnu formulu.
Koristeći sada Moivreovu formulu i činjenicu da je

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

dobijamo

$$(1+i)^n=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

te vrijedi

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=\operatorname{Re}\{(1+i)^n\}=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{16}$$

i

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=\operatorname{Im}\{(1+i)^n\}=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}. \tag{17}$$

Problemi dokazivanja jednakosti (16) i (17) mogu se, na primjer, naći u [3] kao Zad. 795.

Krenemo li sada od jednakosti

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x+i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ i^4\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i^5\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \cos nx+i\sin nx,\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\cos nx &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k\right\}\\ &= \binom{n}{0}\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-...,\\ \sin nx &= \mathrm{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k\right\}\\ &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-...\ ,\end{aligned}$$

dobijemo sljedeću jednakost

$$\tan nx=\frac{\sin nx}{\cos nx}=\frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-...}{\binom{n}{0}\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-...}.$$

Nakon dijeljenja i brojnika i nazivnika posljednjeg razlomka s $\cos^n x$, slijedi vrlo zanimljiva jednakost

$$\tan nx=\frac{\binom{n}{1}\tan x-\binom{n}{3}\tan^3 x+\binom{n}{5}\tan^5 x-}{1-\binom{n}{2}\tan^2 x+\binom{n}{4}\tan^4 x-...}, \tag{18}$$

čije se dokazivanje pojavljuje kao problem u obliku Zad. 800 [3].

4. Primjena geometrijskog niza

U ovoj sekciji ćemo, koristeći se geometrijskim nizom i kompleksnim brojevima, doći do još nekih vrlo zanimljivih trigonometrijskih jednakosti, kao što slijedi.
Kombiniranjem Eulerovog i trigonometrijskog oblika komopleksnog broja, imamo

$$\begin{aligned}1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n &= \frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}=\frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}\cdot\frac{ae^{-ix}-1}{ae^{-ix}-1}\\ &= \frac{a^{n+2}e^{inx}-ae^{-ix}-a^{n+1}e^{i(n+1)x}+1}{a^2-ae^{ix}-ae^{-ix}+1}\\ &= \frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^2-2a\cos x+1}\\ &\quad+i\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin(n+1)x}{a^2-2a\cos x+1}.\end{aligned}$$

odakle je

$$\mathrm{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=1+a\cos x+a^2\cos 2x+...+a^n\cos nx$$

i

$$\mathrm{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=\frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^2-2a\cos x+1}$$

pa je

$$1+a\cos x+a^{2}\cos 2x+...+a^{n}\cos nx=\frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos\left(n+1\right)x+1}{a^{2}-2a\cos x+1}. \tag{19}$$

Slično se dobije da je

$$\operatorname{Im}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^{2}+...+\left(ae^{ix}\right)^{n}\right\}=a\sin x+a^{2}\sin 2x+...+a^{n}\sin nx$$

i

$$\operatorname{Im}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^{2}+...+\left(ae^{ix}\right)^{n}\right\}=\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin\left(n+1\right)x}{a^{2}-2a\cos x+1},$$

odakle slijedi

$$a\sin x+a^{2}\sin 2x+...+a^{n}\sin nx=\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin\left(n+1\right)x}{a^{2}-2a\cos x+1}. \tag{20}$$

Uzimajući, specijalno, $a=1$, iz gornjih jednakosti slijede sljedeće jednakosti (v.npr. [3], Zad. 798):

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 2x+...+\sin nx&=\frac{\sin nx+\sin x-\sin\left(n+1\right)x}{2-2\cos x}\\&=\frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2}-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left[\cos\frac{(n-1)x}{2}-\cos\frac{(n+1)x}{2}\right]}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin^{2}\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{21}$$

i

$$\begin{aligned}1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx&=\frac{\cos nx-\cos\left(n+1\right)x+1-\cos x}{2-2\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}+2\sin^{2}\frac{x}{2}}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{22}$$

i

$$\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{23}$$

Sličnim postupkom možemo dobiti još neke zanimljive trigonometrijsle jednakosti. Kako je

$$\begin{aligned}
1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha} &= \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1} = \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-i2\alpha}-1}{e^{-i2\alpha}-1} \\
&= \frac{e^{i2n\alpha}-e^{-i2\alpha}-e^{i2(n+1)\alpha}+1}{2-e^{i2\alpha}-e^{-i2\alpha}} \\
&= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1}{2-2\cos 2\alpha} \\
&+ i\frac{\sin 2n\alpha+\sin 2\alpha-\sin 2\left(n+1\right)\alpha}{2-2\cos 2\alpha},
\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}
1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= \operatorname{Re}\left\{1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha}\right\} \\
&= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1-\cos 2\alpha}{4\sin^2\alpha} \\
&= \frac{2\sin\left(2n+1\right)\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha} \\
&= \frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha+\sin\alpha}{2\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

odnosno

$$1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha = \frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}. \tag{24}$$

Lijevu stranu jednakosti (24) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned}
1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= (1+\cos 2\alpha)+(1+\cos 4\alpha)+...+(1+\cos 2n\alpha)-(n-1) \\
&= 2(\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha)-(n-1),
\end{aligned}$$

odakle je

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha\right). \tag{25}$$

Iz (25) i (24) slijedi

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n-1}{2}+\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}. \tag{26}$$

Analogno se dobije i sljedeća jednakost

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}, \tag{27}$$

jer je

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha).$$

Izračunavanje suma na lijevim stranama jednakosti (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 1° i 2° [3].

Pođimo sada od izraza

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(k+1)\alpha} \\
&= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha} \\
&= e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n.
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n\right\} &= \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha}\right\}\\ &= \cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos\left(n+1\right)\alpha. \end{aligned} \tag{28}$$

No, kako je (korištenjem Moivreove formule (3))

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n &= \left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha+1+i\sin\alpha\right)^n\\ &= \left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\\ &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n\\ &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &+i2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}+\sin\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}+i2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}, \end{aligned}$$

slijedi

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n\right\} = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2},$$

što zajedno s (28) daje

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos\left(n+1\right)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}. \tag{29}$$

Primijetimo da se odavde može izvući zaključak i da je

$$\sin\alpha+\binom{n}{1}\sin 2\alpha+\binom{n}{2}\sin 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\sin n\alpha+\sin\left(n+1\right)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}. \tag{30}$$

Također i izračunavanje suma na lijevim stranama u (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 3° i 4° [3].

Do još nekih trigonometrijskih jednakosti možemo doći koristeći sljedeću sumu

$$\begin{aligned} e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)} &= e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1} = e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{-i\alpha}{2}}}\\ &= \frac{e^{i\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}-e^{i\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}}\\ &= \frac{\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}\\ &+\frac{\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &+i\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Kako je, s jedne strane,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right),\\ \operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right),\end{aligned}$$

a s druge strane,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),\\ \operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

zaključujemo da vrijede sljedeće jednakosti [4]:

$$\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right) \tag{31}$$

i

$$\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right). \tag{32}$$

5. Druge ideje

Sada ćemo demonstrirati korištenje ideje rješavanja neke pomoćne jednadžbe kako bismo dobili neku vrlo zanimljivu trigonometrijsku jednakost. Kao prvo, razmotrimo sljedeću jednadžbu po z (v. [1])

$$\left(z+1\right)^n=e^{2n\alpha i}.$$

Označimo njena rješenja sa z_k, $k=0,1,...,n-1$. Tada je

$$z_k=e^{\frac{2n\alpha i+2k\pi i}{n}}-1. \tag{33}$$

Jasno je da vrijedi

$$\left(z+1\right)^n-e^{2n\alpha i}=\left(z-z_0\right)\left(z-z_1\right)...\left(z-z_{n-1}\right),$$

odakle, specijalno uzimajući $z=0$, slijedi

$$\left(-1\right)^n\prod_{k=0}^{n-1}z_k=1-e^{2n\alpha i}. \tag{34}$$

S druge strane, prema (33), imamo

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}z_k&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-1\right)\cdot\frac{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\left[e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right]\\ &=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\cdot 2i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)=\left(2i\right)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)\right)e^{A_k},\end{aligned}$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
A_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i=\left(n\alpha+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)i=\left(n\alpha+\frac{\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)\,n}{2}\right)i \\
&= \left(n\alpha+\frac{(n-1)\,\pi}{2}\right)i.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\prod_{k=0}^{n-1} z_k=(2i)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)\right)e^{\left(n\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)i}. \tag{35}
$$

Iz jednakosti (34) i (35) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{(-1)^n\left(1-e^{2n\alpha i}\right)}{(2i)^n\,e^{\left(n\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)i}}\cdot\frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}}=\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{e^{-n\alpha i}-e^{n\alpha i}}{e^{\frac{(n-1)\pi}{2}i}} \\
&= \frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{-2i\sin(n\alpha)}{\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{n-1}}=\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{-2i\sin(n\alpha)}{i^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sin n\alpha.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$
\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)...\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right)=\frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}}, \tag{36}
$$

čije se dokazivanje zahtijeva kao problem i u Zad. 806 [3].

Promatrajmo sada sljedeću jednadžbu po z

$$
z^n=e^{2n\alpha i}\,(z-2i)^n\,, \tag{37}
$$

za čija rješenja z_k, $k=0,1,...,n-1$, vrijedi

$$
\frac{z_k}{z_k-2i}=e^{\frac{2n\alpha i+2k\pi i}{n}},
$$

odnosno

$$
\left(1-e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right)z_k=-2ie^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}.
$$

Odavde slijedi

$$
\begin{aligned}
z_k &= -2i\frac{e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{1-e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}\cdot\frac{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}=-2i\frac{e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}} \\
&= -2i\frac{\cos\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)}=\cot\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)+i
\end{aligned} \tag{38}
$$

Uočimo da je suma korijena jednadžbe (37), $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k$, prema Vietèovim formulama, jednaka koeficijentu sa suprotnim predznakom koji stoji uz z^{n-1} u tzv. normiranom obliku jednadžbe, to jest kada je koeficijent uz z^n jednak 1. Kako je

$$
(37)\Longleftrightarrow\left(1-e^{2n\alpha i}\right)z^n+2nie^{2n\alpha i}z^{n-1}+...=0\Longleftrightarrow z^n+\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}}z^{n-1}+...=0,
$$

prema tome, imamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} = -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} \cdot \frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-in\alpha i}} = -\frac{2nie^{n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}-e^{n\alpha i}}$$
$$= -\frac{2ni\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right)}{-2i\sin n\alpha} = n\left(\cot n\alpha + i\right). \tag{39}$$

S druge strane je, koristeći (38),

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) + ni. \tag{40}$$

Poređenjem jednakosti (39) i (40), dobijemo još jednu zanimljivu trigonometrijsku jednakost

$$\cot\alpha + \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + ... + \cot\left(\alpha + \frac{(n-1)\,\pi}{n}\right) = n\cot n\alpha, \tag{41}$$

čije se dokazivanje zahtijeva u Zad. 805 [3].

Primjedba 5.1. *Iz prethodno dobijenih trigonometrijskih jednakosti vidi se da se neke od njih mogu dokazati i bez upotrebe kompleksnih brojeva. Međutim, ako bi se umjesto njihovog dokazivanja razmatrao problem izračunavanja izraza na njihovoj lijevoj strani, teško da bi se to moglo učiniti bez upotrebe kompleksnih brojeva, upravo kako smo to i demonstrirali u ovom radu.*

Literatura

[1] LJ. Jarnjak, A. Rašidagić-Finci, M. Vuković: *Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive*, IP "Svjetlost" - OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo, 1975.

[2] Dragoljub Milošević: Različiti načini izračunavanja tan($7\pi/27$), *Evolventa*, vol. 4, no. 2 (2021), 34–38.

[3] M. Ušćumlić, P. Miličić: *Zbirka zadataka iz više matematike I* (VI izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1977.

[4] Y.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin: *Lekcii po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*,"Nauka", Moskva , 1982.

EVOLVENTA (JAMTK) 8(1) (2025), 75–82

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima

Mehmed Nurkanović[1], Mirsad Trumić[2]

[1] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*
[2] *JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se razmatra mogućnost primjene metoda snižavanja reda linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima kao analogona istoimenog metoda pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Metod je ilustriran na nekoliko odgovarajućih primjera.

1. Uvod

Pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi, bilo s konstantnim ili varijabilnim koeficijentima, uglavnom se koriste standardni metodi rješavanja: metod neodređenih koeficijenata, metod varijacije konstanti, metod generirajućih funkcija, metod stepena padajućih faktorijela, metod Z-transformacije. Međutim, osim tih metoda, moguće je koristiti metode diferencijalnih jednadžbi, kao što su: snižavanje reda jednadžbe, opći metod faktorizacije operatora, metod invarijanti ili Lieve simetrije [1, 2, 4, 5, 7, 8]. Tako je u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi poznato da se pogodnom smjenom linearna diferencijalna jednadžba k-tog reda može svesti na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k-1$, to jest moguće joj je sniziti red. Naime, ako je linearna diferencijalna jednadžba oblika

$$y^{(k)} + p_{k-1}(x)y^{(k-1)} + ... + p_k(x)y = b(x) \tag{1}$$

i ako nam je $f(x)$ rješenje njoj odgovarajuće homogene jednadžbe, onda se smjenom $y = f(x)z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (1) svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k-1$. Pokazat ćemo da se isti metod može primijeniti i na slučaj obične linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima [1, 7]. Uzmimo jednostavan slučaj takve jednadžbe drugog reda

$$u_{n+2} + a_n u_{n+1} + b_n u_n = r_n, \quad b_n \neq 0. \tag{2}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: diferentne jednadžbe, metod snižavanja reda, konvergencija
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Rad preuzet: august, 2023.

Pretpostavimo da je f_n neko rješenje odgovarajuće homogene diferentne jednadžbe tako da f_n i f_{n+2} nisu nule za sve $n = 0, 1, ...$ Zamjenom $u_n = f_n v_n$ u (2) dobijamo

$$f_{n+2}v_{n+2} + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n v_n = r_n, \tag{3}$$

što nije jednostavnije od diferentne jednadžbe (2). Zato uvođenjem smjene $\omega_n = \Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ u (3) dobijamo

$$\begin{aligned} &f_{n+2}\left(\omega_{n+1} + v_{n+1}\right) + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n \left(v_{n+1} - \omega_n\right) \\ &= f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n + \left(f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n\right) v_{n+1} = r_n. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke za f_n vrijedi

$$f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n = 0.$$

Time će se (3) svesti na diferentnu jednadžbu

$$f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n = r_n,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda (dakle, snizili smo red jednadžbe (2) za jedan), koju možemo riješiti na uobičajeni način.
Naravno da je ovdje jedan od ključnih problema pogoditi niz f_n.

2. Primjeri primjene metoda snižavanja reda

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima ilustrirat ćemo na par primjera koji su navedeni kao problemi za rješavanje u [1].

Primjer 2.1. *([1], Problem 1.12 (c)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right) u_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Rješenje: Uz malo truda moguće je uočiti da je jedno rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe za datu jednadžbu oblika $f_n = n+1$, budući da se homogena jednadžba može napisati u pogodnijem obliku

$$nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 0$$

Uvođenjem smjene $u_n = (n+1)v_n$ u (4) se dobije jednadžba

$$(n+3)\, v_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)(n+2)\, v_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)v_n = \frac{1}{n},$$

odnosno

$$(n+3)\left(v_{n+2} - v_{n+1}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)\left(v_{n+1} - v_n\right) = \frac{1}{n}.$$

Nakon smjene $\omega_n = v_{n+1} - v_n$, dobije se

$$(n+3)\omega_{n+1} - 2\frac{(n+1)(n+1)}{n}\omega_n = \frac{1}{n},$$

odakle je

$$\omega_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(n+3)n}\omega_n + \frac{1}{n(n+3)}.$$

Posljednja jednadžba je linearna diferentna jednadžba prvog reda sa varijabilnim koeficijentima čije je opće rješenje oblika (v. [2–6])

$$\omega_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)}. \tag{5}$$

Sređivanjem prvog sumanda u posljednjoj jednadkosti dobijamo

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\omega_1 = \frac{2^{n-1}n!n!}{\frac{(n+2)!}{3!}(n-1)!}\omega_1 = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}3\omega_1.$$

S druge strane, za drugi sumand vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{n-k-1}(n!)^2 k!(k+3)!}{((k+1)!)^2(n-1)!(n+2)!}\frac{1}{k(k+3)} \\
&= \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(n-1)!(n+2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}k!(k+3)!}{((k+1)!)^2}\frac{1}{k(k+3)} \\
&= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Metodom parcijalnog sumiranja (v. [2, 4]) odredimo sumu u (6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k(k+2) \Longrightarrow \Delta x_k = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(k+1) \\ \Delta y_k = \frac{1}{k(k+1)} = (k-1)^{(-2)} \Longrightarrow y_k = -\frac{1}{k} \end{array} \right\| \\
&= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1}\Delta x_k y_{k+1} = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{k+2}{k}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(k+1)\frac{1}{k+1} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n+2}{n} + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n+2}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}n} + 1.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)} &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)}\left(-\frac{1}{2^{n-1}n} + 1\right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned} \tag{7}$$

pa je

$$\omega_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}.$$

S obzirom da je $\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$, dalje imamo

$$\begin{aligned}
&\Delta \frac{1}{n+1} u_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{n+1} u_n = 3\omega_1 \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{n+1} u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu (v. [2, 4])

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = a_n \Longrightarrow \Delta^{-1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + C,$$

i uzimajući za $C = 0$, što je moguće jer je u (8) već uključena odgovarajuća konstanta, imamo

$$\Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)},$$

odakle primjenom metoda parcijalnog sumiranja dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = k2^k \Longrightarrow \Delta x_k = (k+2)2^k \\ \Delta y_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = k^{(-2)} \Longrightarrow y_k = -\frac{1}{k+1} \end{array} \right\| \\
&= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\frac{k2^k}{k+1} \right]_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+2)2^k}{k+2} \\
&= -\frac{n2^n}{n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = -\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1.
\end{aligned}$$

S druge strane, prema definiciji padajućeg faktorijela s negativnim eksponentom (v. [2, 4]), imamo

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = n^{(-2)}$$

te koristeći osobinu inverznog delta operatora Δ^{-1}: $\Delta^{-1}\left(t^{(a)}\right) = \frac{t^{(a+1)}}{a+1}$, $a \neq -1$ i izostavljanjem dodatne konstante, dobije se da vrijedi

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[-\frac{1}{k+1} \right]_1^n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem dobijenih rezultata u (8) dobijamo

$$\frac{1}{n+1}u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)\left(2^n - (n+1)\right) + 1 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)2^n - (3\omega_1 - 1)(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Zamjenom konstante $\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{u_2}{3} - \frac{u_1}{2}$ dobijamo konačnu formu rješenja date jednadžbe

$$u_n = \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}\right)2^n - \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 - 1\right)(n+1) + 1.$$

□

Primjer 2.2. *([1], Problem 1.12 (a)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}u_n = 1, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

Rješenje: Pripadajuća homogena jednadžba ima jedno rješenje $f_n = 1$. Uvodeći smjene $u_n = v_n$ i $\omega_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, onda (9) dobija sljedeći oblik

$$u_{n+2} - u_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = 1,$$

odnosno

$$\omega_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\omega_n + 1.$$

Dobili smo linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda čije je opće rješenje oblika

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{i+2}\right)\omega_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}\frac{i+1}{i+2}\right)\cdot 1 \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+2) = \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n-1)n}{2} + 2n\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{n(n+3)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smjene se dobija

$$\Delta u_n = \frac{1}{n+1}(u_1 - u_0) + \frac{n(n+3)}{2(n+1)},$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0)\Delta^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \Delta^{-1}\left(\frac{n(n+3)}{2(n+1)}\right) = (u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+3)}{(k+1)}. \tag{10}$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+3)}{(k+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+2-\frac{2}{k+1}\right)=\frac{n(n-1)}{2}+2n-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{n(n+3)}{2}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$

iz (11) se dobija

$$u_n=(u_1-u_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+3)}{2}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right),$$

odnosno

$$u_n=(u_1-u_0-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+\frac{n(n+3)}{4}.$$

□

Primjer 2.3. *([1], Problem 1.12 (b)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2}-\frac{2n+3}{n+2}u_{n+1}+\frac{n}{n+1}u_n=3(n+3),\quad n\geq 0. \tag{11}$$

Rješenje: Nije teško zaključiti da je $f_n=n+1$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe za datu jednadžbu. Uvođenjem smjene $u_n=f_nv_n=(n+1)v_n$ dobija se jednadžba

$$(n+3)v_{n+2}-\frac{2n+3}{n+2}(n+2)v_{n+1}+\frac{n}{n+1}(n+1)v_n=3(n+3),$$

odnosno

$$(n+3)v_{n+2}-(2n+3)v_{n+1}+nv_n=3(n+3).$$

To se može pisati i u obliku jednadžbe po Δv_n

$$(n+3)(v_{n+2}-v_{n+1})-n(v_{n+1}-v_n)=3(n+3),$$

odnosno u obliku linearne diferentne jednadžbe po ω_n

$$(n+3)\omega_{n+1}-n\omega_n=3(n+3)$$

ili

$$\omega_{n+1}=\frac{n}{n+3}\omega_n+3.$$

Njeno opće rješenje je

$$\begin{aligned}\omega_n&=\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+3}\right)\omega_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}\frac{i}{i+3}\right)\cdot 3\\&=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}\right)\omega_1+3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k+4}\cdot\frac{k+2}{k+5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}\right)\\&=\frac{6(n-1)!}{(n+2)!}\omega_1+3\frac{(n-1)!}{(n+2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+3)!}{k!}\\&=\frac{6}{(n+2)(n+1)n}\omega_1+\frac{3}{(n+2)(n+1)n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)(k+2)(k+1).\end{aligned}$$

Kako je koristeći osobinu djelovanja inverznog delta operatora na stepen padajućeg faktorijela (v. [2, 4])

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)(k+2)(k+1) = \Delta^{-1}(k+3)^{(3)}\Big|_1^n = \frac{1}{4}(k+3)^{(4)}\Big|_1^n = \frac{1}{4}(n+3)^{(4)} - 6,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n}\omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n}\left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - 6\right] \\ &= \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3).\end{aligned}$$

Zamjenom

$$\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1}u_n$$

iz posljednje jednakosti slijedi

$$\Delta \frac{1}{n+1}u_n = \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3),$$

odakle je

$$\frac{1}{n+1}u_n = (6\omega_1 - 18)\Delta^{-1}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}\Delta^{-1}n + \frac{9}{4}\Delta^{-1}1. \tag{12}$$

Kako je (v. [2, 4])

$$\begin{aligned}&\Delta^{-1}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} = -\frac{1}{2}(k-1)^{(-2)}\Big|_1^n = -\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{4}, \\ &\Delta^{-1}n = \frac{1}{2}n(n-1), \\ &\Delta^{-1}1 = n-1,\end{aligned}$$

zamjenom u (12) dobije se

$$\frac{1}{n+1}u_n = -(6\omega_1 - 18)\left(\frac{1}{2(n+1)n} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{9}{4}(n-1),$$

odnosno

$$u_n = -(6\omega_1 - 18)\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}(n+1)\right) + \frac{3}{8}(n+1)n(n-1) + \frac{9}{4}(n+1)(n-1).$$

Imajući na umu da je

$$\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{2}u_1,$$

konačno dobijamo traženo rješenje

$$u_n = (2u_2 - 3u_1 - 18)\frac{(n-1)(n+2)}{4n} + \frac{3}{8}(n+1)n(n-1) + \frac{9}{4}(n+1)(n-1).$$

$\square$

Primjedba 2.4. *Uočimo da za nizove koji su rješenja jednadžbi u prethodnim primjerima možemo zaključiti da divergiraju ka $+\infty$.*

Literatura

[1] P.E. Hydon, *Difference Equations by Differential Equation Methods,* Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[2] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.

[3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, vol. 1, no. 1 (2018), 2-5.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.

[5] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama, *Evolventa*, vol. 4, no. 1 (2021), 25-37.

[6] M. Nurkanović, M. Trumić: Computing indefinite integrals by difference equations. *The Mathematical Gazette*, vol. 107, no. 570 (2023), 474-487. https://doi.org/10.1017/mag.2023.99

[7] M. Trumić: *Primjena diferentnih jednadžbi u nastavi matematike*, Doktorska disertacija, PMF Sarajevo, 2023.

[8] M. Trumić: Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima, *Evolventa*, vol. 4, no.2 (2021), 2-11.