

ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA



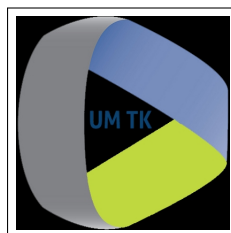
EVOLVENTA



ISSN 2637-2126

Vol. 8, No. 2, TUZLA 2025.

JAMTK
Journal of the Association of mathematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK



EVOLVENTA

Vol. 8, No. 2, 2025.

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of mathematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info ili direktno na <https://evolventa.ba>

Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Glavni urednik:

Dr. Sc. Mehmed Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
mehmed.nurkanovic@untz.ba

Tehnički urednik:

Dr. Sc. Nermin Okičić, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
nermin.okicic@untz.ba

Urednički odbor:

Dr. Sc. Enes Duvnjaković, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Zehra Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Muharem Avdispahić, PMF Sarajevo, Odsjek za matematiku
Dr. Sc. Hasan Jamak, PMF Sarajevo, Odsjek matematika (penzioner)
Dr. Sc. Senada Kalabušić, PMF Sarajevo, Odsjek za matematiku
Dr. Sc. Ramiz Vugdalić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Nermin Okičić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Vedad Pašić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Hariz Agić, Pedagoški zavod Tuzla (penzioner)
Marko Pavlović, KŠC "Sveti Franjo" Tuzla

Adresa:

Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

1	ČLANCI	1
	Emina Pezerović, Samra Moranjkić	
	<i>Jedan matematički model rasta tumora</i>	2
	Ajša Hrustić	
	<i>Analiza diskretnih dinamičkih sistema drugog reda uz ilustracije</i>	11
	Jasmina Rahmanović	
	<i>Dokazivanje nejednakosti primjenom diferencijalnog računa</i>	23
	Emira Ljubunčić, Sabina Hrustić	
	<i>Rješavanje algebarskih jednadžbi korištenjem osobina cirkularnih matrica</i>	33
	Sanela Halilović, Amela Selimović	
	<i>Balansirajući i kvadratno-trougao brojevi</i>	42
	Alija Muminagić, Jens Carstensen	
	<i>Približna konstrukcija ugla od 1 radijana</i>	49
2	KUTAK ZA ZADATKE	55
	Nagradni zadatak: Unedogledna trka	56
	Rješenje i rješavatelji nagradnog zadatka iz Evolvente 7 (2) 2024.	57

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK)*. Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu <https://en.wikipedia.org/wiki/Involute>).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki način povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturalnih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je financiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa*.

U Tuzli, decembar 2025. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

Jedan matematički model rasta tumora

Emina Pezerović¹, Samra Moranjković²

¹NLB Banka Tuzla

²Univerzitet u Tuzli, PMF, Odsjek matematika

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog profesora i mentora prof. dr. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: Maligni tumori su, bez obzira na konstantan napredak tehnologije i medicine, vodeći uzrok smrti u mnogim društvima. Matematički modeli pokazuju se kao iznimno koristan alat za objašnjavanje različitih mehanizama rasta tumora. Njihova upotreba u medicini započinje sredinom 20. stoljeća, a s razvojem računara ti modeli postaju sofisticiraniji i njihova primjena u medicini postaje gotovo neizostavna. U ovom radu je predstavljen jedan model rasta tumora u obliku sistema diferencijalnih jednačini, u literaturi poznat kao Gyllenberg-Webbov model proliferirajućih i mirujućih ćelija.

1. Uvod

Tumori ili neoplazme predstavljaju abnormalni dio tkiva i mogu biti benigni (dobroćudni) i maligni (zloćudni). Benigni tumori se ne šire na okolno tkivo i organe, te u većini slučajeva nisu opasni po život. S druge strane, maligni tumori se mogu širiti na druge dijelove tijela, bilo krvotokom ili limfnim sistemom, te isti mogu biti opasni po život. U izvještaju Strategije za prevenciju, tretmane i kontrolu malignih tumora u Bosni i Hercegovini u prethodnih nekoliko godina se navodi da više od dvije trećine malignih tumora nastaje pod uticajem savremenog načina života (stres, neregularna ishrana i slično). Statistički podaci iz Zavoda za javno zdravstvo Bosne i Hercegovine nam pokazuju iznimno zabrinjavajuće brojke velikog povećanja oboljelih od malignih tumora u posljednjih nekoliko godina, čak i kod adolescenata.

Izučavanje tumora i odabir najboljih tretmana za liječenje je kompleksan proces koji vrlo često zahtijeva interdisciplinarni pristup medicine, biologije i matematike. Matematički modeli su se pokazali kao koristan alat jer nam omogućavaju simulaciju rasta tumora, analiziranje interakcije tumorskih ćelija i okoline, ispitivanje uticaja lijekova na rast tumora, te predikciju mogućih ishoda liječenja. U 20. stoljeću naučnici su nastojali iskoristiti neke osnovne modele rasta, poput logističkog i Gompertzovog, oba zasnovana na Lotka-Volterraovom modelu predacije, za opisivanje rasta tumora. To su modeli predstavljeni kontinualnim dinamičkim sistemima u formi običnih diferencijalnih jednačini. Kasnije, s razvojem računarske podrške, modeli su postajali sve kompleksniji i davali bolji uvid u posmatranu tematiku. U nastavku je detaljno opisan jedan model rasta tumora predstavljen sistemom diferencijalnih jednačini koji se ne može eksplicitno riješiti u općem slučaju, nego je za zaključke korištena kvalitativna analiza.

Ciljna skupina: svi - primijenjena matematika

Ključne riječi: tumor, diferencijalna jednačina, ekvilibrijum

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 07. juli 2025.

2. Gyllenberg-Webbov model rasta tumora

Ćelije koje sačinjavaju tumor se mogu podijeliti na proliferirajuće i mirujuće ćelije. Proliferirajuće ćelije se aktivno dijele i rastu, te samim time utiču na povećavanje veličine tumora. Nasuprot tome, mirujuće ćelije se ne dijele aktivno, ali s vremenom, pod izvjesnim uvjetima mogu preći u proliferirajuće ćelije. Mirujuće ćelije vrlo često znaju biti glavni uzrok vraćanja tumora nakon perioda uspješnog liječenja iz razloga što je većina lijekova uglavnom usmjerena na proliferirajuće ćelije. Za više detalja pogledati [1, 2].

Gyllenberg³⁾ i Webb⁴⁾ su 1989. godine počeli da istražuju posljedice dva jednostavna zapažanja iz stvarnih tumora, i to

- aktivno proliferirajuće ćelije mogu ući u stanje *quiescencije* ili mirovanja u kojem prestaju da se dijele,
- prelazak u stanje mirovanja je obično česta pojava u tumorima koji su velike zapremine.

Prelazak u stanje mirovanja se čini kao ćelijski odgovor na stres, poput hipoksije, ograničenja hranljivih materija ili povećanog hidrostatskog pritiska. Takvi stresovi obično se povećavaju sa veličinom tumora, i to uglavnom nelinearno (vidjeti [1]).

Gyllenberg-Webbov model definiran je sljedećim sistemom diferencijalnih jednačini

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= P(t)R(P(t)) - bP(t) + cM(t) \quad \text{-- proliferirajuće ćelije,} \\ \frac{dM(t)}{dt} &= bP(t) - cM(t) - dM(t) \quad \text{-- mirujuće ćelije.}\end{aligned}\tag{1}$$

U ovom modelu, veličina tumora data je sa $N(t) = P(t) + M(t)$. Funkcija koja predstavlja rast proliferirajućih ćelija je bazirana na logističkom stepenu i data sa

$$F(P(t)) = P(t)R(P(t)) = rP(t) \left(1 - \left(\frac{P(t)}{K}\right)^a\right),$$

gdje vrijede prirodni uvjeti za parametre: $K > 0$, $r > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d \geq 0$ pri čemu K predstavlja maksimalnu veličinu koju tumor može dosegnuti (nosivi kapacitet), r je stopa rasta populacije ćelija koja zavisi od veličine populacije i kapaciteta nosivosti, a stepen a je parametar koji omogućava više fleksibilnosti i bolje odgovara podacima.

Smatra se da mirujuće ćelije nastaju u situaciji kada proliferirajuće ćelije ne primaju dovoljno nutrienata. Isto tako, mirujuće ćelije umiru zbog nedostatka hranljivih materija. Konkretno, u našem sistemu ovo je izraženo sa $-dM(t)$. Dalje, dešava se da mirujuće ćelije s vremenom postanu proliferirajuće. Ta transformacija jednog tipa ćelija u drugi je u drugoj jednačini sistema (1) označena sa $bP(t) - cM(t)$, gdje $bP(t)$ označava ćelije koje su postale mirujuće i $cM(t)$ ćelije koje su postale proliferirajuće. Analognu situaciju imamo i u prvoj jednačini, gdje je ta situacija označena sa $-bP(t) + cM(t)$.

Da bismo ispitali dinamiku ovog modela, s obzirom da se ne može eksplicitno riješiti u općenitom slučaju, izvršiti ćemo kvalitativnu analizu modela koristeći osnovne rezultate i alate iz [3, 4].

2.1. Kvalitativna analiza Gyllenberg-Webbovog modela

Kvalitativnu analizu Gyllenberg-Webbovog modela započet ćemo nalaženjem ekvilibrijuma sistema (1). U tu svrhu, izjednačimo svaku od jednačini sistema sa nulom. Imamo

³⁾Mats Gyllenberg je finski matematičar i inženjer koji je rođen u Helsinkiju 15.12.1955. godine. Od 2004. godine je profesor na Univerzitetu u Helsinkiju, a u svojim istraživanjima se bavi biomatematikom i dinamičkim sistemima.

⁴⁾Glenn F. Webb je matematičar Univerziteta Vanderbilt, poznat po svojim doprinosima iz oblasti matematičke biologije i modeliranja dinamike populacije i rasta tumora.

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow P(t)R(P(t)) - bP(t) + cM(t) = 0,$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow bP(t) - cM(t) - dM(t) = 0.$$

Iz druge jednadžbe sistema izrazimo $M(t) = \frac{bP(t)}{c+d}$ i uvrstimo u prvu

$$P(t) \left(r \left(1 - \left(\frac{P(t)}{K} \right)^a \right) - b + \frac{cb}{c+d} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 0 \vee \left(r \left(1 - \left(\frac{P}{K} \right)^a \right) - b + \frac{cb}{c+d} \right) = 0.$$

Za $P = 0$ dobijamo da je jedan ekvilibrijum $E_1 = (0, 0)$. Iz druge relacije imamo

$$r \left(1 - \left(\frac{P(t)}{K} \right)^a \right) - b + \frac{cb}{c+d} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{P(t)}{K} \right) = \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}}$$

$$\Leftrightarrow P(t) = K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}},$$

pa je drugi ekvilibrijum

$$E_2 = (\bar{P}, \bar{M}) = \left(K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}}, K \frac{b}{c+d} \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}} \right).$$

Od velikog značaja za samu analizu jeste da znamo da li sistem (1) čuva pozitivnost, odnosno da li svaka trajektorija koja počinje u prvom kvadrantu ostaje u prvom kvadrantu. Opći oblik tačke za $P = 0$ je $(0, \alpha)$ za $\alpha > 0$. Tada imamo

$$\frac{dP(t)}{dt} = F(0) - b \cdot 0 + c \cdot \alpha > 0.$$

Analogno, za $M = 0$ imamo da je opći oblik tačke forme $(\beta, 0)$ za $\beta > 0$. Vrijedi

$$\frac{dM(t)}{dt} = b \cdot \beta - c \cdot 0 - d \cdot 0 > 0.$$

Dakle, sistem (1) čuva pozitivnost.

Ispitajmo sada stabilnost tačaka ekvilibrijuma. Kako je sistem nelinearan, izvršimo linearizaciju preko matrice Jakobijana

$$J(P, M) = \begin{bmatrix} r - r \left(\frac{P}{K} \right)^a (1 + a) - b & c \\ b & -c - d \end{bmatrix}.$$

Odredimo svojstvene vrijednosti matrice Jakobijana u tački $E_1 = (0, 0)$. Dakle,

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} r - b & c \\ b & -c - d \end{bmatrix},$$

pa je karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 - \lambda(-b - c - d + r) + bd - rc - rd = 0.$$

Rješavajući prethodnu kvadratnu jednadžbu, dobijamo svojstvene vrijednosti

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b - c - d + r \pm \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)}}{2}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \Delta &= (b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr) \\ &= (b + c + d - r)^2 - 4((r - b)(-c - d) - bc) \\ &= (r - b)^2 + (-c - d)^2 + 2(r - b)(-c - d) - 4((r - b)(-c - d) - bc) \\ &= (r - b - c - d)^2 > 0, \end{aligned}$$

obje svojstvene vrijednosti su realne.

Da bismo izveli zaključke o stabilnosti tačaka ekvilibrija, potrebno je utvrditi kakvog su znaka svojstvene vrijednosti, da li su obje negativne što implicira stabilnost, da li su obje pozitivne što povlači nestabilnost tipa repeler ili je jedna pozitivna, jedna negativna, što znači da je ekvilibrijum nestabilna tačka tipa sedlo. Razmatrat ćemo zato sljedeće slučajeve:

$$(1.) \quad bd - cr - dr > 0 \Leftrightarrow bd > (c + d)r.$$

Sada imamo

$$bd - cr - dr > 0 \Leftrightarrow -4(bd - cr - dr) < 0 \Rightarrow \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} < |b + c + d - r|.$$

Dalje se vodimo uvjetom $bd > (c + d)r$. Dakle, ako je $r < \frac{bd}{c+d}$, imamo

$$-b - c - d + r < -b - c - d + \frac{bd}{c + d} < \frac{-bc - bd - (c + d)^2 + bd}{c + d} = \frac{-bc - (c + d)^2}{c + d} < 0.$$

Obje svojstvene vrijednosti, λ_1 i λ_2 , su očito negativne, pa je ekvilibrijum $E_1 = (0, 0)$ stabilan, odnosno atraktor, i u tom slučaju ne postoji drugi ekvilibrijum.

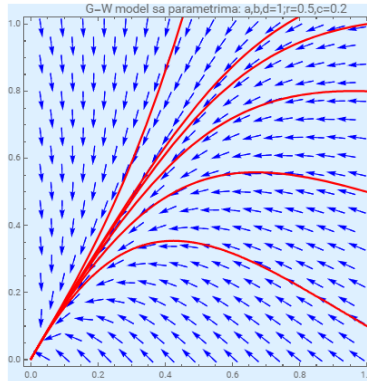


Figure 1: Vizualizacija ponašanje trajektorija kod G-W modela rasta tumora pod uvjetom $bd > (c + d)r$. Horizontalna osa predstavlja rast proliferirajućih ćelija, a vertikalna rast mirujućih ćelija

$$(2.) \quad bd - cr - dr < 0 \Leftrightarrow bd < (c + d)r.$$

Sada je

$$bd - cr - dr < 0 \Rightarrow -4(bd - cr - dr) > 0 \Rightarrow \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} > |b + c + d - r|.$$

Analiziramo obje mogućnosti.

1. $b + c + d - r > 0 \Rightarrow -b - c - d + r < 0 \Leftrightarrow \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} > -b - c - d + r \Rightarrow \lambda_2 > 0, \lambda_1 < 0.$
2. $b + c + d - r < 0 \Rightarrow -b - c - d + r > 0 \Leftrightarrow \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} > -b - c - d + r \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$

Dakle, svojstvene vrijednosti su različitog znaka, pa je nulti ekvilibrijum sedlo. Kroz sedlastu tačku prolaze stabilna i nestabilna mnogostrukost. Sa aspekta biološke interpretacije modela, interesantna je stabilna mnogostrukost jer na njoj imamo konvergenciju ka ekvilibrijumu. Stabilna mnogostrukost je zapravo svojstveni vektor koji odgovara stabilnoj svojstvenoj vrijednosti. Analizirajmo, stoga, svojstveni vektor koji odgovara λ_1 jer je $\lambda_1 < 0$. On je oblika

$$(u, v) = \left(-\frac{-c - d + \frac{1}{2} \left(b + c + d - r + \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} \right)}{b}, 1 \right).$$

Ispitajmo kojeg je znaka komponenta u .

$$\begin{aligned} u &= -\frac{-c - d + \frac{1}{2} \left(b + c + d - r + \sqrt{(b + c + d - r)^2 - 4(bd - cr - dr)} \right)}{b} \\ &= \frac{c + d - b + r - \sqrt{(-b - c - d + r)^2 + 4[(r - b)(-c - d) - bc]}}{2b} \\ &= \frac{r - b + c + d - \sqrt{(r - b + c + d)^2 + 4bc}}{2b}. \end{aligned}$$

S obzrom da je $\sqrt{(r - b + c + d)^2 + 4bc} > \sqrt{(r - b + c + d)^2} = r - b + c + d$, to je u manje od nule. Dakle, stabilna mnogostrukost ekvilibrijuma $E_1 = (0, 0)$ pripada drugom kvadrantu pa izlazi iz okvira naših razmatranja.

U ovom slučaju, kada vrijedi $bd - cr - dr < 0$, postoji i drugi ekvilibrijum $E_2 = (\bar{P}, \bar{M})$, te ćemo ispitati i njegovu stabilnost. Matricu Jakobijana u tački $E_2 = (\bar{P}, \bar{M})$ označimo sa S

$$S = J(\bar{P}, \bar{M}) = \begin{bmatrix} -ar + \frac{bd}{c+d}(1+a) - b & c \\ -c - d & \end{bmatrix}.$$

Radi prilično kompleksnih izraza koji se javljaju, mnogo će jednostavnije biti ako uvedemo sljedeće oznake

$$\begin{aligned} \text{Tr } S &= -ar + \frac{bd}{c+d}(1+a) - b - c - d, \\ \det S &= \left(-ar + \frac{bd}{c+d}(1+a) - b \right) (-c - d) - bc = a(-bd + (c+d)r), \end{aligned}$$

pa vrijedi $\det(J(\bar{P}, \bar{M}) - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{Tr } S)\lambda + \det S$. Prema tome, svojstvene vrijednosti u ovom slučaju su

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr } S \pm \sqrt{(\text{Tr } S)^2 - 4\det S}}{2}.$$

Iskoristimo jedno od prethodnih opažanja i zaključimo da je diskriminanta jednadžbe pozitivna jer je $bc > 0$. Dakle, svojstvene vrijednosti su realne. Ostaje nam ispitati znak svojstvenih vrijednosti, a za to ćemo prvo ispitati znak od $\det S$.

$$\det S > 0 \Leftrightarrow a(-bd + (c+d)r) > 0 \Leftrightarrow -bd + (c+d)r > 0 \Leftrightarrow bd < (c+d)r,$$

što i jeste slučaj koji analiziramo. Sada ispitajmo znak od $\text{Tr } S$.

$$\begin{aligned}\text{Tr } S &= -ar + \frac{bd}{c+d}(1+a) - b - c - d \\ &< -a\frac{bd}{c+d} + \frac{bd}{c+d} + \frac{bd}{c+d}a - b - c - d \\ &= -\frac{bc}{c+d} - c - d < 0.\end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da je $\sqrt{(\text{Tr } S)^2 - 4\det S} < \text{Tr } S$, pa je $\lambda_1 < 0$, a kako je očigledno $-\sqrt{(\text{Tr } S)^2 - 4\det S} < 0$, jasno je da je i $\lambda_2 < 0$ što implicira da je ekvilibrijum $E_2 = (\bar{P}, \bar{M})$ atraktor.

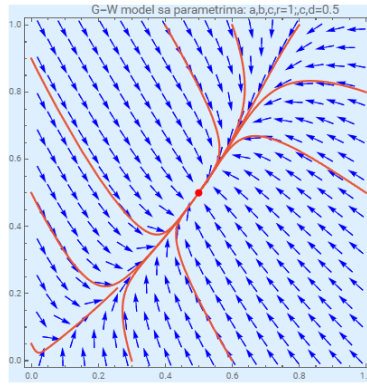


Figure 2: Vizuelna predstava ponašanja trajektorija kod G-W modela rasta tumora pod uvjetom $bd < (c+d)r$ oko stabilnog ekvilibrijuma. Nulti ekvilibrijum je nestabilan. Horizontalna osa predstavlja rast proliferirajućih ćelija, a vertikalna rast mirujućih ćelija

(3.) $bd = (c+d)r$.

Uočimo da se u ovom slučaju drugi ekvilibrijum svodi na prvi tj. $(\bar{P}, \bar{M}) = (0, 0)$. Jedna svojstvena vrijednost $\lambda_2 = 0$, a $\lambda_1 < 0$, te za ekvilibrijum $(\bar{P}, \bar{M})$ kažemo da je nehiperbolički.

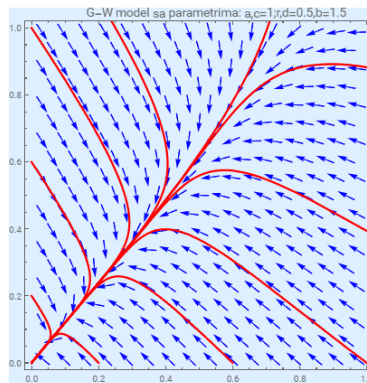


Figure 3: Vizuelna predstava ponašanja trajektorija kod G-W modela rasta tumora pod uvjetom $bd = (c+d)r$. Horizontalna osa predstavlja rast proliferirajućih ćelija, a vertikalna rast mirujućih ćelija

Sa vizualizacije možemo uočiti da, bez obzira što je u pitanju nehiperbolički ekvilibrijum, sve trajektorije su usmjerene ka njemu, te se ponaša kao atraktor. Sama teorija o stabilnosti nehiperboličkih ekvilibrijuma je jako kompleksna, te nije detaljnije diskutovana u ovom radu.

Ispitajmo sada prisustvo periodičkih orbita. Za to će nam koristiti Bendixsonov i Poincare-Bendixonov kriterij (za detalje vidjeti [3, 4]). Bendixonov kriterij je u biti teorem koji omogućava utvrđivanje odsustva zatvorenih trajektorija dinamičkih sistema u ravni, koji su definirani kao

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y), \\y' &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2}$$

dok Poincare-Bendixon teorem koristimo za zaključak o globalnoj stabilnosti.

Teorem 2.1 (Bendix kriterij). *Ako u jednostavno povezanoj oblasti G izraz $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ ima konstantan znak, to jest znak ostaje nepromijenjen i samim time izraz nestaje samo u izolovanim tačkama ili na samoj krivoj, tada sistem (2) nema zatvorene trajektorije u oblasti G .*

Dakle:

- (1.) $bd \geq (c + d)r$

Pokazali smo da pod ovim uvjetom u prvom kvadrantu postoji samo jedan ekvilibrijum i to $(0, 0)$. Činjenica da je isti atraktor, povlači to da trajektorije teže ka njemu. Generalno, periodička orbita treba da okružuje ekvilibrijum. Ali to bi u ovom slučaju značilo da ista mora napustiti prvi kvadrant, što je nemoguće jer smo pokazali da naš sistem čuva pozitivnost. Do istog zaključka dolazimo i uz pomoć Poincare-Bendixonove teorije. Naime, ako u ograničenoj oblasti postoji jedan ekvilibrijum koji je atraktor, onda ne može postojati periodička orbita, jer su sve trajektorije usmjerene ka atraktoru.

- (2.) $bd < (c + d)r$

U ovom slučaju imamo dva ekvilibrijuma od kojih je jedan atraktor, a drugi sedlo. Korištenjem Bendixonovog kriterijuma može se pokazati odsustvo periodičkih orbita pod ovim uvjetom. Ako periodičke orbite uopšte postoje, to će biti u oblasti gdje divergencija mijenja znak.

$$Div = \left(\frac{dP}{dt} \right)'_P + \left(\frac{dM}{dt} \right)'_M = F'(P) - b - c - d = r - b - c - d - (1 + a)r \left(\frac{P}{K} \right)^a$$

Analizirajući oba slučaja $r - b - c - d \leq 0$ i $r - b - c - d > 0$ dolazi se do zaključka da je divergencija konstantnog znaka, što povlači nepostojanje periodičkih orbita. Preciznije, slučaj $r - b - c - d \leq 0$ očigledno povlači da je $Div < 0$ u prvom kvadrantu, pa je znak divergencije konstantan. Dakle, sve trajektorije su usmjerene prema nekoj tački koja je atraktor, ali je pritom nemoguće da iste kruže oko te tačke kao periodičke orbite.

U slučaju $r - b - c - d > 0$ ne možemo na prvu zaključiti znak divergencije. Ispitajmo da li postoji neka tačka za koju je divergencija jednaka nuli, to jest $Div = 0$. Imamo

$$\begin{aligned}Div = 0 &\Leftrightarrow (1 + a)r \left(\frac{P_1}{K} \right)^a = r - b - c - d \\&\Rightarrow \left(\frac{P_1}{K} \right)^a = \frac{r - b - c - d}{(1 + a)r} \\&\Rightarrow P_1 = K \sqrt[a]{\frac{r - b - c - d}{(1 + a)r}}.\end{aligned}$$

Ako bismo uspjeli dokazati da je $\frac{dP}{dt}$ u tački P_1 pozitivno, pri čemu je i $M > 0$, to bi značilo da su trajektorije usmjerene ka gore, to jest trajektorije "bježe" od ekvilibrijuma, što dalje implicira da zaista nema periodičkih orbita.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt}(P_1) &= F(P_1) - bP_1 + cM \\
&= P_1 \left(r - b - r \frac{P_1^a}{K^a} \right) + cM \\
&= P_1 \left(r - b - r \frac{r - b - c - d}{r(1+a)} \right) + cM \\
&= P_1 \left(\frac{a(r-b) + c + d}{1+a} \right) + cM \\
&> P_1(c+d) + cM > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, ne postoje periodičke orbite u prvom kvadrantu.

Prethodni rezultati koji govore o odsutnosti periodičkih orbita zajedno sa informacijom o lokalnoj stabilnosti daju i zaključke o globalnoj stabilnosti, pa možemo rekapitulirati na sljedeći način:

- (1.) Ako je $bd \geq (c+d)r$, tada postoji samo jedan ekvilibrijum i to $(0,0)$ koji je atraktor. Osim toga u prvom kvadrantu nema periodičkih orbita. Dakle, sve trajektorije sistema teže ka $(0,0)$, te možemo reći da je to globalni atraktor. To direktno sledi iz Poincare-Bendixonovog teorema.
- (2.) Ako je $bd < (c+d)r$, tada postoje dva ekvilibrijuma, i to $(0,0)$, za kojeg smo pokazali da je sedlo i $\left(K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}}, K \frac{b}{c+d} \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}} \right)$ koji je atraktor. Uz pomoć Bendixonovog kriterija pokazano je da ne postoje periodičke orbite u prvom kvadrantu. Dakle, sve trajektorije su usmjerene prema jednom atraktoru, pa prema Poincare-Bendixonovom teoremu sledi da je pozitivni ekvilibrijum $\left(K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}}, K \frac{b}{c+d} \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}} \right)$ i globalni atraktor.

Sada, kada je kvalitativna analiza kompletirana, ispitajmo šta sve ovo znači u biološkom smislu. Kao i dosad, posmatrajmo dva slučaja.

- (1.) $bd \geq (c+d)r$

U ovom slučaju, jedini ekvilibrijum, koji je ujedno i globalni atraktor je $E_1 = (0,0)$. Dakle, P i M teže nuli, pa je maksimalna veličina tumora, koju smo uveli kao $N = P + M$ jednaka nuli. Drugim riječima, pod ovim uvjetima tumor nestaje.

- (2.) $bd < (c+d)r$

Sada model ima i nenulti ekvilibrijum $E_2 = (\bar{P}, \bar{M}) = \left(K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}}, K \frac{b}{c+d} \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{r(c+d)}} \right)$ za kojeg smo dokazali da je atraktor. Dakle, vrijedi

$$bd < (c+d)r \Rightarrow \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{(c+d)r}} \in (0, 1) \Rightarrow \bar{P} \in (0, K) \Rightarrow \bar{M} \in \left(0, \frac{bK}{c+d} \right).$$

Prema tome, veličina tumora postaje

$$\bar{N} = \bar{P} + \bar{M} = K \sqrt[a]{1 - \frac{bd}{(c+d)r}} \left(1 + \frac{b}{c+d} \right) \Rightarrow \bar{N} \in \left(0, K \left(a + \frac{b}{c+d} \right) \right).$$

Iz navedenog je očigledno da se veličina tumora $\bar{N}$ povećava kada se povećava parametar b koji kontroliše promjenu proliferirajućih ćelija, ali i smanjivanjem c i d do jako malih veličina. S druge strane, $\bar{N}$ se smanjuje kada se povećavaju parametri c i d , koji kontrolišu promjenu mirujućih ćelija i stopu smrtnosti ćelija, respektivno, ili pak, ako se b smanjuje. Dodatno, $\bar{N}$ se povećava i kada se kapacitet, odnosno maksimalna veličina tumora povećava.

References

- [1] B. Perthame, *Some mathematical models of tumor growth*, "Birkhäuser" Basel, 2017.
- [2] H. Enderling, Mark A.J. Chaplain, *Mathematical modeling of tumor growth and treatment*, Sharjah, 2014.
- [3] H. M. Farkas, *Differential Equations*, "North-Holland Pub" Amsterdam, 1977.
- [4] M. R. Roussel, *Stability analysis for ODEs*, California, 2019.

Analiza diskretnih dinamičkih sistema drugog reda uz ilustracije

Ajša Hrustić¹

¹HIDROCIBALAE BH d.o.o Tuzla, društvo za geodetske i poslovne usluge

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog Profesora Mehmeda Nurkanovića.

Sažetak: U radu se, kroz teorijsku analizu i ilustrativne primjere, ispituju tačke ekvilibrijuma i globalno ponašanje sistema, čime se stiče uvid u njihova kvalitativna svojstva i omogućava predviđanje njihovog dugoročnog ponašanja.

1. Uvod

Intuitivno, pojam stabilnosti vežemo za ponašanje sistema koje je otporno na male devijacije ili promjene. U matematici, stabilnost ima širok spektar primjena, a u ovom radu fokus je stavljen na stabilnost linearnih autonomnih diskretnih dinamičkih sistema drugog reda. Za stabilne sisteme očekuje se da se njihova dinamika s vremenom smiruje, odnosno da mali devijacije u blizini ravnotežnog stanja rezultiraju rješenjima koja teže tom stanju kada vrijeme teži u beskonačnost. Ovakav koncept stabilnosti ima poseban značaj u primijenjenoj matematici, kao i u fizici i inženjerstvu, gdje se brojni procesi modeliraju pomoću diskretnih dinamičkih sistema [1–5]. Prilikom modeliranja ovakvih sistema ključno je da rješenja posjeduju stabilno ponašanje, jer bi u suprotnom modeli bili neadekvatni za praktičnu primjenu. U radu će se, kroz teorijsku analizu i ilustrativne primjere, ispitivati tačke ekvilibrijuma i globalno ponašanje sistema, čime se stiče uvid u njihova kvalitativna svojstva i omogućava predviđanje njihovog dugoročnog ponašanja.

2. Stabilnost autonomnih linearnih diskretnih dinamičkih sistema drugog reda

U ovom dijelu opisat ćemo stabilnost tačaka ekvilibrijuma autonomnih sistema oblika

$$X(n+1) = AX(n), \quad (1)$$

fokusirajući se na slučaj kada je matrica A formata 2×2 .

Neka je data matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, čija je karakteristična jednačina data sa $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$, odnosno,

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + detA = 0. \quad (2)$$

Ciljna skupina: svi - primijenjena matematika

Ključne riječi: diskretni dinamički sistemi, stabilnost, fazni portret

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 15. juni 2025.

U (2) uvedimo oznake: $p_1 = -\text{tr}A$, $p_2 = \det A$. Tada (2) ima oblik $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$, odakle zaključujemo da su svojstvene vrijednosti matrice A date sa,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}).$$

Ako je zadovoljeno da $|\lambda_{1,2}| < 1$, tada je ekvilibrijum $\bar{X} = (0, 0)$ lokalno asimptotski stabilan. Iz navedenog slijedi jednostavan kriterij za ispitivanje lokalne asimptotske stabilnosti ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$.

Teorem 2.1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$ sistema (1) je lokalno asimptotski stabilna ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:*

1. $1 + p + q > 0$,
2. $1 - p + q > 0$,
3. $q < 1$,

što je ekvivalentno sa

$$|\text{tr}A| < 1 + \det A < 2. \quad (3)$$

Dokaz: Dovoljan uslov da tačka ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$ bude lokalno asimptotski stabilna jeste $|\lambda_{1,2}| < 1$. Kako su svojstvene vrijednosti matrice A date sa $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$, to iz $|\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})| < 1$ imamo da vrijede sljedeće nejednakosti

$$-1 < \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) < 1,$$

odnosno nejednakosti $p - 2 < \pm \sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$.

Posljednje nejednakosti vrijede samo u slučaju $-2 < p < 2$. Za takvo izabrano p lijeva strana nejednakosti $p - 2 < \sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$ uvijek vrijedi, odakle možemo posmatrati samo šta se dešava u slučaju $\sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$. Kvadriranjem izdvojene nejednakosti i sređivanjem dobijamo upravo uslov: $p + q + 1 > 0$.

Ukoliko posmatramo nejednakost $p - 2 < -\sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$, nakon množenja sa (-1) , nejednakost dobija oblik: $-(p + 2) < \sqrt{p^2 - 4q} < 2 - p$. Analogno za $p \in (-2, 2)$ imamo da je lijeva strana posljednje nejednakosti uvijek zadovoljena, te opet možemo ispitati ponašanje desne strane nejednakosti, odnosno nejednakosti $\sqrt{p^2 - 4q} < 2 - p$, odakle potrebnim sređivanjem dolazimo do uslova $1 - p + q > 0$. Time smo dobili prva dva uslova teorema. Posljednji uslov direktno slijedi iz definisanosti izraza $\sqrt{p^2 - 4q}$, odakle imamo $p^2 - 4q > 0$. Kako je $p \in (-2, 2)$, to je $p^2 \in (0, 4)$, pa je $0 \leq p^2 - 4q \leq 4 - 4q$, odakle se dobije $q < 1$. $\square$

Sada ćemo dati neke jednostavne osobine tačke ekvilibrijuma, do kojih možemo doći posmatrajući ponašanje svojstvenih vrijednosti polazne matrice A sistema (1). Neka je $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ tačka ekvilibrijuma sistema (1). Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako sve svojstvene vrijednosti matrice A leže u otvorenom disku $|\lambda| < 1$, onda je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ *asimptotski stabilan*, to jest imamo *lokalno-asimptotsku stabilnost*.
2. Ako je bar jedna svojstvena vrijednost matrice A po modulu veća od jedan, tada je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ *nestabilan*.

U slučaju nestabilnog ekvilibrijuma važno je napomenuti da razlikujemo sljedeća dva slučaja:

1. ako su obje svojstvene vrijednosti matrice A po modulu veće od 1, onda takav ekvilibrijum nazivamo *repeler*,
2. ako je jedna svojstvena vrijednost matrice A po modulu veća od 1, a druga svojstvena vrijednost po modulu manja od 1, onda takav ekvilibrijum nazivamo *sedlasta tačka*.

3. Analiza sistema faznim portretima

Posmatrajmo dvodimenzionalni linearni autonomni sistem:

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) \\x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n),\end{aligned}$$

ili

$$X(n+1) = AX(n), \quad (4)$$

gdje je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Definicija 3.1. Za tačku $\bar{X}$ kažemo da je tačka ekvilibrijuma sistema (4) ako je zadovoljeno $A\bar{X} = \bar{X}$ ili $(A - I)\bar{X} = \mathbf{0}$.

Dakle, ukoliko je $(A - I)$ nesingularna matrica, tada je $\bar{X} = \mathbf{0}$ jedinstvena tačka ekvilibrijuma sistema (4). S druge strane, ako je $(A - I)$ singularna matrica, tada postoji familija tačaka ekvilibrijuma za sistem (4). Uvodeći smjenu $Y(n) = X(n) - \bar{X}$ u (4), formiramo novi sistem $Y(n+1) = AY(n)$, koji je identičan sistemu (4). Važno je nepomenuti da je ispitivanje osobina stabilnosti ma koje tačke ekvilibrijuma $\bar{X} \neq \mathbf{0}$ isto kao i ispitivanje osobina stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{X} = \mathbf{0}$. U tu svrhu, pretpostavit ćemo da je $\bar{X} = \mathbf{0}$ jedina tačka ekvilibrijuma sistema (4).

Neka je $J = P^{-1}AP$ Jordanova forma matrice A . Tada J može imati jedan od sljedećih kanonskih oblika:

1. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kada su realne i različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, kada su realne i jednake svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
3. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, kada su kompleksno-konjugovane svojstvene vrijednosti $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Ukoliko uzmemo da je $Y(n) = P^{-1}X(n)$ ili $X(n) = PY(n)$, tada je sistem (4) ekvivalentan sistemu

$$Y(n+1) = JY(n). \quad (5)$$

Ako je $X(0) = X_0$ početni uslov sistema (4), tada je $Y(0) = Y_0 = P^{-1}X_0$ odgovarajući početni uslov za sistem (5). Važno je naglasiti da su uslovi za ispitivanje tačke ekvilibrijuma sistema (4) i (5) identični.

Sada ćemo skicirati fazne prostore sistema (5) za slučajeve navedene u (3). Počevši od ishodišta u y_1y_2 ravni, $Y_0 = (y_{10}, y_{20})$, pratimo kretanje tačaka $Y_1, Y_2, \dots$. U suštini crtamo orbitu $\{Y(n, 0, Y_0) | n \geq 0\}$. Strelica na orbiti upravo označava smjer kretanja kako se n (vrijeme) povećava.

Razmotrimo navedene slučajeve pojedinačno.

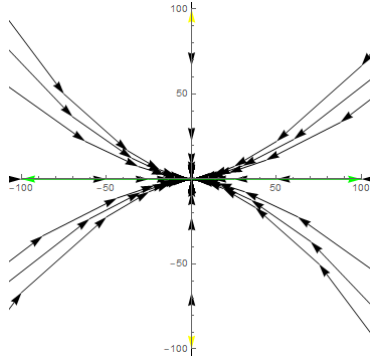
1. Slučaj: U ovom slučaju sistem $Y(n+1) = JY(n)$ postaje

$$\begin{aligned}y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n), \\y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n).\end{aligned}$$

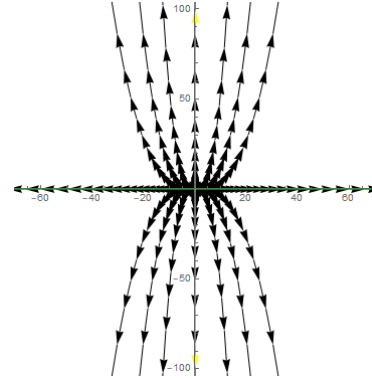
Stoga rješenje sistema ima oblik $\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix}$, odakle dobijamo relaciju,

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}} \right).$$

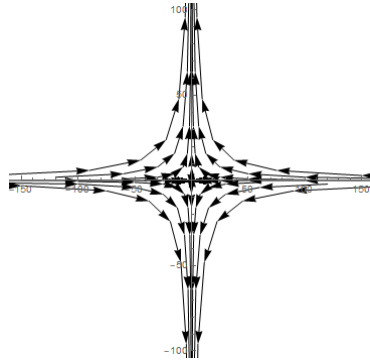
Sada imamo sljedeće situacije:



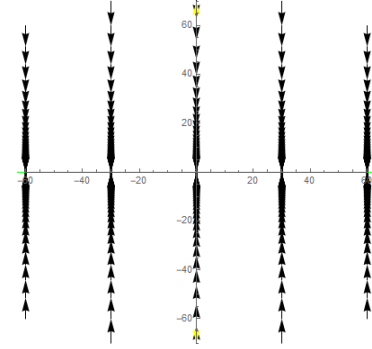
(i) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_2 = \frac{1}{3} < \lambda_1 = \frac{1}{2} < 1$, **lokalno asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma**



(ii) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $1 < \lambda_1 = 1.1 < \lambda_2 = 1.3$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma, repeler**



(iii) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_1 = \frac{1}{2} < 1, \lambda_2 = 2 > 1$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma, sedlo**



(iv) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_2 = \frac{6}{7} < 1, \lambda_1 = 1$, **degenerativni slučaj, nestabilna tačka ekvilibrijuma**

Slika 1: Fazni portreti za $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. Ako je $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ (Slika 1: (i), (iv)).
2. Ako je $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_2(n)}{y_1(n)} \right| = \infty$ (Slika 1: (ii), (iii)).

Slučaj 2: U ovom slučaju sistem $Y(n+1) = JY(n)$ ima oblik

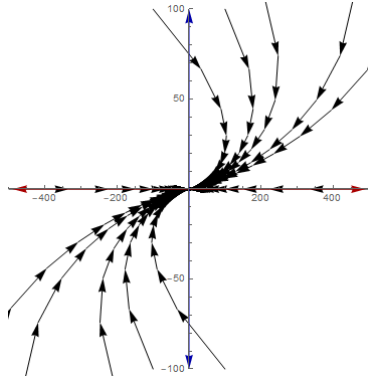
$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda y_1(n) + y_2(n), \\ y_2(n+1) &= \lambda y_2(n). \end{aligned}$$

Kako je $J = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, dolazimo do rješenja sistema

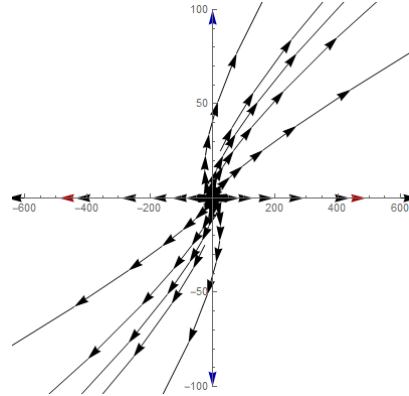
$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20} \\ \lambda^n y_{20} \end{pmatrix},$$

odakle slijedi $\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\lambda^n y_{20}}{\lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}}$, te zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0.$$



(v) Fazni portret za jednake svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3} < 1$, **asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma**



(vi) Fazni portret za jednake svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2} > 1$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma**

Slika 2: Fazni portreti za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Slučaj 3: U ovom slučaju matrica A ima dvije kompleksno-konjugovane svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, pri čemu je $\beta \neq 0$.

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ dat je sa $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ i rješenje je dato sa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |\lambda_1|^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) \\ &= |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos n\omega \\ -\sin n\omega \end{pmatrix} + i |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \sin n\omega \\ \cos n\omega \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdje je $\omega = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$. Opšte rješenje sistema u ovom slučaju je dato sa

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos n\omega + c_2 \sin n\omega \\ -c_1 \sin n\omega + c_2 \cos n\omega \end{pmatrix}.$$

S obzirom na početne vrijednosti $y_1(0) = y_{10}$ i $y_2(0) = y_{20}$, može se dobiti $c_1 = y_{10}$ i $c_2 = y_{20}$, pa je rješenje oblika

$$\begin{aligned} y_1(n) &= y_{10} \cos n\omega + y_{20} \sin n\omega, \\ y_2(n) &= -y_{10} \sin n\omega + y_{20} \cos n\omega. \end{aligned}$$

Primjer 3.2. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Karakteristična jednačina date matrice A je $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, odakle dobijamo da su svojstvene vrijednosti za dati sistem: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Kako je zadovoljeno $|\lambda_{1,2}| < 1$, imamo da je tačka ekvilibrijuma **lokalno asimptotski stabilna**. Pri tome se tačka ekvilibrijuma za dati sistem dobija iz uslova

$$\bar{X} = A\bar{X},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Odavde je $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kako je fundamentalni skup rješenja za dati sistem $FS := \{\frac{1}{2^n}, n\frac{1}{2^n}\}$, to matricu A^n možemo zapisati kao linearnu kombinaciju $A^n = C_1 \frac{1}{2^n} + nC_2 \frac{1}{2^n}$. Odredimo konstantne matrice C_1 i C_2 . Naime,

1. $n = 0$:

$$A^0 = I = C_1 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = C_1 \frac{1}{2} + C_2 \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nakon uvrštavanja dobijenih vrijednosti C_1 i C_2 dobijamo da je matrica A^n oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

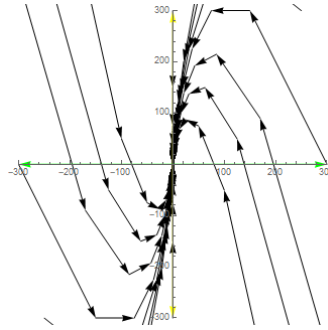
Konačno rješenje sistema bi bilo oblika $X_n = A^n X_0$, gdje je $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, pri čemu su α, β proizvoljni, odnosno

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 2n\alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

Također zadovoljeno je $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, te zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma globalni atraktor.

Kako je $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ globalni atraktor i lokalno asimptotski stabilna, to je onda ona i globalno asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma.

Na Slici 3 prikazan je fazni portret sistema za slučaj iz ovog primjera.



Slika 3: Fazni portret za slučaj jednakih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, globalno-asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma

□

Primjer 3.3. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} -4.5 & 5 \\ -7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

Rješenje: Odgovarajuće svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dakle imamo $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma, što je za ovaj sistem upravo tačka $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna,

štaviše sedlo. Matrica A^n je oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n} & 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}} \\ -3^{n+1} + \frac{3}{2^n} & 3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix},$$

pa je, za proizvoljne $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, rješenje datog sistema dato sa

$$X_n = A^n \cdot X_0 = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n} & 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}} \\ -3^{n+1} + \frac{3}{2^n} & 3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \\ (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta, \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta. \end{aligned}$$

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. Neka je $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} x_n &= (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases} \\ y_n &= (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Neka je $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Tada je

$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \alpha < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \alpha > 0, \end{cases} \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \alpha < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Neka je $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Tada je

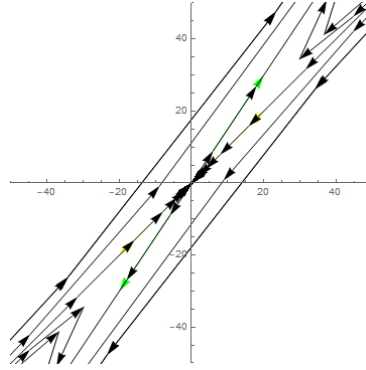
$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \alpha < \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \alpha > \beta, \end{cases} \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \alpha < \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Na Slici 4 prikazan je fazni portret sistema iz ovog primjera. □

Primjer 3.4. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Odgovarajuće svojstvene vrijednosti date matrice su $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = 9$. Dakle imamo $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrija $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna, štaviše sedlo.



Slika 4: Fazni portret za slučaj kada su svojstvene vrijednosti $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$, tačka ekvilibrijuma je nestabilna (sedlo)

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ je $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 9$ je $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} \\ 1 \end{pmatrix}$. Kako je fundamentalni skup rješenja za dati sistem $FS := \{\frac{1}{2^n}, 9^n\}$, to matricu A^n možemo zapisati kao linearnu kombinaciju $A^n = C_1 \frac{1}{2^n} + C_2 9^n$. Dalje imamo:

1. $n = 0$:

$$A^0 = I = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - C_2$$

2. $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = C_1 \frac{1}{2} + 9C_2 \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{17} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakon uvrštavanja dobijenih vrijednosti C_1 i C_2 dobijamo da je matrica A^n oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}.$$

Konačno rješenje sistema bi bilo oblika $X_n = A^n X_0$, gdje je $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, pri čemu su α, β proizvoljni početni uvjeti, odnosno

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n \alpha + \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \beta \\ 9^n \beta \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha + \frac{2}{17} \left(9^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \beta,$$

$$y_n = 9^n \beta.$$

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. Neka je $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Tada je:

$$x_n = \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n)\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases}$$

$$y_n = 9^n \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases}$$

2. Neka je $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Tada je

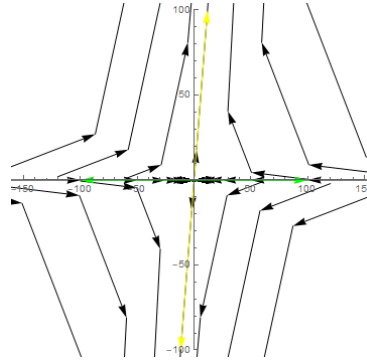
$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \text{ i } y_n = 0 \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, & \alpha \in \mathbb{R}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Neka je $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Tada je

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha + \frac{2}{17}(9^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases}$$

$$y_n = 9^n \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases}$$

Na Slici 5 prikazan je fazni portret sistema iz ovog primjera.



Slika 5: Fazni portret za slučaj kada su svojstvene vrijednosti $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$, tačka ekvilibrija je nestabilna (sedlo)

Također bitno je napomenuti da u ovom slučaju svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima za ovaj sistem jesu ose novog koordinatnog sistema (označene žutom, odnosno zelenom bojom), budući da matrica A nije dijagonalna. Zbog toga je i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_2(n)}{y_1(n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} \right| = \frac{17}{2}.$$

□

4. Jedna od primjena linearnih sistema diferentnih jednačina

Primjer 4.1. Dio pustinje u sjeverozapadnom Meksiku naseljen je uglavnom sa dvije vrste životinja: kojota i ptica trkačica. Želimo modelirati populacije c_t i r_t kojota i ptica trkačica, redom, za t godina od sada ako su trenutne populacije c_0 i r_0 poznate. Ako imamo da sljedeće jednačine modeliraju transformaciju ovog sistema iz godine u godinu, s vremena t na vrijeme $(t+1)$:

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= 0.86c_t + 0.08r_t, \\ r_{t+1} &= -0.12c_t + 1.14r_t, \end{aligned}$$

ispitati stabilnost sistema.

Rješenje: Dati sistem se može zapisati u matricnom obliku na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} c_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ r_t \end{pmatrix}.$$

Vektor $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} c_t \\ r_t \end{pmatrix}$ zovemo vektor stanja polaznog sistema diferentnih jednačina, jer u potpunosti opisuje sistem u trenutku t .

Ako je $A = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix}$, imamo da je polazni sistem zapravo dat u obliku

$$\vec{x}_{t+1} = A\vec{x}_t.$$

Transformacija koju sistem prolazi u periodu od godinu dana je linearna, predstavljena matricom A :

$$\vec{x}_t \xrightarrow{A} \vec{x}_{t+1}.$$

Pretpostavimo da je poznato početno stanje: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$. Cilj je pronaći $\vec{x}_t$, za proizvoljno pozitivno t :

$$\vec{x}_0 \xrightarrow{A} \vec{x}_1 \xrightarrow{A} \vec{x}_2 \xrightarrow{A} \dots \xrightarrow{A} \vec{x}_t \xrightarrow{A} \dots$$

Poznato je da ćemo rješenje polaznog sistema $\vec{x}_t$ pronaći primjenom transformacije t puta na početno stanje $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0.$$

Odgovarajuće svojstvene vrijednosti za dati sistem su $\lambda_1 = 1.1$ i $\lambda_2 = 0.9$. Dakle imamo $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna, štaviše sedlo.

Da bismo razumjeli dugoročno ponašanje ovog sistema i kako ono zavisi od početne vrijednosti, bilo bi korisno da pronađemo formule za c_t i r_t , izražavajući ove veličine kao funkcije od vremena t . Uradit ćemo to za određene (pažljivo odabrane) početne vektore stanja, kroz sljedeće slučajeve.

1. **Slučaj 1** Neka su početne vrijednosti: $c_0 = 100$ i $r_0 = 300$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$ i vrijedi

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 330 \end{pmatrix} = 1.1 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = 1.1\vec{x}_0 = \lambda_1\vec{x}_0.$$

Jednakost $A\vec{x}_0 = 1.1\vec{x}_0$ nam govori da je $\vec{x}_0$ svojstveni vektor matrice A za odgovarajuću svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1.1$. Može se zaključiti da će sa ovako datim početnim uvjetima svaka populacija porasti za 10% u toku naredne godine. Nastavljajući postupak množenjem matrice A svaki put množimo $\vec{x}_0$ sa svojstvenom vrijednošću 1.1, te je konačno rješenje dato sa

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0 = (1.1)^t \vec{x}_0.$$

Zaključujemo da je $c_t = 100(1.1)^t$ i $r_t = 300(1.1)^t$, odakle vidimo da obje populacije rastu eksponencijalno, za 10% više svake godine.

2. **Slučaj 2** Neka su početne vrijednosti: $c_0 = 200$ i $r_0 = 100$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, pa je

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix} = 0.9 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = 0.9\vec{x}_0 = \lambda_2\vec{x}_0.$$

Jednakost $A\vec{x}_0 = 0.9\vec{x}_0$ nam govori da je $\vec{x}_0$ svojstveni vektor matrice A za odgovarajuću svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 0.9$. Može se zaključiti da će sa ovako datim početnim uvjetima svaka populacija opadati za 10% u toku svake naredne godine. Nastavljajući postupak množenjem matrice A svaki put množimo $\vec{x}_0$ sa svojstvenom vrijednošću 0.9, te je konačno rješenje dato sa

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0 = (0.9)^t \vec{x}_0.$$

Zaključujemo da je $c_t = 200(0.9)^t$ i $r_t = 100(0.9)^t$, odakle vidimo da obje populacije opadaju, za 10% svake godine. Početne populacije su neusklađene: previše kojota lovi premalo ptica trkačica, što je loše stanje za obje vrste jer obje teže izumiranju.

3. **Slučaj 3** Neka je sada $c_0 = 100$ i $r_0 = 100$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ i vrijedi

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 102 \end{pmatrix}.$$

Ovdje stvari ne funkcionišu tako dobro kao u prva dva slučaja koja smo razmatrali: vektor početnog stanja $\vec{x}_0$ ne može biti svojstveni vektor matrice A u ovom slučaju, tako da za rješenja $c(t)$ i $r(t)$ moramo tražiti drugi pristup. Ideja je da se koriste svojstveni vektori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$ i $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, koji su dobijeni u prva dva slučaja. Svaki vektor u $\mathbb{R}^2$ može se jedinstveno napisati kao linearna kombinacija svojstvenih vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Specijalno, za vektor početnog stanja $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ imamo $\vec{x}_0 = C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2$. Nakon odgovarajućeg izračunavanja dobijamo $C_1 = \frac{1}{5}$ i $C_2 = \frac{2}{5}$, pa je $\vec{x}_0 = \frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{2}{5}\vec{v}_2$. Ukoliko se prisjetimo, u prva dva slučaja dobili smo da je

$$A^t\vec{v}_1 = (1.1)^t\vec{v}_1 \text{ i } A^t\vec{v}_2 = (0.9)^t\vec{v}_2.$$

Upravo iz tog razloga imamo da je konačno rješenje polaznog sistema dato sa:

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0 = A^t \left(\frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{2}{5}\vec{v}_2 \right) = (1.1)^t \frac{1}{5}\vec{v}_1 + (0.9)^t \frac{2}{5}\vec{v}_2 = (1.1)^t \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} + (0.9)^t \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

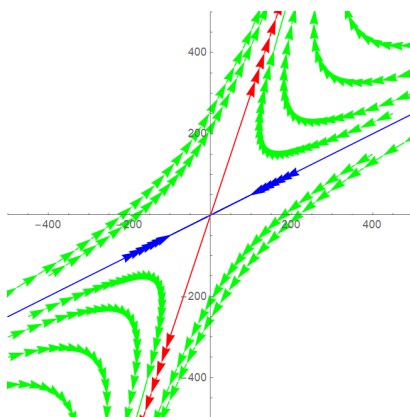
Uzimajući u obzir komponente ove vektorske jednadžbe, sada možemo pronaći zatvorene formule za $c(t)$ i $r(t)$:

$$\begin{aligned} c(t) &= 20(1.1)^t + 80(0.9)^t, \\ r(t) &= 60(1.1)^t + 40(0.9)^t. \end{aligned}$$

Pošto se članovi koji uključuju $(0.9)^t$ približavaju nuli kako se t povećava, obje populacije na kraju rastu za oko 10% godišnje, a njihov omjer $\frac{r(t)}{c(t)}$ se stabilizira oko vrijednosti $\frac{60}{20} = 3$.

Putanja koja predstavlja ponašanje populacija ovisno o vremenu t za naš sistem kojot ptice trkačice prema slučaju **3** prikazan je na Slici 6 zelenom putanjom. Da bismo stekli uvid u dugoročno ponašanje ovog sistema i kako ono ovisi o početnom stanju, možemo nacrtati grubu skicu koja prikazuje niz različitih trajektorija, koje predstavljaju različite kvalitativne tipove ponašanja. Tako je grafičkim prikazom na Slici 6 dat uvid u ponašanje populacija ovisno o početnim uvjetima koje smo razmatrali u slučajevima **1**, **2**, **3** za dati primjer. Vidimo da će obje populacije (kojoti i ptice trkačice) napredovati dugoročno ako omjer $\frac{r_0}{c_0}$ početnih populacija prelazi $\frac{1}{2}$. Ukoliko to nije zadovoljeno, imat ćemo izumiranje obje populacije. Plava putanja predstavlja ponašanje populacija prema slučaju **2**, dok crvena putanja predstavlja ponašanje populacija prema slučaju **1**.

□



Slika 6: Fazni portret koji prikazuje ponašanje populacija kojota i ptica trkačica, ovisno o vremenu t i različitim početnim uvjetima.

Literatura

- [1] O. Bretscher: *Linear Algebra with applications* - 5th ed., PEARSON, Boston etc., 2013.
- [2] S. Elaydi: *An introduction to difference equations* - 3rd ed., Springer, New York, 2005.
- [3] M.R.S. Kulenović, O. Merino: *Discrete Dynamical Systems and difference equations with Mathematica*, CHAPMAN & HALL/CRC, Boca Raton etc., 2002.
- [4] M. Nurkanović: *Diferentne jednačbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednačbe - Teorija i zadaci s primjenama*, Printcom, Tuzla, 2016.

Dokazivanje nejednakosti primjenom diferencijalnog računa

Jasmina Rahmanović¹

¹Behram-begova medresa u Tuzli

Rad posvećujem uvaženom profesoru i mentoru prof. dr. Mehmedu Nurkanoviću, koji me je nesebično bodrio i usmjeravao kroz studije i rad, povodom njegovog 65. rođendana

Sažetak: U ovom radu biće pokazano kako se uz pomoć diferencijalnog računa, te monotonosti i konveksnosti funkcija mogu dokazivati neke nejednakosti.

1. Uvod

Dokazivanje nejednakosti je tema kojom se najčešće bave nadareni učenici, odnosno, učenici koji se spremaju za takmičenja, kao i njihovi mentori. Rad sa nejednakostima je mnogo zahtjevniji u odnosu na jednakosti. Zato bilo koja inovativna ideja na ovu temu će vjerovatno biti korisna onima koji se bave tom problematikom. [1]

Uvedimo sada osnovne pojmove i činjenice koje ćemo koristiti pri dokazivanju nejednakosti u narednoj sekciji.

Definicija 1.1. [2],[3] *Neka je funkcija f definisana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je monotono rastuća ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

Za funkciju f kažemo da je monotono opadajuća ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) .$$

Teorem 1.2. [2],[3] *Ako je funkcija f diferencijabilna na I i*

$$f'(x) > 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f rastuća na I , dok je funkcija opadajuća na I ako je

$$f'(x) < 0, \text{ za sve } x \in I.$$

Ponekad nije tako jednostavno odrediti znak prvog izvoda funkcije, pa se tada gornja činjenica može poopćiti. Dakle, ako je n -ti izvod funkcije pozitivan na intervalu I , to jest, $f^{(n)}(x) > 0$, tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija na I . Analogno, ako je n -ti izvod funkcije negativan na I , to jest, $f^{(n)}(x) < 0$, tada je $f^{(n-1)}(x)$ opadajuća funkcija na I .

Ciljna skupina: srednja škola i fakultet

Ključne riječi: nejednakosti, izvodi, monotonost, konveksnost, konkavnost, Lagrangeov teorem

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 01. decembar 2025.

Teorem 1.3. [2][3] (**Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti**) Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) , tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definicija 1.4. [3] Za funkciju f kažemo da je strogo konveksna na I ako za svako λ ($0 < \lambda < 1$) vrijedi

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Za funkciju f kažemo da je strogo konkavna na I ako za svako λ ($0 < \lambda < 1$) vrijedi

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Teorem 1.5. [2],[3] Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna i ako je

$$f''(x) > 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f strogo konveksna na I , a ako je

$$f''(x) < 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f strogo konkavna na I .

Teorem 1.6. (Jensenova nejednakost) Neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konkavna (konveksna) funkcija i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Tada za sve $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ vrijedi

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \left(f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)\right). \quad (1)$$

Stroga konkavnost (stroga konveksnost) vrijedi kad se u (1) stave znaci stroge nejednakosti.

2. Dokazi nekih specifičnih nejednakosti

Primjeri koji slijede uglavnom su uzeti kao zadaci iz [4], te ovdje detaljno urađeni.

Primjer 2.1. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}, \quad n \geq 9.$$

Rješenje: Definišimo funkciju f tako da je $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ za $x > 0$. Tada je

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}},$$

pa je

$$f'(x) < 0 \iff \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \iff 2 - \ln x < 0 \iff \ln x > 2 \iff x > e^2.$$

Dakle, za $x > e^2$ je f opadajuća funkcija. Zato je za $n \geq 9$

$$f(n) > f(n+1)$$

pa je

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \iff \sqrt{n+1} \ln n > \sqrt{n} \ln(n+1) ,$$

odnosno,

$$\ln n^{\sqrt{n+1}} > \ln(n+1)^{\sqrt{n}} \iff n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}} ,$$

a to je i trebalo dokazati.

Napomena 1. Ideja za uzimanje u razmatranje monotonst funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ dolazi upravo iz nejednakosti

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} ,$$

koja se dobije logaritmiranjem nejednakosti koju treba dokazati.

□

Primjer 2.2. Neka je $0 < a < b$. Dokazati da je tada

$$bx^a - ax^b < b - a, \quad x > 1.$$

Rješenje: Neka je $f(x) = bx^a - ax^b - b + a$. Tada je

$$f'(x) = abx^{a-1} - abx^{b-1} = abx^{a-1}(1 - x^{b-a}) .$$

Očigledno, za $x > 1$ je $f'(x) < 0$, pa je f opadajuća funkcija. A kako je $f(1) = 0$ i s obzirom da je f opadajuća funkcija, to je $f(x) < 0$ za $x > 1$. Dakle, imamo da vrijedi

$$bx^a - ax^b - b + a < 0 ,$$

odnosno,

$$bx^a - ax^b < b - a ,$$

za $x > 1$, što je i trebalo dokazati.

□

Primjer 2.3. Ako je $0 < x < \frac{\pi}{2}$, onda je

$$\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2} .$$

Dokazati!

Rješenje: Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x} - 1 = \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}} - 1 = \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x \sqrt{\cos x}} - 1 \\ &= \frac{\cos^2 x - 2\cos x \sqrt{\cos x} + 1}{2\cos x \sqrt{\cos x}} > \frac{(\cos x - 1)^2}{2\cos x \sqrt{\cos x}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, jer je tada $0 < \cos x < 1$.

Dakle, f je rastuća funkcija za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Kako je $f(0) = 0$, to je $f(x) > 0$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Zato imamo da vrijedi

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x > 0 \iff \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} > x \iff \frac{\sin^2 x}{\cos x} > x^2 \iff \frac{\sin^2 x}{x^2} > \cos x ,$$

za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Time je polazna nejednakost dokazana.

Napomena 2. Iz posljednjeg niza ekvivalencija u prethodnom primjeru se također vidi ideja odabira funkcije $f(x)$ kako bi se dokazala navedena nejednakost.

□

Primjer 2.4. Dokazati da je, za $x > 0$

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Rješenje: Neka je za $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x).$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 1}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

za $x > 0$.

Dakle, f je rastuća funkcija. Budući da je $f(0) = 0$, to je $f(x) > 0$ za $x > 0$, pa je

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}},$$

za $x > 0$.

□

Primjer 2.5. Dokazati da vrijedi

$$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x, \quad x > 0.$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} + \frac{1-x}{x^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{x^3 + (1-x)(\sqrt{1+x^2}+1+x^2)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1+x^2)} \\ &= \frac{1+x^2+\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}-x}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1+x^2)} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1+x^2)} \\ &> 0, \end{aligned}$$

jer $\sqrt{1+x^2} > x$. Dakle, $f'(x) > 0$, pa je f rastuća funkcija. Kako je

$$f(x) = \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right) - \frac{1}{x},$$

to $f(x) \rightarrow 0$ kad $x \rightarrow \infty$. Zato je $f(x) < 0$ za svako $x > 0$, to jest

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x < 0 ,$$

odnosno,

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \ln x + \frac{1}{x} .$$

□

Primjer 2.6. *Dokazati da vrijedi*

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x < e^a, \quad x > 0, a > 0 .$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ na $(0, +\infty)$ i $a > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot -\frac{a}{x^2} . \\ &= \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x + a} . \end{aligned}$$

Primijetimo da je $f'(x) > 0$ ako i samo ako je

$$\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) > \frac{a}{x + a} ,$$

odnosno, ako i samo ako je

$$\ln \left(\frac{x + a}{x}\right) > \frac{a}{x + a} . \quad (2)$$

Funkcija $\ln(1 + x)$ zadovoljava pretpostavke Lgrangeovog teorema (Teorem1.3) na segmentu $[0, u]$, ($u > 0$), pa psotoji $c \in (0, u)$ tako da je

$$\ln(1 + u) - \ln 1 = \frac{1}{1 + c}(u - 0) ,$$

to jest

$$\ln(1 + u) = \frac{u}{1 + c} ,$$

odakle, zbog $0 < c < u$, slijedi

$$\frac{u}{1 + u} < \ln(1 + u) < u, u > 0 .$$

Primjenom posljednje nejednakosti, nije teško zaključiti da je nejednakost (2) zadovoljena, pod uvjetima zadatka. Zaista,

$$\ln \left(\frac{x + a}{x}\right) = \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) > \frac{\frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = \frac{a}{x + a} .$$

Dakle, $f'(x) > 0$ za svako $x > 0$, što znači da je posmatrana funkcija rastuća na $(0, +\infty)$. Ako pustimo da $x \rightarrow \infty$, imaćemo da vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = a .$$

Prema tome, funkcija f je rastuća i $f(x) \rightarrow a$ kad $x \rightarrow \infty$, pa je $f(x) < a$ za svako $x > 0$, to jest,

$$x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) < a ,$$

ili,

$$\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x < a ,$$

odnosno,

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x < e^a ,$$

za svako $x > 0$, što je i trebalo dokazati.

Napomena 3. I u prethodnom primjeru se vidi da je ideja uzimanja funkcije f u navedenom obliku posljedica logaritmiranja nejednakosti koja se dokazuje.

□

Primjer 2.7. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$e^x - 1 - x < x^2 e^x, \quad x > 0.$$

Rješenje: Neka je

$$f(x) = x^2 e^x - e^x + x + 1 .$$

Tada je

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - e^x + 1 = e^x(x^2 + 2x - 1) + 1 .$$

Dalje je

$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 1) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 1) .$$

Očigledno je $f''(x) > 0$ za sve $x > 0$, pa je f' rastuća funkcija. Kako je $f'(0) = 0$, to je onda $f'(x) > 0$ za $x > 0$, pa je f rastuća funkcija. S druge strane, zbog $f(0) = 0$ je $f(x) > 0$, za $x > 0$. Dakle,

$$e^x - 1 - x < x^2 e^x .$$

□

Primjer 2.8. Za $x \in (0, \pi)$, dokazati da je

$$\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4} .$$

Rješenje: Neka je

$$f(x) = \ln(1 + \cos x) - \ln 2 + \frac{x^2}{4} .$$

Tada je

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{x}{2} .$$

Dalje je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} + \frac{1}{2} = \frac{-1 - \cos x}{(1 + \cos x)^2} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x - 1}{2(1 + \cos x)^2} \\ &< 0, \end{aligned}$$

za $x \in (0, \pi)$. To znači da je f' opadajuća funkcija, a kako je $f'(0) = 0$, to je $f'(x) < 0$, za $x \in (0, \pi)$. Sada zaključujemo da je f opadajuća funkcija, a zbog $f(0) = 0$, slijedi $f(x) < 0$, za $x \in (0, \pi)$. Dakle,

$$\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4}.$$

□

Primjer 2.9. *Dokazati da je*

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x < x^2, \quad x > 0.$$

Rješenje: Prvo ćemo dokazati lijevu nejednakost. U tu svrhu posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - x \arctan x.$$

Sada je

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - \arctan x - \frac{x}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2} - \arctan x.$$

Dalje imamo

$$f''(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{-2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Očigledno je $f''(x) < 0$ za $x \neq 0$. Zato je f' opadajuća funkcija, a kako je $f'(0) = 0$, to je $f'(x) < 0$ za $x > 0$. Dakle, f je opadajuća funkcija za $x > 0$, pa zbog $f(0) = 0$ je $f(x) < 0$ za $x > 0$, to jest

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x.$$

Dokažimo sada desnu nejednakost. Neka je

$$g(x) = \arctan x - x.$$

Tada je

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1 + x^2},$$

pa je $g'(x) < 0$ za $x \neq 0$. Dakle, funkcija g je opadajuća, a zbog $g(0) = 0$, imamo da je $g(x) < 0$ za $x > 0$. Zato je

$$\arctan x < x,$$

odakle, nakon množenja sa $x > 0$, slijedi

$$x \arctan x < x^2.$$

Sada možemo zaključiti da, za $x > 0$, vrijede nejednakosti

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x < x^2.$$

□

Primjer 2.10. Dokazati da za proizvoljno $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1) .$$

Rješenje: Lijeva strana je očigledna (jer je $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$). Stavimo

$$f(x) = \frac{x}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \geq 0.$$

Tada je

$$f'(x) = \frac{1}{n}e^x + \frac{x}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!},$$

odnosno,

$$f'(x) = \frac{x+1}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Dalje je

$$f''(x) = \frac{x+2}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!},$$

te zaključujemo induktivno da je

$$f^{(n)}(x) = \frac{x+n}{n}e^x - e^x + 1, x \geq 0 .$$

Pri tome je

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{n}, f''(0) = \frac{2}{n}, \dots, f^{(n-1)}(0) = \frac{n-1}{n} .$$

Još je

$$f^{(n)}(x) > 1, x > 0 .$$

Sada, iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti (Teorem 1.3), vrijedi

$$f^{(n-1)}(x) > \frac{n-1}{n} + x, x > 0 .$$

Naime, funkcija $f^{(n-1)}(x)$ zadovoljava pretpostavke Lagrangeovog teorema na segmentu $[0, x]$, ($x > 0$), pa postoji $c \in (0, x)$ tako da je

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) = f^{(n)}(c)(x - 0) ,$$

to jest,

$$f^{(n-1)}(x) - \frac{n-1}{n} = f^{(n)}(c)x ,$$

odnosno,

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{n-1}{n} + f^n(c)x > \frac{n-1}{n} + x ,$$

jer je $f^n(c) > 1$ za $c > 0$.

Analogno je

$$f^{(n-2)}(x) > \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}x, x > 0 ,$$

jer i $f^{(n-2)}(x)$ zadovoljava uvjete Teorema 1.3, pa postoji $c_1 \in (0, x)$ tako da je

$$f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(c_1)x ,$$

odnosno,

$$f^{(n-2)}(x) = \frac{n-2}{n} + f^{(n-1)}(c_1)x > \frac{n-2}{n} + \left(\frac{n-1}{n} + c_1 \right)x > \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}x .$$

Induktivno, zaključujemo da je

$$f'(x) > \frac{1}{n} + \frac{2}{n}x, x > 0$$

$$f(x) > \frac{x}{n}, x > 0 .$$

Prema tome,

$$\frac{x}{n}e^x - \frac{x}{n} > e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0.$$

□

Primjer 2.11. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x > 0, y > 0.$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x \ln x, x > 0 .$$

Tada je

$$f'(x) = \ln x + 1 \text{ i } f''(x) = \frac{1}{x} .$$

Jasno je da je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, pa je posmatrana funkcija strogo konveksna na $(0, +\infty)$. Zato je

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) ,$$

što slijedi iz Definicije 1.4, uzimajući $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dakle,

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x > 0, y > 0 .$$

□

Primjer 2.12. Dokazati da za bilo koje $n \in \mathbb{N}$ i $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, \pi)$ vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \sin x_k} \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

Rješenje: Posmatračemo funkciju

$$f(x) = \ln \sin x$$

na intervalu $(0, \pi)$. Tada je

$$f'(x) = \cot x \text{ i } f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

To znači da je funkcija f strogo konkavna na $(0, \pi)$, pa je, prema Jensenovoj nejednakosti za konkavne funkcije (uzimajući $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

$$f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

odnosno,

$$\ln \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sin x_k,$$

ili,

$$\ln \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \ln \left(\prod_{k=1}^n \sin x_k \right)^{\frac{1}{n}},$$

to jest,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \sin x_k} \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right),$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadaci za samostalan rad

Dokazati da vrijede sljedeće nejednakosti.

1. $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0, x > 1$
2. $\frac{x}{e} > \ln x, x > 0, x \neq 1$
3. $xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1, x > 0$
4. $e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 > 0, x > 1$
5. $e^x < (1+x)^{1+x}, x > 0$
6. $\left(\frac{x+1}{2} \right)^{x+1} \leq x^x, x > 0$

Literatura

- [1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Sarajevo, Bosanska riječ, 2004.
- [2] M. P. Ušćumlić, P. M. Miličić, M. N. Trifunović: *Uvod u višu matematiku 2*, Beograd, Univerzitet u Beogradu, 1983.
- [3] M. Nurkanović: *Matematička analiza 2 (skripta)*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, 2025.
<https://mehmed.nurkanovic.com>
- [4] A. Y. Dorogovcev: *Matematičeskij analiz - Sbornik zadač*, Višća škola, Kiev, 1987.

Rješavanje algebarskih jednačbi korištenjem osobina cirkularnih matrica

Emira Ljubunčić¹, Sabina Hrustić²

¹ JU Gimnazija Meša Selimović

² Univerzitet u Tuzli, PMF, Odsjek matematika

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog profesora i mentora prof. dr. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom stručnom radu prezentiran je metod rješavanja kubnih jednačbi uz pomoć cirkularnih matrica, preciznije, korištenjem određenih njihovih osobina. Dato je nekoliko primjera na kojima je demonstrirana primjena metoda, te uporedba sa ostalim poznatim metodima rješavanja kubnih jednačbi, odnosno istaknute prednosti jednog u odnosu na druge.

1. Uvod

Da li ste se nekada zapitali kako riješiti neku algebarsku jednačbu bez poznate formule? Ako jeste, onda je ovaj članak baš za vas!

Rješavanje kvadratnih jednačbi učimo još u drugom razredu srednje škole i ne predstavljaju nam nikakav problem, s obzirom da postoji jednostavna formula koja nam daje korijene (nule) odgovarajućeg polinoma. Međutim, šta kada se neki matematički problem svede na rješavanje kubne ili jednačbe četvrtog stepena? Postoji više načina za njihovo rješavanje: od klasične Cardanove formule i faktORIZACIJE, Ferrarijeve formule, do numeričkih i grafičkih metoda. Svaki od njih ima prednosti, ali uglavnom i neka ograničenja.

Jedan od manje poznatih metoda za rješavanje kubnih algebarskih jednačbi, koji je u okviru magistarskog rada [3] obradila Emira Ljubunčić, uz pomoć mentorice Sabine Hrustić, je vrlo elegantan i prilično jednostavan metod, koji zahtijeva korištenje osobina cirkularnih matrica.

Cirkularne matrice su bile poznate još u XIX vijeku, što dokazuju radovi matematičara kao što su Gauss i Sylvester, a danas imaju široku primjenu u teoriji signala, kriptografiji i numeričkoj linearnoj algebri. Ove matrice, čije se vrste ciklično rotiraju, omogućavaju povezivanje sa karakterističnim polinomima i otvaraju vrata za rješavanje jednačbi višeg stepena kroz linearnu algebru.

Na sličan način moguće je pristupiti i rješavanju jednačbi četvrtog stepena, što je također obrađeno u magistarskom radu [3].

Posebno nam je zadovoljstvo što ovu metodu možemo primijeniti u nastavi kako za srednjoškolce, kojima ovakav pristup približava apstraktne koncepte, tako i za studente kojima cirkularne matrice mogu poslužiti kao praktičan alat za analizu nula polinoma trećeg stepena.

Zašto koristiti cirkularne matrice?

Ciljna skupina: srednja škola, edukacija u matematiku

Ključne riječi: algebarske jednačbe, cirkularne matrice

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 01. oktobar 2025.

- *Elegantna struktura:* Pojednostavljuje izračunavanje determinanti i svojstvenih vrijednosti.
- *Povezanost sa algebrom:* Direktno povezuje linearne algebarske metode sa klasičnim problemima teorije polinoma.
- *Didaktička vrijednost:* Pogodne za demonstraciju učenicima i studentima jer omogućavaju vizuelno i logičko povezivanje više oblasti matematike.

Prije nego što pređemo na konkretne primjere, prisjetimo se kako funkcioniraju cirkularne matrice i zašto su korisne za rješavanje jednadžbi trećeg stepena.

2. Cirkularne matrice i njihova svojstva

Cirkularne matrice predstavljaju posebnu klasu kvadratnih matrica koje imaju cikličnu (cirkularnu) strukturu. Neka je matrica $C = [c_{ij}]_{n \times n}$, a njena prva vrsta oblika

$$(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}).$$

Kažemo da je matrica C *cirkularna matrica* ako svaka sljedeća vrsta nastaje cikličnim pomakom prethodne vrste ulijevo. Takva matrica ima oblik

$$C = C_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Cirkularna matrica je u potpunosti određena svojom prvom vrstom. Ima konstantne vrijednosti na "dijagonalama" paralelnim s glavnom dijagonalom, što značajno pojednostavljuje njenu analizu, vidjeti [1, 2]. U općem slučaju, cirkularne matrice nisu simetrične. Međutim, u specijalnom slučaju, kada za koeficijente vrijedi uslov

$$c_k = c_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

elementi matrice su raspoređeni simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu, te je cirkularna matrica simetrična.

Neka za matricu A , vektor $X \neq 0$ i parametar λ vrijedi

$$AX = \lambda X.$$

Tada parametar λ zovemo svojstvena vrijednost matrice A , a vektor X svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ . Nalaženje svojstvenih vektora matrice svodi se na rješavanje homogenog sistema $(A - \lambda I)X = 0$. Da bi ovaj sistem imao netrivialna rješenja, operator $A - \lambda I$ ne smije biti regularan. Prema tome, njegova determinanta mora biti jednaka nuli. Dakle, svojstvene vrijednosti matrice A su nule karakterističnog polinoma $\det(A - \lambda I)$, odnosno rješenja karakteristične jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

Osnovna svojstva cirkularnih matrica

Neka je C cirkularna matrica dimenzije $n \times n$ čija je prva vrsta $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Tada vrijedi da je

$$C^n = I,$$

gdje je I jedinična matrica. Ovo implicira da su svojstvene vrijednosti matrice C rješenja jednadžbe

$$\lambda^n = 1,$$

odnosno n -ti korijeni jedinice.

Primjer: Cirkularna matrica reda 3

Posmatrajmo matricu

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Direktnim računanjem dobijamo

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Kako je $C^3 = I$, slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice C rješenja jednačbe

$$\lambda^3 = 1.$$

Također, svaka cirkularna matrica reda 3 ima oblik

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Ovakva matrica može se zapisati i u obliku

$$A = c_0 I + c_1 C + c_2 C^2,$$

gdje je C osnovna cirkularna matrica reda 3.

Pridruženi polinom

Neka je λ svojstvena vrijednost osnovne matrice C , a X pripadajući svojstveni vektor. Tada važi

$$CX = \lambda X, \quad C^k X = \lambda^k X, \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, za matricu $A = c_0 I + c_1 C + \dots + c_{n-1} C^{n-1}$ vrijedi

$$AX = (c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1})X.$$

Izraz

$$q(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$$

predstavlja svojstvenu vrijednost matrice A i naziva se *pridruženi polinom*. Ovaj polinom sadrži sve informacije o svojstvenim vrijednostima cirkularne matrice.

Budući da su svojstvene vrijednosti osnovne matrice C , n -ti korijeni jedinice, možemo jednostavno izračunati vrijednosti pridruženog polinoma za te korijene i dobiti rješenja odgovarajuće jednačbe. Na taj način rješavanje algebarskih jednačbi svodi se na računanje svojstvenih vrijednosti odgovarajuće cirkularne matrice, odnosno analizu pridruženog polinoma. Ova perspektiva vodi do metode za rješavanje kvadratnih, kubnih i jednačbi četvrtog stepena, jer omogućava da apstraktne polinomske jednačbe prevedemo u problemski okvir linearne algebre.

3. Postupak za rješavanje kubnih jednačbi korištenjem cirkularnih matrica

U ovom dijelu prikazujemo kako se kubna jednačba može riješiti korištenjem osobina cirkularnih matrica. Pristup je zasnovan na povezivanju zadatog polinoma sa posebno konstruisanom cirkularnom matricom.

Koraci rješavanja

Korak 1. Polazimo od općeg oblika kubne jednačbe

$$p(x) = 0,$$

gdje je

$$p(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma.$$

Korak 2. Uvodi se smjena

$$x = y - \frac{a}{3},$$

kako bismo eliminisali kvadratni član i dobili potisnutu kubnu jednačbu oblika

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0.$$

Korak 3. Povezujemo ovu jednačbu sa cirkularnom matricom oblika

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjedba 3.1. Zbir elemenata glavne dijagonale ove matrice, to jest, trag matrice C , jednak je nuli, što odgovara eliminaciji kvadratnog člana u potisnutoj kubnoj jednačbi.

Korak 4. Određuje se polinom

$$\det(\lambda I - C).$$

Za cirkularnu matricu

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$\det(\lambda I - C) = \lambda^3 - (b^3 + c^3) - 3bc\lambda.$$

Korak 5. Povezivanje sa reduciranom jednačbom

Izjednačavanjem sa reduciranom jednačbom

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

dobijamo uvjete

$$b^3 + c^3 = -\gamma_1, \quad 3bc = -\beta_1.$$

Korak 6. Eliminacija jedne nepoznate

Iako se izraz

$$b^3 + c^3 = (b + c)^3 - 3bc(b + c)$$

može zapisati u ovom obliku, on ne omogućava neposredno određivanje vrijednosti b i c . Zbog toga uvodimo smjenu inspirisanu Vieteovim formulama. Neka je

$$t = b^3, \quad s = c^3.$$

Tada iz uslova dobijenih u prethodnom koraku slijedi

$$t + s = -\gamma_1, \quad ts = b^3 c^3 = (bc)^3 = \left(-\frac{\beta_1}{3}\right)^3 = -\frac{\beta_1^3}{27}.$$

Dakle, brojevi t i s su rješenja kvadratne jednadžbe

$$z^2 - (t + s)z + ts = 0,$$

odnosno

$$z^2 + \gamma_1 z - \frac{\beta_1^3}{27} = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$t = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}, \quad s = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}.$$

Otuda dobijamo

$$b^3 = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}, \quad c^3 = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{4\beta_1^3}{27}}}{2}.$$

Primjedba 3.2. U izrazima za b i c uvodimo pomoćne konstante

$$m = \frac{-\gamma_1}{2}, \quad n = \frac{\gamma_1^2}{4} + \frac{\beta_1^3}{27},$$

pri čemu vrijedi

$$b = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}}, \quad c = \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}.$$

Korak 7. Pridruženi polinom

Koristeći dobijene vrijednosti b i c , formiramo pridruženi polinom

$$q(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2.$$

Korak 8. Nalaženje rješenja korištenjem kubnih korijena jedinice

Rješenja se računaju za

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

gdje je

$$y_1 = q(1), \quad y_2 = q(\omega), \quad y_3 = q(\omega^2).$$

Korak 9. Rješenja početne jednadžbe su

$$x_i = y_i - \frac{a}{3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Primjer 3.3. Naći nule polinoma

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 20.$$

Rješenje. Najprije uvodimo standardnu smjenu kojom se uklanja kvadratni član, $x = y - \frac{a}{3}$, gdje je $a = -3$, pa je $x = y + 1$. Uvrštavanjem ove smjene u početnu jednadžbu dobijamo

$$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - 6(y + 1) - 20 = 0,$$

odnosno reduciranu kubnu jednadžbu

$$y^3 - 9y - 28 = 0.$$

Dobijena jednačba je oblika

$$y^3 + \beta_1 y + \gamma_1 = 0,$$

gdje je $\beta_1 = -9$ i $\gamma_1 = -28$. Rješenje tražimo u obliku

$$y = b + c,$$

pri čemu vrijedi

$$b^3 + c^3 = -\gamma_1 = 28, \quad bc = -\frac{\beta_1}{3} = 3.$$

Iz uslova $bc = 3$ slijedi $b^3 c^3 = (bc)^3 = 27$. Neka je $b^3 = m + \sqrt{n}$, $c^3 = m - \sqrt{n}$. Tada je

$$b^3 + c^3 = 2m = 28 \Rightarrow m = 14,$$

i

$$b^3 c^3 = m^2 - n = 27,$$

odakle slijedi $n = 196 - 27 = 169$. Prema tome,

$$b^3 = 14 + 13 = 27, \quad c^3 = 14 - 13 = 1,$$

pa je

$$b = 3, \quad c = 1.$$

Jedno realno rješenje reducirane jednačbe je

$$y_1 = b + c = 4.$$

Vraćanjem smjene $x = y + 1$ dobijamo prvo rješenje početne jednačbe

$$x_1 = 5.$$

Preostala dva rješenja dobijaju se korištenjem kompleksnih kubnih korijena jedinstva i imaju oblik

$$y_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{3},$$

pa nakon vraćanja smjene slijedi

$$x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Dakle, nule polinoma $p(x)$ su

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Kako je

$$q(1) = b + c = 3 + 1 = 4,$$

nakon uvođenja smjene prvo rješenje je

$$x_1 = y_1 + 1 = 5.$$

Za kompleksne kubne korijene jedinstva dobijamo

$$q\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + i\sqrt{3},$$

pa je, nakon vraćanja smjene, drugo rješenje

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Analogno,

$$q\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 - i\sqrt{3},$$

odnosno, nakon vraćanja smjene, treće rješenje je

$$x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Primjer 3.4. (Solarna energija) Neka solarna elektrana na krovu porodične kuće dnevno proizvede i akumulira ukupno 500 kWh električne energije. Dnevna dobit x u kWh (odnosno količina energije koja direktno pokriva potrošnju ili se može prodati) zadovoljava relaciju

$$x^3 + x = 500.$$

Kolika je ta dobit?

Rješenje. Rješavamo kubnu jednadžbu

$$x^3 + x - 500 = 0.$$

Jednadžba je već u reduciranoj formi

$$x^3 + \beta_1 x + \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = -500.$$

Kako trag odgovarajuće cirkularne matrice mora biti jednak nuli (zbog izostanka kvadratnog člana), cirkularna matrica koja odgovara ovoj jednadžbi ima oblik

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom koji odgovara matrici C je

$$\det(\lambda I - C) = \lambda^3 - b^3 - c^3 - 3bc\lambda.$$

Poređenjem s polinomom $x^3 + x - 500$ dobijamo sistem

$$\begin{cases} b^3 + c^3 = 500, \\ 3bc = -1. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$bc = -\frac{1}{3}, \quad b^3 c^3 = (bc)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Neka je

$$b^3 = m + \sqrt{n}, \quad c^3 = m - \sqrt{n}.$$

Tada vrijedi

$$b^3 + c^3 = 2m = 500 \Rightarrow m = 250,$$

i

$$b^3 c^3 = m^2 - n = -\frac{1}{27},$$

odakle slijedi $n = m^2 + \frac{1}{27}$, odnosno $n = 62500 + \frac{1}{27}$. Prema tome,

$$b = \sqrt[3]{250 + \sqrt{62500 + \frac{1}{27}}}, \quad c = \sqrt[3]{250 - \sqrt{62500 + \frac{1}{27}}}.$$

Poznati kubni korijeni iz jedinice su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Uvrštavanjem u pridruženi polinom

$$q(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2$$

dobijamo rješenja

$$x_1 = b + c, \quad x_2 = b\lambda_2 + c\lambda_2^2, \quad x_3 = b\lambda_3 + c\lambda_3^2.$$

Kako su x_2 i x_3 kompleksno konjugovana, jedino realno rješenje je $x = b + c$, odnosno

$$x \approx 7,895 \text{ kWh.}$$

Dnevna dobit solarne elektrane iznosi približno 7,895 kWh. Ovaj primjer pokazuje kako se realan model iz energetike može opisati kubnom jednačbom i riješiti korištenjem osobina cirkularnih matrica, povezujući apstraktne matematičke metode s praktičnim primjenama u savremenim temama energetske efikasnosti.

4. Zaključak

Kubne jednačbe možemo rješavati na razne načine: pomoću Cardanovih formula, Tschirnhausovog metoda (vidjeti [3]), ali i primjenom osobina cirkularnih matrica. Tschirnhausov metod je računski zahtjevniji, dok Cardanove formule često vode do komplikovanih korijena koje je teško interpretirati bez računarske podrške.

Postupak rješavanja kubnih jednačbi pomoću cirkularnih matrica, odnosno, njihovih osobina, je primjenljiv, jednostavan za praćenje i didaktički interesantan. Dovoljno je znati koeficijente cirkularne matrice i na osnovu njih odrediti korijene polinoma, kao i sam polinom. Dobra strana ove metode je što njenom primjenom sigurno pronalazimo rješenja zadate jednačbe, pri čemu postupak njihovog pronalaska povezuje znanja iz različitih oblasti matematike.

Kroz istraživanje sprovedeno tokom izrade magistarskog rada, uočile smo različite prednosti i nedostatke metoda koje se koriste za rješavanje jednačbi stepena većeg od dva. U nastavku prikazujemo sažeto poređenje najčešćih pristupa:

Metoda	Prednosti	Nedostaci
Cardanova formula	Egzaktno rješenje, može se direktno primijeniti na kubne jednačbe	Teško primjenljiva u nastavnoj praksi zbog složenih računa i rada sa kompleksnim brojevima
Tschirnhausova metoda	Generalizabilna na više stepene; čisto algebraički pristup	Računski vrlo složena; zahtijeva više koraka i transformacija
Cirkularne matrice	Intuitivna veza sa linearnom algebrom; pogodna za nastavu; omogućava uvid u strukturu rješenja	Zahtijeva poznavanje koncepta matrica i svojstvenih vrijednosti

5. Za dalje istraživanje

Iako smo se u ovom članku fokusirali na rješavanje kubnih jednačbi korištenjem cirkularnih matrica, ista ideja može se proširiti na jednačbe četvrtog stepena i šire. Posebno je zanimljiva mogućnost primjene ovog pristupa u računarstvu, digitalnoj obradi signala i teoriji kodiranja, gdje cirkularne matrice igraju važnu ulogu.

Kao podsticaj za dalje istraživanje i primjenu metode, ostavljamo čitaocima sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1.

Riješite jednačbu

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = 0$$

pomoću metode cirkularnih matrica. Uvedite odgovarajuću smjenu i pronađite nule polinoma koristeći pridruženi polinom.

Zadatak 2. (Primjena)

Pretpostavimo da u jednom danu sistem pametne distribucije električne energije balansira između potrošnje, rezervi i prodaje. Ako je ukupna efektivna snaga u kWh izražena modelom

$$x^3 + 2x = 162,$$

odredite realnu dobit izraženu u kilovat-satima koristeći osobine cirkularnih matrica. Objasnite smisao smjene i uporedite sa numeričkim rješenjem.

Literatura

- [1] Dan Kalman and James E. White, Polynomial Equations and Circulant Matrices, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 108, No. 9 (Nov., 2001), pp. 821-840
- [2] Biljana M. Radičić, *Prilog teoriji k-cirkularnih matrica*, Beograd 2016.
- [3] E. Ljubunčić, *Algebarske jednačbe stepena većeg od dva*, magistarski rad, Tuzla 2022.

Balansirajući i kvadratno-trougaoni brojevi

Sanela Halilović¹, Amela Selimović²

¹PMF, Univerzitet u Tuzli

²JUMS saobraćajna škola Tuzla

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog profesora dr.sci. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom radu pokazujemo kako kvadratno-trougaone brojeve možemo odrediti pomoću odgovarajuće Pellove jednačine. Zatim predstavljamo balansirajuće brojeve i dajemo vezu sa kvadratno-trougaonim brojevima, te nekoliko rekurentnih relacija koje vrijede među njima.

1. Uvod

Trougaoni broj T_n je prirodni broj oblika $\frac{n(n+1)}{2}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Ovaj broj se može predstaviti u obliku pravilnog trougla. Naime, T_n tačkica se može ravnomjerno rasporediti u obliku jednakostraničnog trougla, te otuda i ovakav naziv. Tako dobijamo:

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Trougaoni brojevi su: 1, 3, 6, 10, 15,

Kvadratni broj (ili potpun kvadrat) K_n je broj oblika n^2 , gdje je $n \in \mathbb{N}$. K_n tačaka možemo ravnomjerno rasporediti u obliku pravilnog četverougla, to jest kvadrata. Kvadratni brojevi

$$K_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

su brojevi: 1, 4, 9, 16, 25,

Trougaoni i kvadratni brojevi spadaju u figurativne brojeve, a više o njima može se pogledati u radu [5].

Definicija 1.1. *Diofantska jednačina*

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{1}$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, naziva se Pellova jednačina.

Pellova jednačina je rješiva za svaki d . Najmanje rješenje u skupu prirodnih brojeva Pellove jednačine zovemo fundamentalnim rješenjem.

Ciljna skupina: srednja škola i fakultet

Ključne riječi: trougaoni brojevi, kvadratni brojevi, balansirajući brojevi, Pellova jednačina

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 10. decembar 2025.

Teorem 1.2. *Pellova jednačina (1) ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je (x_1, y_1) fundamentalno rješenje, onda su sva rješenja (x_n, y_n) u skupu prirodnih brojeva ove jednačine data formulom*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = \left(x_1 + y_1 \sqrt{d} \right)^n.$$

Pellove jednačine se mogu rješavati pomoću razvoja broja $\sqrt{d}$ u verižni razlomak (vidi [4]). Svaki realan broj α se može zapisati u obliku

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

ili kraće zapisano $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Definicija 1.3. *Neka je a_0 cijeli broj i neka su $a_1, a_2, \dots$ prirodni brojevi. Ako je $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ onda ovaj izraz nazivamo razvoj broja α u jednostavni verižni razlomak. Razlomak $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ je i -ta konvergenta od α , a_i je i -ti parcijalni kvocijent od α , a $\alpha_i = [a_i; a_{i+1}, \dots]$ je i -ti potpuni kvocijent od α .*

Propozicija 1.4. *Za $n \geq 2$ vrijedi*

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1,$$

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1.$$

Dogovorno uzimamo da je $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$. Uz ovaj dogovor Propozicija 1.4 vrijedi za sve $n \geq 0$.

Teorem 1.5. *Sva rješenja Pellove jednačine $x^2 - dy^2 = 1$ u skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ su oblika $(x, y) = (p_i, q_i)$, gdje su p_i/q_i konvergente u razvoju broja $\sqrt{d}$ u jednostavni verižni razlomak. Neka je r dužina perioda u razvoju broja $\sqrt{d}$ u jednostavni verižni razlomak. Ako je r paran, onda su sva rješenja jednačine data sa:*

$$(x, y) = (p_{nr-1}, q_{nr-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fundamentalno rješenje je $(x_1, y_1) = (p_{r-1}, q_{r-1})$. Ako je r neparan, onda su sva rješenja jednačine data sa,

$$(x, y) = (p_{2nr-1}, q_{2nr-1}),$$

dok joj je fundamentalno rješenje $(x_1, y_1) = (p_{2r-1}, q_{2r-1})$.

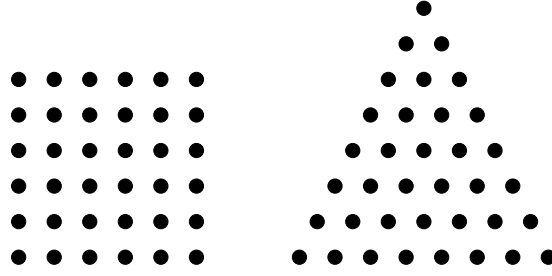
2. Kvadratno-trougaoni brojevi

Postoje brojevi koji su istovremeno i kvadratni i trougaoni. Na primjer, broj 36 je kvadratni jer je $K_6 = 6^2 = 36$, ali i trougaoni jer je $T_8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ (vidi Sliku 1). Dakle, šesti kvadratni broj je jednak osmom trougaonom broju. Brojevi koji su istovremeno i trougaoni i kvadratni brojevi, nazivaju se *kvadratno-trougaoni brojevi*. Za n -ti kvadratno-trougaoni broj možemo koristiti oznaku S_n .

Da li ima još takvih brojeva i koliko ih ima?

Da bismo našli sve kvadratno-trougaone brojeve, treba riješiti sljedeću jednačinu,

$$K_n = T_m. \tag{2}$$



Slika 1: Kvadratno-trougao broja 36 kao kvadrat i kao trougao.

Dobijamo,

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \frac{m(m+1)}{2} \iff \\
 m^2 + m - 2n^2 &= 0 \iff \\
 m^2 + m + \frac{1}{4} - 2n^2 &= \frac{1}{4} \iff \\
 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 2n^2 &= \frac{1}{4} \iff \\
 (2m+1)^2 - 8n^2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ako u (3) uvedemo smjene $2m+1 = x$ i $n = y$, dobit ćemo Pellovu jednačinu:

$$x^2 - 8y^2 = 1. \tag{4}$$

Koristit ćemo razvoj broja $\sqrt{8}$ u jednostavni verižni razlomak

$$\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, \dots] = [2; \overline{1, 4}],$$

gdje vidimo da je period $r = 2$ paran.

U Tablici 1 se nalazi nekoliko prvih konvergenti razvoja broja $\sqrt{8}$ u verižni razlomak.

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i			2	1	4	1	4	1	4	1
p_i	0	1	2	3	14	17	82	99	478	577
q_i	1	0	1	1	5	6	29	35	169	204

Tablica 1: Konvergente razvoja broja $\sqrt{8}$.

Prema Teoremu 1.5 sva rješenja jednačine (4) u skupu prirodnih brojeva su:

$$(x_n, y_n) = (p_{nr-1}, q_{nr-1}) = (p_{2n-1}, q_{2n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje su $\frac{p_i}{q_i}$ konvergente razvoja $\sqrt{8}$ u verižni razlomak, a fundamentalno rješenje je

$$(x_1, y_1) = (p_{r-1}, q_{r-1}) = (p_1, q_1).$$

Iz Tablice 1 vidimo da je $(x_1, y_1) = (3, 1)$ fundamentalno rješenje jednačine (4), te četiri prva rješenja su:

$$(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (3, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (p_3, q_3) = (17, 6)$$

$$(x_3, y_3) = (p_5, q_5) = (99, 35)$$

$$(x_4, y_4) = (p_7, q_7) = (577, 204).$$

Sva rješenja su data sa:

$$x_n + y_n \sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kada vratimo smjene: $n = y$ i $m = \frac{x-1}{2}$, dobijamo Tablicu 2 sa rješenjima polazne jednačine (2).

x	$y = n$	$m = \frac{x-1}{2}$	$K_n = n^2$	$T_m = \frac{m(m+1)}{2}$
3	1	1	1	1
17	6	8	36	36
99	35	49	1225	1225
577	204	288	41616	41616

Tablica 2: Rješenja (x, y) Pellove jednačine i rješenja jednačine $K_n = T_m$.

S obzirom da su zadnje dvije kolone jednake, ti brojevi su zaista istovremeno i trougaoni i kvadratni brojevi. Takvih brojeva ima beskonačno mnogo jer i rješenja odgovarajuće Pellove jednačine (4) ima beskonačno mnogo.

3. Balansirajući brojevi

Indijski matematičari Behera i Panda (vidi [1]) su krajem 90-ih godina prošlog stoljeća razmatrali sljedeći problem: *Postoje li dva uzastopna trougaona broja čiji je zbir opet trougaoni broj?* Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi n i r , $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r} ? \quad (5)$$

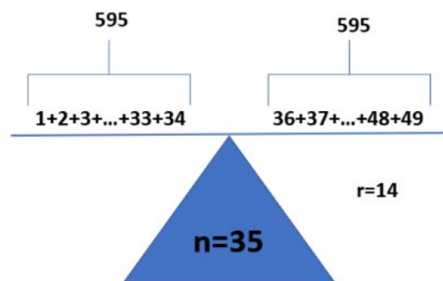
Uočimo da je

$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = T_8,$$

te

$$T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = 1225 = T_{49},$$

pa su $(n, r) = (6, 2)$ i $(n, r) = (35, 14)$ rješenja postavljenog problema.



Slika 2: Balansirajući broj $n = 35$ sa balanserom $r = 14$.

Prirodno je pitati se ima li još parova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni problem. Pokazat ćemo da ih ima beskonačno mnogo. Relacija (5) je ekvivalentna izrazu

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + r),$$

to jest

$$1 + 2 + \dots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r). \quad (6)$$

Na prethodnu relaciju možemo gledati kao na diofantsku jednačinu sa nepoznatima n i r , pa se početni problem svodi na traženje rješenja jednačine (6).

Definicija 3.1. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednačinu (6). Tada se n naziva balansirajući broj, a r njemu pridruženi balanser. Oznaka za n -ti balansirajući broj je B_n .*

Uočimo da je trivijalno rješenje jednačine (6) uređeni par $(n, r) = (1, 0)$. Označavamo ga sa $B_1 = 1$. Pokazali smo da su 6 i 35 balansirajući brojevi sa pripadnim balanserima $r = 2$ i $r = 14$, respektivno. To su sljedeća dva balansirajuća broja: $B_2 = 6$ i $B_3 = 35$.

Na prvi pogled naziv ovog niza brojeva - *balansirajući brojevi* (engl. *balancing numbers*) zvuči neobično. No, pogledamo li Sliku 2 na kojoj smo vizualizirali balansirajući broj B_3 , vidimo ravnotežu, to jest "balans" dva zbira uzastopnih prirodnih brojeva.

Jednačinu (6) možemo zapisati kao

$$\frac{n(n-1)}{2} = nr + \frac{r(r+1)}{2}, \quad (7)$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}. \quad (8)$$

Uočimo da je desna strana u (8) upravo jednaka $(n+r)$ -tom trougaonom broju, pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija balansirajućeg broja.

Teorem 3.2. *Prirodan broj n je balansirajući ako i samo ako je n^2 trougaoni broj.*

Sa druge strane (7) možemo shvatiti i kao kvadratnu jednačinu po r :

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0 \quad (9)$$

Jasno je da je n balansirajući ako i samo ako postoji pozitivno cjelobrojno rješenje prethodne jednačine, to jest ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2},$$

prirodan broj. Dalje, zaključivanjem da diskriminanta jednačine (9) mora biti potpun kvadrat dobijamo još jednu karakterizaciju balansirajućeg broja.

Teorem 3.3. *Prirodan broj n je balansirajući ako i samo ako je $8n^2 + 1$ potpuni kvadrat.*

Prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da su balansirajući brojevi upravo rješenja Pellove jednačine

$$m^2 - 8n^2 = 1, \quad (10)$$

pa ih stoga postoji beskonačno mnogo. Skup svih rješenja Pellove jednačine (10) po nepoznatoj n je upravo niz balansirajućih brojeva (B_n) .

Dakle, balansirajući broj n je prirodan broj koji zadovoljava jednačinu $T_n + T_{n+1} = T_{n+r}$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, n je balansirajući broj ako i samo ako je n^2 trougaoni broj (Teorem 3.2), odnosno

$$B_n^2 = T_{n+r},$$

gdje je r pripadni balanser.

Prema onome što smo pokazali, niz kvadrata balansirajućih brojeva (B_n^2) upravo predstavlja niz kvadratno-trougaonih brojeva. Dakle, kvadrat svakog balansirajućeg broja je kvadratno-trougaoni broj i obratno, korijen svakog kvadratno-trougaonog broja je balansirajući broj.

Detaljnije o trougaonim, kvadratnim, kvadratno-trougaonim i balansirajućim brojevima može se naći u [3]. Sada ćemo navesti tvrdnju koja nam daje dvije rekursivne relacije za balansirajuće brojeve.

Lema 3.4. *Neka su B_n , $n \in \mathbb{N}$ balansirajući brojevi. Tada za sve $n \geq 2$ vrijedi:*

- a) $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$,
- b) $B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}$.

Dokaz se može vidjeti u [2]. Jednakosti iz Leme 3.4 možemo iskoristiti za generisanje balansirajućih brojeva, uz početne uslove $B_1 = 1$ i $B_2 = 6$.

Teorem 3.5. *Niz kvadratno-trougaonih brojeva (S_n) , zadovoljava rekursivnu relaciju:*

$$S_{n+1} = 34S_n - S_{n-1} + 2,$$

za $n \geq 2$, uz početne uslove $S_1 = 1$, $S_2 = 36$.

Dokaz: Kvadrirajmo obje strane rekursivne relacije iz Leme 3.4 pod a). Vrijedi

$$\begin{aligned} (B_{n+1})^2 &= (6B_n - B_{n-1})^2 \\ B_{n+1}^2 &= 36B_n^2 - 12B_nB_{n-1} + B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 12B_nB_{n-1} + 2B_{n-1}^2 - B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 2B_{n-1}(6B_n - B_{n-1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 36B_n^2 - 2B_{n-1}B_{n+1} - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2B_n^2 - 2B_{n-1}B_{n+1} - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2(B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2((1 + B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}B_{n+1}) - B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2 - B_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Ovdje smo u predzadnjem redu jednakosti koristili Lemu 3.4 pod b). Dakle dobili smo

$$B_{n+1}^2 = 34B_n^2 - B_{n-1}^2 + 2,$$

što je upravo jednačina

$$S_{n+1} = 34S_n - S_{n-1} + 2,$$

jer za svaki prirodni broj n vrijedi $B_n^2 = S_n$. $\square$

Zadatak 1. *Pokazati da za svaki balansirajući broj x vrijedi da je $F(x) = 2x\sqrt{1+8x^2}$ takođe balansirajući broj.*

Rješenje: Broj x je balansirajući broj, pa je $1 + 8x^2$ prema Teoremu 3.3 potpun kvadrat. Broj $\frac{8x^2(1+8x^2)}{2}$ je trougaoni broj jer je oblika $\frac{n(n+1)}{2}$. Sa druge strane, kako je $\frac{8x^2(1+8x^2)}{2} = 4x^2(1+8x^2)$, on je i potpun kvadrat jer su i $4x^2$ i $1+8x^2$ potpuni kvadrati. Prema tome, $4x^2(1+8x^2)$ je kvadratno-trougaoni broj, a to znači da je $\sqrt{4x^2(8x^2+1)} = 2x\sqrt{1+8x^2}$ balansirajući broj. $\square$

Na kraju preporučujemo čitaocima da se još pozabave ovim interesantnim brojevima i ostavljamo nekoliko zadataka kao podsticaj.

Zadatak 2. Pokazati da za svaki balansirajući broj x vrijedi da je $G(x) = 3x + \sqrt{1 + 8x^2}$ takođe balansirajući broj.

Zadatak 3. Dokazati da za balansirajuće brojeve vrijedi

$$B_{2n} = B_n \cdot (B_{n+1} - B_{n-1}).$$

Zadatak 4. Za svaki prirodni broj n vrijedi $B_1 + B_3 + \dots + B_{2n-1} = B_n^2$, gdje su B_n balansirajući brojevi.

Zadatak 5. Za svaki prirodni broj n vrijedi $B_2 + B_4 + \dots + B_{2n} = B_n B_{n+1}$, gdje su B_n balansirajući brojevi.

Literatura

- [1] A. Behera and G. K. Panda: *On the Square Roots of Triangular Numbers*, The Fibonacci Quarterly, 1999.
- [2] R. Gautam: *Ballancing Numbers and Application*, Journal of Advanced College of Engineering and Management, vol.4, 2018.
- [3] A. Habibović: *Trougaoni i kvadratni brojevi*, Diplomski rad, PMF Tuzla, 2024.
- [4] B. Ibrahimpasić: *Uvod u teoriju brojeva*, Pedagoški fakultet Bihać, 2014.
- [5] S. Mustafić: *Figurativni brojevi*, Evolventa, 3 (1), 2020.

Približna konstrukcija ugla od 1 radijana

Jens Carstensen¹, Alija Muminagić¹

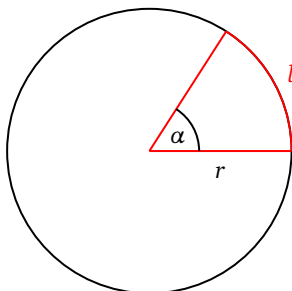
¹Kraljevina Danska

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog prof. dr. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom članku dajemo nekoliko približnih konstrukcija ugla od 1 rad.

1. Uvod

Radian (u oznaci rad) je mjerna jedinica za ugao. Veličina centralnog ugla α u radijanima je jednaka omjeru duljine kružnog luka l nad tim uglom i poluprečnika kružnice r , tj. $\alpha = \frac{l}{r}$.



Tako imamo da je radijanska mjera ugla, čija je mjera u stepenima jednaka 180° jednaka $\frac{L}{r}$, gdje je L obim kružnice, tj. $\frac{2r\pi}{2} = \pi$ rad ili $180^\circ = \pi$ rad.

Zato je

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 44,8''$$

$$\text{ i } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad.}$$

Dokazano je da konstrukcija ugla od 1 rad nije moguća. Međutim, urađeno je mnogo interesantnih približnih konstrukcija i nekoliko takvih dajemo u ovom članku.

Preporučujemo da obavezno pročitate članke [4] i [5].

2. Prva konstrukcija

Konstruišimo kružnicu $k(O, 1)$ i u tački A konstruišimo tangentu t . Na tangenti t , s iste strane tačke A odredimo tačke B i C tako da je $AC = \frac{3}{2}$ i $AB = \sqrt{3}$. Konstrukcija duži $\sqrt{3}$ je data na Slici 11. Zatim na tangetni t odredimo tačku D takvu da je $CD = \frac{BC}{4}$. Spojimo tačke O i D i presjechnu tačku kružnice i pravca kroz tačke O i D označimo sa E . Dokazat ćemo da je duljina luka $\widehat{AE}$ približno jednaka 1 rad. Imamo

$$AD = AC + CD = AC + \frac{BC}{4} = AC + \frac{1}{4}(AB - AC) = \frac{3}{4}AC + \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 1,558012702.$$

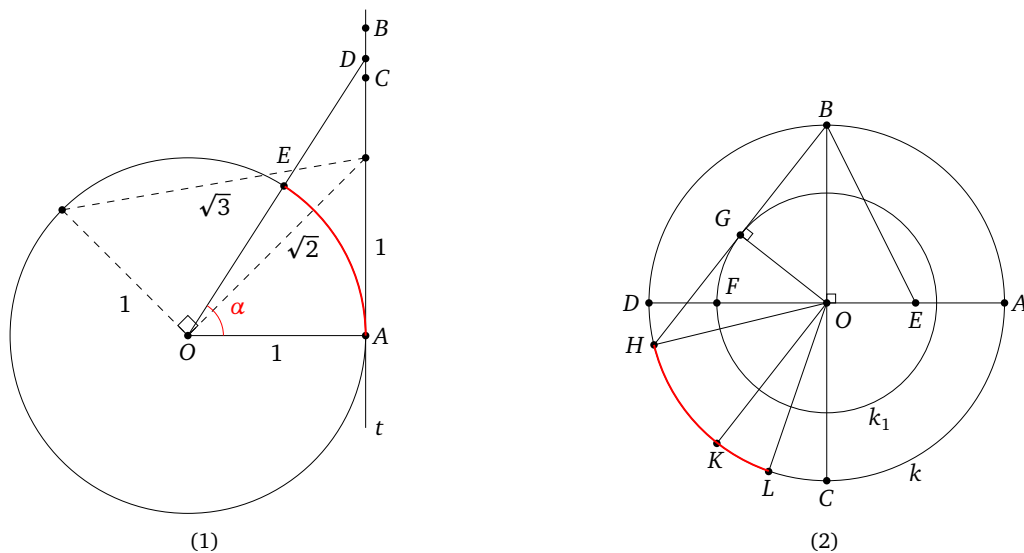
Ciljna skupina: srednja škola, fakultet

Ključne riječi: radijan, ugao

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 01. juli 2025.

U $\triangle OAD$ je $\tan \alpha = \frac{AD}{1}$ pa je $AD = \tan \alpha \approx 1,558012702$, odakle je $\alpha \approx 1$ rad. Kako je $\tan 1 = 1,557407725$, čitaoci sami mogu ocijeniti grešku.



Slika 1

3. Druga konstrukcija

U kružnici $k(O, 1)$ konstruišemo dva međusobno normalna prečnika $AD \perp BC$, (Slika 12). Tačka E polovi dužinu OA a tačka F leži na prečniku AD , tako da je $EF = EB$. Konstruišemo kružnicu $k_1(O, OF)$ i tangentu na tu kružnicu iz tačke B . Dodirnu tačku te tangente i kružnice k_1 označimo sa G . Pravac kroz tačke B i G siječe kružnicu k u tački H . Primjenom Pitagorinog teorema na trougao OEB dobijamo

$$BE^2 = OE^2 + OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Osim toga, vrijedi

$$GO = FO = EF - EO = BE - EO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

U pravouglom trouglu OBG je $\sin \sphericalangle OBG = \frac{OG}{OB} = \frac{OG}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ pa je $\sphericalangle OBG = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0,666239$ ili $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx \frac{2}{3}$ rad. Dalje je $\sphericalangle HOC = 2 \cdot \sphericalangle HBC = 2 \cdot \sphericalangle OBG = 2 \cdot \frac{2}{3} \text{ rad} = \frac{4}{3} \text{ rad}$, gdje prva jednakost vrijedi zbog odnosa centralnog i periferijskog ugla nad istim lukom a druga jer je trougao OBH jednakostraničan.

Povucimo paralelu kroz tačku O sa dužinom BH i presječnu tačku te paralele s kružnicom k označimo sa K . Vrijedi $\sphericalangle HOK = 2 \text{ rad} = \sphericalangle KOC$. Simetrala $\sphericalangle KOC$ siječe kružnicu k u tački L i sa slike vidimo da je

$$\sphericalangle HOL = \sphericalangle HOK + \sphericalangle KOL = \frac{2}{3} \text{ rad} + \frac{1}{3} \text{ rad} = 1 \text{ rad}.$$

Ovdje je dakle približna vrijednost za 1 rad data sa $\frac{3}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0.9993591$ rad.

Napomena: Iz jednog dijela ove konstrukcije možemo dobiti i približnu konstrukciju broja π . Zaista, Pitagorina teorema primijenjena na trougao OBG daje

$$BG^2 = OB^2 - OG^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{4-6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$$

što je ekvivalentno sa

$$BG = \sqrt{0.618034} \approx 0.786151 \approx \frac{\pi}{4}$$

i lako konstruišemo $\pi = 4 \cdot BG$.

4. Treća konstrukcija

Konstruišemo kružnicu $k(O, OA)$ i neka tačke B, C i D leže na kružnici k tako da je $BC = CD = DA = OB$, (Slika 21). Neka je tačka P središte dužine OA . Nacrtajmo sada kružnicu $k_1(P, PA)$ a u tački O konstruišemo normalu na AB i presječnu tačku te normale i kružnice k označimo sa E . Neka pravci provučeni kroz tačke P i E te P i C sijeku kružnicu k_1 u tačkama F i G . Na kružnici k odredimo tačke I i H tako da je $EI = EF$ i $CH = HG$. Presječnu tačku pravca kroz H i O sa kružnicom k označimo sa J , a projekciju tačke C na prečnik AB sa Q .

Dokazat ćemo da je $\angle IJH = 1$ rad.

Možemo uzeti da je $OA = OB = 1$. Tada je $OP = \frac{1}{2}$, pa Pitagorina teorema primijenjena na trougao OPE daje

$$PE^2 = OP^2 + OE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow PE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

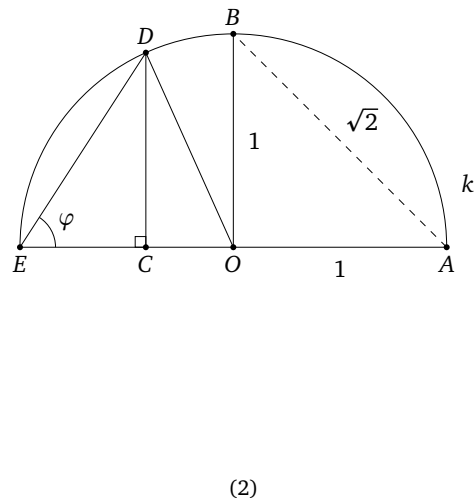
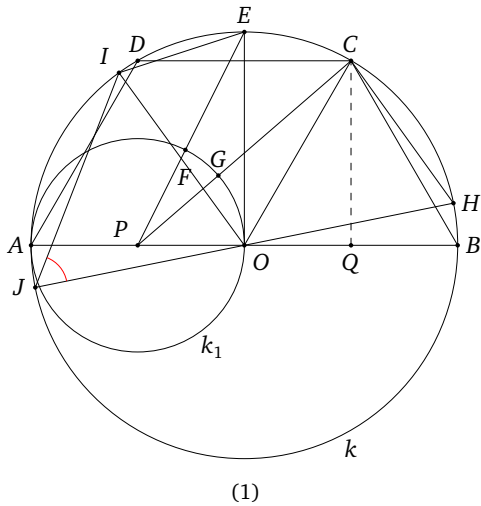
Zato je $EI = EF = EP - PF = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Trougao OBC je jednakokranični sa dužinom stranice 1, a CQ je njegova visina, pa imamo $CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pitagorina teorema za trougao PQC daje

$$CP^2 = CQ^2 + PQ^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow CP = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Sada je

$$CH = CG = CP - PG = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$



Slika 2

Dalje je trougao OIE jednakokraki i vrijedi $EI = 2 \sin \frac{\angle IOE}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \sin \frac{\angle IOE}{2}$ i odavdje slijedi $\frac{\angle IOE}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\pi}{10}$. Imamo da je $\angle EOC = \frac{\pi}{6}$ i trougao OCH jednakokraki, pa je $CH = 2 \cdot \sin \frac{\angle COH}{2}$, tj. $\frac{\sqrt{7}-1}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\angle COH}{2}$, odakle je $\frac{\angle COH}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4}$.

Sa slike vidimo da je $\angle IOH = \angle IOE + \angle EOC + \angle COH$ i zbog $\angle IJH = \frac{\angle IOH}{2}$, dobijamo:

$$\angle IJH = \frac{\angle IOH}{2} = \frac{\angle IOE}{2} + \frac{\angle EOC}{2} + \frac{\angle COH}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{12} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{11\pi}{60} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} \approx 0,999987 \text{ rad.}$$

Primijetimo da je ova približna konstrukcija dosta dobra, ali je poprilično komplikovana.

5. Četvrta konstrukcija

Neka je EA prečnik polukružnice $k(O, OA = 1)$, $OB \perp OA$ i tačka C na prečniku $EA = 2$ takva da je $AC = AB = \sqrt{2}$, (Slika 22). U tački C konstruišemo normalu na OE i presjechnu tačku te normale i polukružnice k označimo sa D . Jasno je da je $OD = 1$ i $OC = AC - AO = \sqrt{2} - 1$. Pitagorina teorema u trouglu OCD daje

$$CD^2 = OD^2 - OC^2 = 1^2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

zatim imamo $CE = AE - AC = 2 - \sqrt{2}$, a u trouglu DEC je

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$$

i konačno iz trougla DEC slijedi $\sin \varphi = \frac{DC}{DE}$, odakle je

$$\sin^2 \varphi = \frac{DC^2}{DE^2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pa je $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,9989 \text{ rad.}$ Jednostavna konstrukcija i mala greška.

6. Još nekoliko konstrukcija

Prvo ćemo dati približnu konstrukciju ugla od 3 rad. Kvadrat $ABCD$ je upisan u kružnicu $k(O, 1)$ i smješten u pravougli koordinatni sistem xOy kao na Slici 31. Pri tome su tačke M i N središta stranica BC i AD upisanog kvadrata. Povucimo pravac kroz tačke A i M i presjek tog pravca i kružnice k označimo sa P , a presjek pravca kroz O i N sa Q . Dokazat ćemo da je $\angle QOP = \alpha \approx 3 \text{ rad.}$

Lako pokazujemo da tačka M ima koordinate $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, a da je jednačina pravca AM

$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (1)$$

S druge strane kružnica k ima jednačinu

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

pa rješavanjem sistema jednačina (1) i (2), dobijamo koordinate tačke $P\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$.

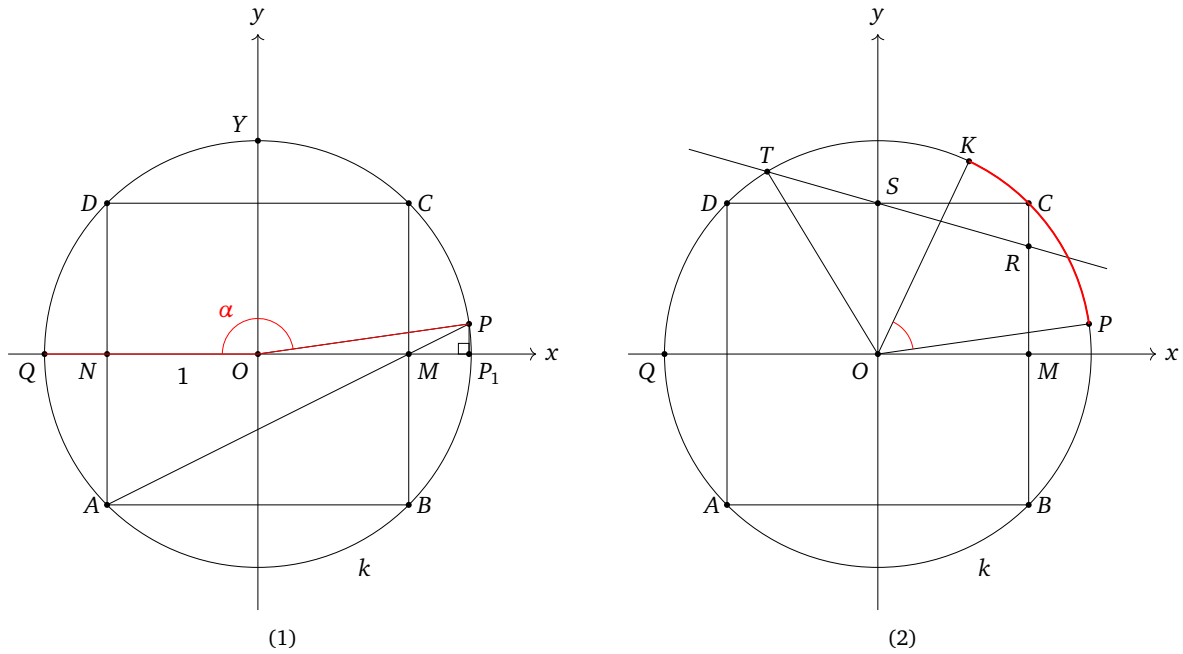
Neka je P_1 projekcija tačke P na x -osu. Tada u pravouglom trouglu OP_1P vrijedi

$$\tan \angle P_1OP = \tan \angle MOP = \frac{PP_1}{OP_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{10}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{1}{7}$$

tj. $\angle MOP = \arctan \frac{1}{7}$ i konačno

$$\alpha = \angle QOP = \pi - \angle MOP = \pi - \arctan \frac{1}{7} = 2.999656 \approx 3 \text{ rad.}$$

Pokušajmo sada koristeći Sliku 31 konstruisati ugao od 1 rad.



Slika 3

6.1. Peta konstrukcija

Kako je $Y(O, 1)$, dobijamo da je

$$\frac{1}{2} \angle POY + 2 \cdot \angle POM = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \angle POM \right) + 2 \cdot \angle POM = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \angle POM = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} (\pi - 3) = \frac{7\pi}{4} - \frac{9}{2} \approx 1 \text{ rad.}$$

6.2. Šesta konstrukcija

Neka je tačka R na BC takva da je $CR : RB = 1 : 7$. Povucimo pravac kroz tačke R i S (S je središte duži CD) i presjek tog pravca i kružnice k označimo sa T . Jednačina tog pravca je $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, a jednačina kružnice k je $x^2 + y^2 = 1$. Rješavanjem tog sistema jednačina dobijamo koordinate tačke $T \left(\frac{4-12\sqrt{2}}{17\sqrt{2}}, \frac{16+3\sqrt{2}}{17\sqrt{2}} \right)$, (Slika 32).

Ugao između vektora $\vec{OT} = \left(\frac{4-12\sqrt{2}}{17\sqrt{2}}, \frac{16+3\sqrt{2}}{17\sqrt{2}} \right)$ i $\vec{OP} = \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10} \right)$ određen je sa $\cos \beta = \vec{OT} \cdot \vec{OP} = \frac{22\sqrt{2}-81}{85\sqrt{2}}$, tj. $\beta = 1.99875$.

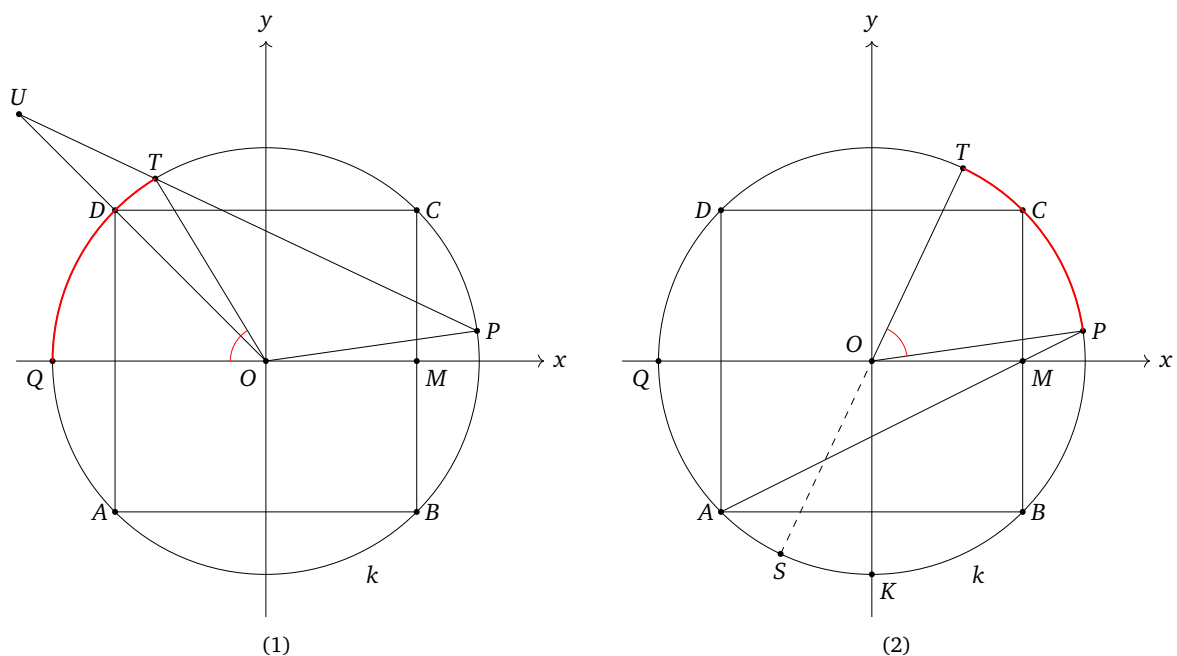
Simetrala ugla $\beta = \angle POT$ je OK i polovi luk $\widehat{TP}$, pa svaki od dijelova luka $\widehat{TP}$ (tj. $\widehat{TK} = \widehat{KP}$) ima dužinu $\frac{1}{2}\beta = 0.999375 \approx 1 \text{ rad}$.

6.3. Sedma konstrukcija

Na produžetku duži OD , preko tačke D , konstruišimo tačku U , tako da je $OU = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot OD = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot 1$. Tako dobijamo koordinate tačke $U \left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \right)$. Presječnu tačku pravca kroz tačke P i U označimo sa T . Tada je $\angle TOQ \approx 1 \text{ rad}$, čiji dokaz prepuštamo čitaocima, (Slika 41).

6.4. Osmu konstrukcija

Neka je $K(0, -1)$ i neka tačka S leži na kružnici takva da je $\angle POS = \frac{5}{4} \angle POK$, (Slika 42). neka je tačka T dijametralno suprotna tački S na kružnici. Tada je $\angle POT \approx 1 \text{ rad}$.



Slika 4

Imamo $\sphericalangle POK = \sphericalangle POM + \frac{\pi}{2}$, pa je

$$\sphericalangle POS = \frac{5}{4} \sphericalangle POK = \frac{5}{4} \left(\sphericalangle POM + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{4} \sphericalangle POM + \frac{5\pi}{8}.$$

Sada je

$$\sphericalangle POT = \pi - \sphericalangle POS = \pi - \frac{5}{4} \sphericalangle POM - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4} \sphericalangle POM = \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4} \cdot 0,141897 \approx 1,000726 \text{ rad.}$$

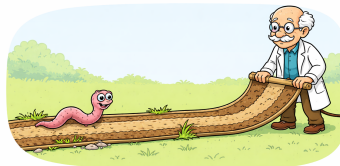
Literatura

- [1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Konstruktion af 1 radian*, Matematik Magasinet, 25, s. 69.
- [2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Konstruktion af 1 radian, 2*, Matematik Magasinet, 78, s. 2868.
- [3] J. Dickson, N. Lord: *Approximate constructions of 1 radian*, The Mathematical gazette, vol. 98, number 542, July, 2014.
- [4] D. Kamber-Hamzić: *Pojam radijana u nastavi trigonometrije*, Evolventa Vol. 5, No. 1, s. 18-22, Tuzla, 2022.
- [5] Š. Jusić: *Približne konstrukcije broja π* , Evolventa Vol. 5, No. 2, s. 37-44, Tuzla, 2022.
- [6] Problem Corner, 93H, The mathematical gazette, Vol. 94, No. 529, March 2010.

2

KUTAK ZA ZADATKE

Nagradni zadatak: Unedogledna trka



Preko sedam gora i sedam mora postoji zemlja Unedogledija u kojoj svi žive unedogled dugo. Tamo se nalazi gumeni tepih dužine jedan metar koji se može rastezati do unedogled. Na jednom kraju tepiha se nalazi neumorni crvić koji grabi ka drugom kraju tepiha brzinom jedan centimetar u minuti. Na drugom kraju trake nalazi se čikica čija je uloga da nervira crvića tako što nakon svake minute on rastegne tepih za jedan metar. Na početku ove zanimljive "trke" žitelji Unedogledije su bili podijeljeni u mišljenju da će crvić ikada doći do drugog kraja tepiha. Ali kako je vrijeme prolazilo sve ih je više bilo ubijeđeno u isti ishod trke. Vrijeme je prolazilo i prolazilo ...

Svaki put kada čikica istegne tepih, dio tepiha koga crvić pređe ostaje isti! Nakon što čikica prvi put istegne tepih crvić je prešao $\frac{1}{100}$ -nu tepiha, nakon drugog istezanja crvić je prešao $\frac{1}{200}$ -nu istegnutog tepiha, nakon treće minute $\frac{1}{300}$ -nu i tako dalje. Dakle, nakon n minuta crvić je prešao put

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 100} = \frac{1}{100} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Izraz $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ predstavlja n -tu parcijalnu sumu S_n poznatog harmonijskog reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Pitanje "Da li će crvić ikada doći do kraja trake?" se svodi na pitanje da li S_n može preći vrijednost 100 za neko $n \in \mathbb{N}$? Ako bi to bilo moguće, tada bi vrijedilo $\frac{1}{100} \cdot S_n \geq 1$, a to bi značilo dolazak crvića na kraj trake! Pa, da li je ovo moguće?

Savremenim računarima možemo provjeriti na primjer da je

$$S_{1000000} \approx 14.392726722.$$

Iako vrijednost ove milionite parcijalne sume obeshrabruje za pozitivan odgovor na postavljeno pitanje, ipak se pokazuje da će za $n = 2 \cdot 10^{43}$ minuta S_n biti veći od 100, a to znači da će crvić ipak doći do kraja tepiha. $2 \cdot 10^{43}$ minuta pretvoreno u godine je 10^{37} , a što je mnogo više od 13 milijardi godina, na koliko se u savremenoj teorijskoj fizici procjenjuje da je star naš svemir.

Zadatak. Da li postoji prirodan broj n veći od 1 takav da je zbir

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

cijeli broj?

Ciljna skupina: svi uzrasti

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.06.2026. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)

Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

Rješenje i rješavatelji nagradnog zadatka iz Evolvente 7 (2) 2024.

Prvo, tačno pristiglo rješenje nagradnog zadatka iz broja **7 (2) 2024.** je dala **Lamija Smajlović**, OŠ "Mushin Rizvić" Fojnica, učenica 7. razreda. Time je ovaj rješavatelj zaslužio predviđenu nagradu uredništva Evolvente.

Tačno rješenje su dali i **Selma Mujačić**, **Mak Simleša**, **Ajdin Karić** i **Lana Žepić**.

Zadatak. *Imamo dvanaest kuglica koje su po svemu identične, osim što je jedna od njih drugačije mase. Pri tome ne znamo da li je lakša ili teža od ostalih jedanaest. Na raspolaganju nam je vaga bez utega. Kako pomoću tri mjerenja odrediti koja je kuglica "lažna" i kakve je mase (da li je lakša ili teža od ostalih)?*

Rješenje:

Primjedba: Primjetimo odma na početku da ako imamo tri kuglice i među njima je lažna, uz podatak da li je lakša ili teža, možemo odrediti lažnu kuglicu pomoću jednog mjerenja. Naime, stavljajući po jednu od tih na tasove vage imamo dvije mogućnosti: 1) Ako je ravnoteža, lažna je preostala kuglica i znamo da je lakša ili teža. 2) Vaga nije u ravnoteži, lažna je na tasu i pronalazimo je iz informaciju da li je lakša ili teža.

Kuglice dijelimo u tri grupe A , B i C , po 4. U prvom mjerenju stavljamo na jedan tas kuglice iz A i na drugi tas kuglice iz B .

1. Kuglice su u ravnoteži. Lažna se nalazi u grupi C . Uzimamo tri kuglice iz grupe C i tri kuglice iz A i izvodimo drugo mjerenje.
 - (a) Kuglice su u ravnoteži. Lažna kuglica je preostala kuglica iz grupe C i ne znamo njenu težinu. U trećem mjerenju ostaje samo utvrditi da li je teža ili lakša. To činimo tako što nju stavimo na jedan tas, a bilo koju "pravu" kuglicu stavimo na drugi tas. Ravnoteža nije moguća, pa ostaje samo utvrditi da li je lažna teža ili lakša.
 - (b) Kuglice nisu u ravnoteži. Lažna je u kuglicama grup C , a u zavisnosti od toga da li su kuglice iz C pretegle ili ne saznajemo da li je lažna teža ili lakša. Koristeći se primjedbom sa početka određujemo koja je lažna i kakva je.
2. Kuglice nisu u ravnoteži. Recimo da su kuglice iz A pretegle kuglice iz B . Kuglice grupe C su "prave". Uzimamo tri kuglice iz grupe A i mjenjamo ih sa tri kuglice grupe C , a tri kuglice grupe B mijenjamo sa uzetih tri kuglice grupe A .
 - (a) Kuglice su u ravnoteži. Dakle, lažna je među tri uzete iz grupe B i znamo da je lakša. Sada ponovo iskoristimo primjebdu sa početka.
 - (b) Kuglice nisu u ravnoteži.
 - i. Neka je pretegao tas na kome se nalaze kuglice grupe C . Kako je i u prethodnom mjerenju taj tas pretegnuo, to znači da je lažna kuglica četvrta kuglica na tom tasu (iz A) i ona je teža ili četvrta kuglica na drugom tasu (iz B) koja je lakša. U posljednjem mjerenju stavljamo jednu "pravu" kuglicu na jedan tas, a na drugi jednu od ovih koje su potencijalno lažne.
 - A. Ako je ravnoteža, ona koju nismo stavili na tas je lažna i znamo koje je težine.
 - B. Ako nije ravnoteža, znamo koja je lažna i koje je težine.
 - ii. Neka je pretegao tas na koga smo prebacili tri kuglice iz grupe A . Ovo znači da je lažna među te tri iz grupe A i znamo da je teža. Pozovimo se opet na polaznu primjebdu.

□