ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

EVOLVENTA

Vol. 1, No. 2, TUZLA 2018.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 1, No. 2 , 2018

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info.
Članovi UM TK imaju besplatan pristup elektronskom časopisu za tu godinu.
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000 Tuzla,
Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu
https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sljedeći sadržaji: konkursni zadaci, rješenja konkursnih zadataka iz prethodnog broja, zabavna matematika, nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Najbolja pristigla učenička rješenja konkursnih zadataka se objavljuju u narednom broju časopisa, kao i spisak svih učenika, rješavatelja zadataka, s brojevima uspješno riješenih zadataka. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.umtk.info. U 2018. godini časopis će biti dostupan bez ograničenja, a od 2019. godine časopis će biti besplatno dostupan čitateljima koji su članovi UM TK (o iznosu članarine detaljnije se može vidjeti na web stranici UM TK).

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruže-nja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegama nastavnicima i asistentima s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, 28. decembra 2018. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 2–10

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Sedam približnih konstrukcija pravilnog sedmougla

Zehra Nurkanović[a], **Robert Onodi**[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *1960.-2012. Tuzla*

Sažetak: Poznato je da geometrijska konstrukcija pravilnog sedmougla nije moguća, pa su od posebnog značaja približne konstrukcije. U ovom radu dato je sedam približnih konstrukcija sedmougla i izračunate su greške napravljene u tim konstrukcijama.

1. Uvod

Kao što je poznato pod geometrijskom konstrukcijom podrazumijevamo konstrukciju izvedenu uz pomoć samo šestara i lenjira bez podioka. Nemogućnost konstrukcije pravilnog sedmougla pomoću šestara i lenjira bez podioka slijedi iz nemogućnosti konstrukcije centralnog ugla $\dfrac{2\pi}{7}$ koji odgovara jednoj stranici pravilnog sedmougla.

Ovaj problem je zaokupljao pažnju matematičara još iz antičkih vremena i dugo nije imao rješenje. Za Thabit ibn Qurru (Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani, 826. Harran, Mezopotamija - danas Turska; 18.02.901. Bagdad), poznatog astronoma i matematičara, veže se i prijevod knjige o konstrukciji pravilnog sedmougla, za koju se pretpostavlja da pripada Arhimedu i koja je bila vjerojatno samo fragment šireg djela. U ovom djelu, koji je prvi zabilježeni sistematski osvrt na ovaj problem, se dokazuje da je moguće izvesti konstrukciju sedmougla ako se na dužoj dijagonali sedmougla znaju presječne tačke sa druge dvije duže dijagonale koje polaze iz tjemena stranice paralelne sa polaznom dijagonalom.

U tom periodu zabilježene su i različite konstrukcije pravilnog sedmougla koje se ne izvode samo upotrebom šestara i lenjira. Između ostalih to su konstrukcije koje se izvode drugim pomagalima ili korištenjem nekih drugih krivih pored kruga.

U literaturi se najčešće pojavljuju jedna ili dvije približne konstrukcije sedmougla. Neke od njih nose nazive po njihovim autorima. U ovom radu je prikazano sedam približnih konstrukcija sedmougla i izračunata pogreška koju činimo pri tim konstrukcijama. Sve konstrukcije izvedene su pomoću programa *GeoGebra 3.2.2.0.* Preciznost približnih konstrukcija ispitivana je pomoću programa Wolfram Mathematica 6.0.0.

2. Dokaz nemogućnosti konstrukcije pravilnog sedmougla

Uvedimo prvo pojam konstruktibilnosti, odnosno kontruktibilnih brojeva (v. [13]).
Svaka geometrijska konstrukcija predstavlja niz koraka od kojih je svaki korak jedan od sljedećih:

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Email adrese: zehra.nurkanovic@untz.ba (Zehra Nurkanović), (Robert Onodi)

1. spajanje dviju tačaka pravom,
2. presječna tačka dviju pravih,
3. kontrukcija kružnice zadanog centra i poluprečnika,
4. presjek dviju kružnica,
5. presjek kružnic i prave.

Uzmimo za početak polje $F_0 = \mathbb{Q}$. Svaka duž dužine $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ može se konstruisati, pa je F_0 brojevno polje (polje zatvoreno u odnosu na geometrijske operacije " $+$ ", " $-$ ", " $\cdot$ " i " $\div$ ").
Neka je sada $k_1 \in \mathbb{Q}$, ali takav da $\sqrt{k_1} \notin \mathbb{Q} = F_0$ i formirajmo polje F_1 (kao proširenje polja F_0):

$$F_1 = F_0\left[\sqrt{k_1}\right] = \{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{k_1} \mid a_1, b_1, k_1 \in F_0,\ \sqrt{k_1} \notin F_0\}.$$

Uzmimo $k_2 \in F_1$, takav da $\sqrt{k_2} \notin F_1$, pa možemo formirati novo polje (proširenje polja F_1):

$$F_2 = F_1\left[\sqrt{k_2}\right] = \left\{a_2 + b_2\sqrt{k_2} \mid a_2, b_2, k_2 \in F_1,\ \sqrt{k_2} \notin F_1\right\}.$$

Općenito, ako imamo brojevno polje F_{n-1}, onda za $k_n \in F_{n-1}$, takav da $\sqrt{k_n} \notin F_{n-1}$, možemo formirati polje F_n, kao proširenje polja F_{n-1}:

$$F_n = F_{n-1}\left[\sqrt{k_n}\right] = \left\{a_n + b_n\sqrt{k_n} \mid a_n, b_n, k_n \in F_{n-1},\ \sqrt{k_n} \notin F_{n-1}\right\},$$

i tako dalje.
Sva ova polja F_k $(k \in \{0, 1, 2, \ldots\})$ su brojevna polja i vrijedi

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \tag{1}$$

te svaku dužinu iz datih polja možemo geometrijski konstruisati. Zaključujemo, konstruktibilan broj je broj koji je element nekog od brojevnih polja iz lanca (1) dobijenih na gore opisan način.

Primjer 2.1. *Pokažimo da je broj* $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ *konstruktibilan.*

Zaista,

$$F_0 = \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin F_0 \Rightarrow F_1 = F_0\left[\sqrt{2}\right],$$

$$2 + \sqrt{2} \in F_1, \text{ ali } \sqrt{2+\sqrt{2}} \notin F_1 \Rightarrow F_2 = F_1\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right],$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \in F_2, \text{ ali } \sqrt{3} \notin F_2 \Rightarrow F_3 = F_2\left[\sqrt{3}\right].$$

Odavde zaključujemo da $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3} \in F_3$, tj. $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ je konstruktibilan broj. ♣

Za dokaz nemogućnosti konstrukcije pravilnog sedmougla šestarom i lenjirom bez podioka neophodan je sljedeći teorem o kubnoj jednadžbi.

Teorem 2.2. *Ako kubna jednadžba sa racionalnim koeficijentima*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{2}$$

nema racionalnih korijena, tada nijedan od njenih korijena nije konstruktibilan, polazeći od racionalnog polja $F_0 = \mathbb{Q}$.

Dokaz : Pretpostavimo suprotno, tj. neka je x konstruktibilan korijen jednadžbe (2). Tada x pripada nekom polju iz (1). Pretpostavimo da je k najmanji broj takav da korijen kubne jednadžbe (2) leži u proširenom polju F_k. Broj k mora biti veći od nule jer se u tvrđenju teorema pretpostavlja da nijedan korijen x ne leži u racionalnom polju F_0. Prema tome, x se može predstaviti u obliku

$$x = p + q\sqrt{w}$$

gdje su p, q i w iz polja F_{k-1}, ali $\sqrt{w} \notin F_{k-1}$. Odatle slijedi da je i

$$y = p - q\sqrt{w}$$

korijen jednadžbe (2). Kako je $q \neq 0$, to je i $x \neq y$.
Općenito, ako su x_1, x_2 i x_3 tri korijena kubne jednadžbe, tada je (prema Vietèovim pravilima)

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a. \tag{3}$$

U našem slučaju, primjenom (3), dobijamo treći korijen jednadžbe (2) kao $u = -a - x - y$. Pošto je $x + y = 2p$, to znači da je

$$u = -a - 2p.$$

Dakle, u je broj iz polja F_{k-1}, što je kontradikcija sa hipotezom da je k najmanji broj za koji F_k sadrži korijen jednadžbe (2). $\square$

Pokažimo sada nemogućnost konstrukcije pravilnog sedmougla. Posmatrajmo jednadžbu $z^7 - 1 = 0$, koju još možemo zapisati i kao

$$z = \sqrt[7]{1}.$$

Njena rješenja su data sa

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 6).$$

Upravo, tačke z_k $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ predstavljene u kompleksnoj ravni leže na jediničnoj kružnici i odgovaraju vrhovima pravilnog sedmougla. Očigledno je jedan korijen ove jednadžbe $z = 1$, pa, dijeleći sa $z - 1$, dobijamo jednadžbu

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \tag{4}$$

odnosno

$$(4) \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \Leftrightarrow (z^3 + \frac{1}{z^3}) + (z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0.$$

Uvodeći smjenu $z + \frac{1}{z} = y$ dobijamo da je $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$ i $z^3 + \frac{1}{z^3} = y^3 - 3y$. Zbog toga je

$$(4) \Leftrightarrow y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1 = 0,$$

odnosno,

$$y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0. \tag{5}$$

Također,

$$y = z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} = (\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}) + (\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}) = 2\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\phi.$$

Očito je da kubna jednadžba (5) ima racionalne koeficijente. Prema teoremu o kubnoj jednadžbi dovoljno je pokazati da nijedno rješenje jednadžbe nije racionalno jer u tom slučaju sva rješenja bi bila nekonstruktibilni brojevi. Stoga, pretpostavimo suprotno, tj. neka je $y = \frac{r}{s}$ $(r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N},\ (r,s) = 1)$ rješenje kubne jednadžbe (5). Zamjenom $y = \frac{r}{s}$ u (5) dobijamo kubnu jednadžbu

$$r^3 + r^2 s - 2rs^2 - s^3 = 0.$$

Odavde onda slijedi da je

$$r^3 = s(s^2 + 2sr - r^2) \Rightarrow s|r^3 \Rightarrow s|r \Rightarrow s = 1,$$

ali i

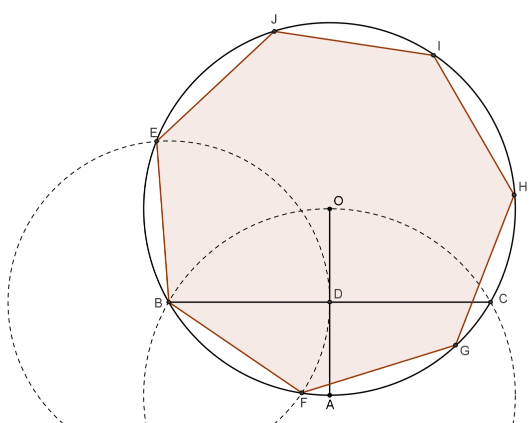
$$s^3 = r(r^2 + rs - 2s^2) \Rightarrow r|s^3 \Rightarrow r|s \Rightarrow r \in \{-1, 1\}.$$

Prema tome, $y \in \{-1, 1\}$. Neposredno se provjerava da $y = -1$ i $y = 1$ nisu rješenja jednadžbe (5). Zaključujemo da broj $y = 2\cos\phi$ nije konstruktibilan pa ni $\cos\phi$ nije konstruktibilan broj.
To znači da nije moguće izvršiti geometrijsku konstrukciju ugla $\phi = \frac{2\pi}{7}$, a samim tim onda i geometrijska konstrukcija pravilnog sedmougla nije moguća.

3. Približne konstrukcije

3.1. Približna konstrukcija br. 1

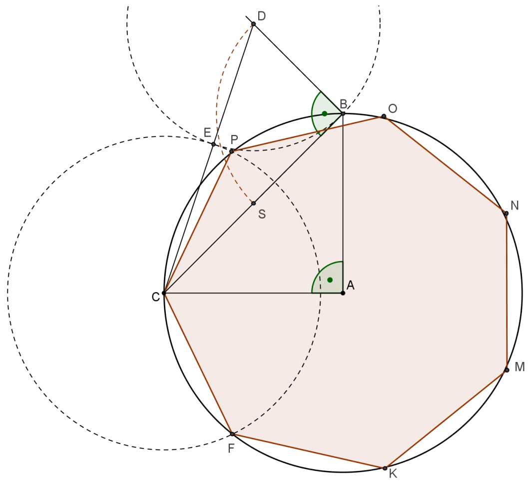
Nacrtajmo kružnicu sa centrom u tački O i poluprečnikom $\overline{OA}$ (vidjeti Sliku 1). U tački A nacrtajmo kružnicu jednakog poluprečnika kao kod polazne kružnice. Ona siječe polaznu kružnicu u tačkama B i C. Duž $\overline{BC}$ siječe poluprečnik $\overline{OA}$ u tački D. Kružnica sa centrom u tački B i poluprečnika $\overline{BD}$ siječe polaznu kružnicu u tačkama E i F. Duži $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ su približne stranice traženog sedmougla.



Slika 1: Konstrukcija sedmougla br. 1

3.2. Približna konstrukcija br. 2

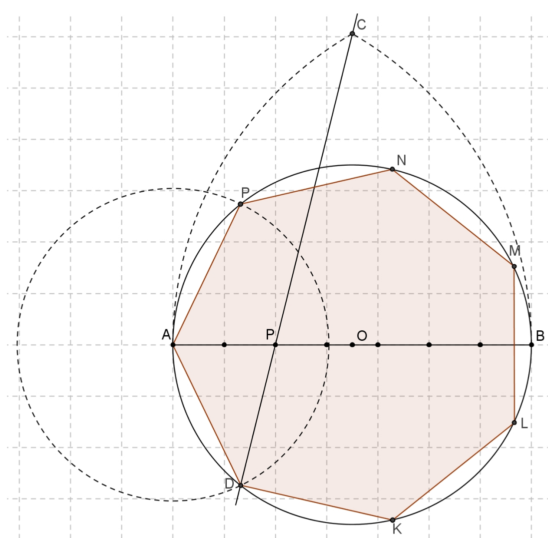
Konstruirajmo kružnicu sa centrom u tački A i dva okomita prečnika $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ (vidjeti Sliku 2). Tačka S je sredina duži $\overline{BC}$. U tački B podižemo okomicu na duž $\overline{BC}$, a tačku D nalazimo tako da je $|BS| = |BD|$. Kružnica sa centrom u tački D i poluprečnika $\overline{BD}$ siječe duž $\overline{CD}$ u tački E. Tačke F i P presjeka kružnice (sa centrom u tački C) poluprečnika $\overline{CE}$ i polazne kružnice su tjemena sedmougla. Duži $\overline{CP}$ i $\overline{CF}$ su približne stranice traženog sedmougla.



Slika 2: Konstrukcija sedmougla br. 2

3.3. Približna konstrukcija br. 3

Prečnik $\overline{AB}$ kružnice sa centrom u tački O podijelimo na sedam jednakih dijelova (vidjeti Sliku 3). Tačku C dobijamo u presjeku dvije kružnice poluprečnika $\overline{AB}$ i centrima u tačkama A i B. Tačka P se nalazi na drugom dijelu podjele prečnika $\overline{AB}$. Prava CP siječe polaznu kružnicu u dvije tačke, a dalju od tačke C obilježimo sa D. Duž $\overline{AD}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.

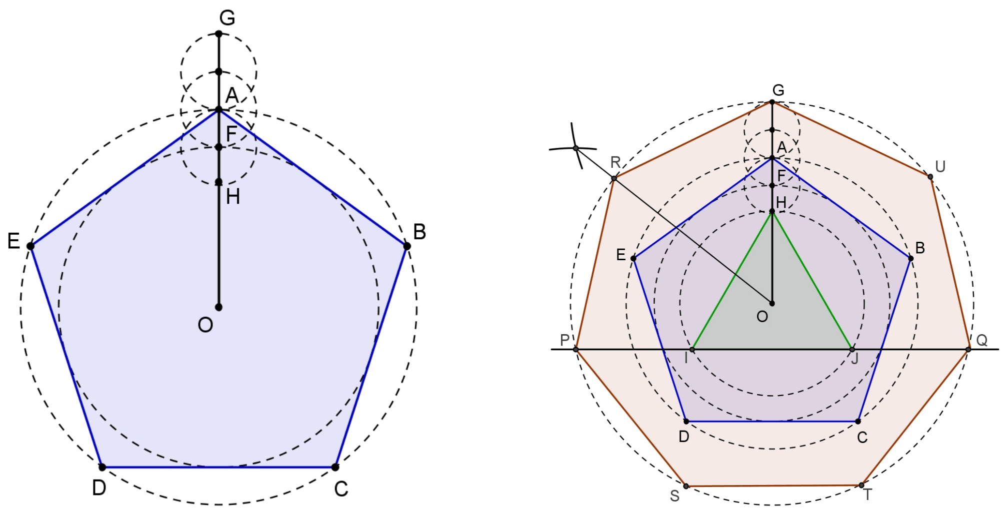


Slika 3: Konstrukcija sedmougla br. 3

3.4. Približna konstrukcija br. 4

Konstrukciju sedmougla br. 4 izvodimo iz konstrukcije petougla (vidjeti Sliku 4).
Neka nam je dat petougao $ABCDE$ i kružnice opisane i upisane u njega. Poluprečnik $\overline{OA}$ siječe kružnicu upisanu u petougao u tački F. Tačke H i G dobijamo tako da je $|AF| = |FH|$ i $|AG| = 2 \cdot |AF|$.

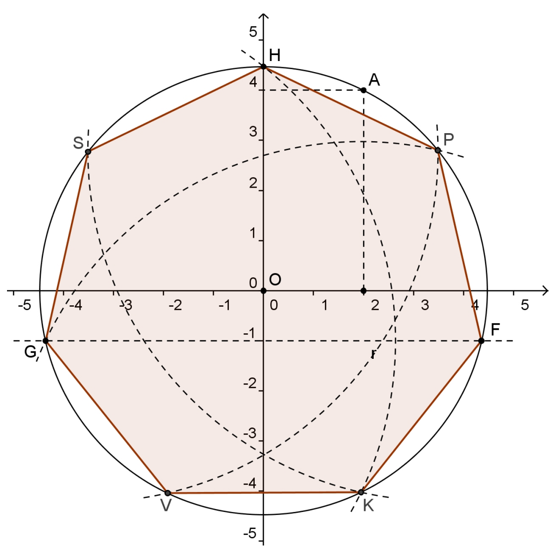
U kružnicu poluprečnika $\overline{OH}$ sa centrom u O upisan je jednakostranični trougao ΔHIJ. Prava IJ siječe kružnicu sa centrom u tački O i poluprečnika $\overline{OG}$ u tačkama P i Q. Tačka R se dobije polovljenjem luka $\widehat{PG}$. Duž $\overline{PR}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.



Slika 4: Konstrukcija sedmougla pomoću petougla

3.5. Približna konstrukcija br. 5

Za ovu jednostavnu konstrukciju nam je potrebna mreža koordinatnog sistema (vidjeti Sliku 5).

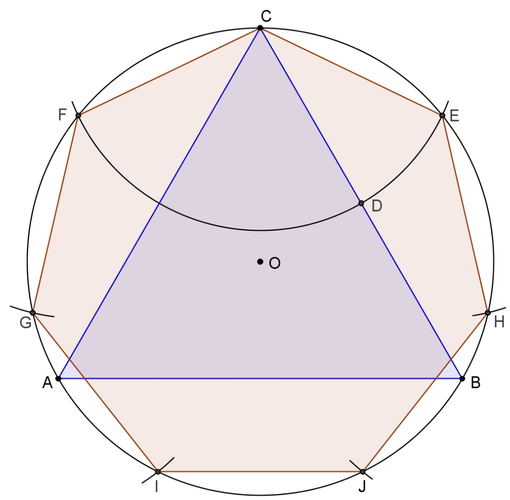


Slika 5: Konstrukcija sedmougla pomoću koordinatne mreže

Nacrtajmo kružnicu sa centrom u koordinatnom početku O tako da prolazi tačkom $A(2,4)$. Tjemena G i F nalazimo u presjeku kružnice i prave $y=-1$. Zajedno sa tačkom H imamo tri tjemena, a ostala četiri je lako konstruisati pomoću odgovarajućih lukova.

3.6. Približna konstrukcija br. 6

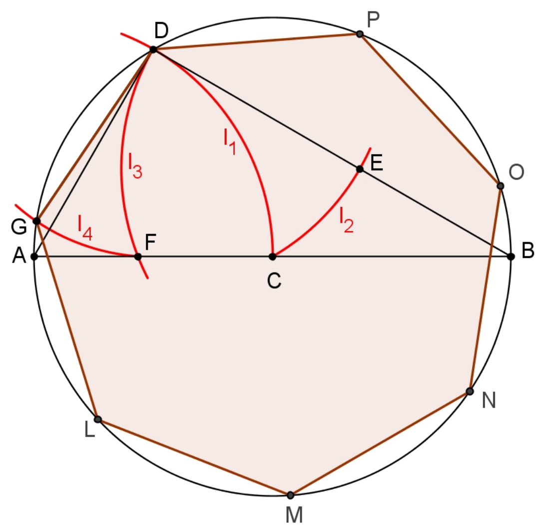
Veoma jednostavnu i elegantnu približnu konstrukciju sedmougla je dao Albrecht Dürer (vidjeti Sliku 6). Oko jednakostraničnog trougla ΔABC opisana je kružnica. Tačka D je sredina stranice $\overline{BC}$. Kružnica sa centrom u tački C i poluprečnika $\overline{CD}$ siječe početnu kružnicu u tačkama E i F. Sa tačkom C to su tri tjemena traženog sedmougla. Vrijednost centralnog ugla ovako konstruisanog sedmougla je približno $51^\circ 19'$, što je dobra aproksimacija za vrijednost centralnog ugla pravilnog sedmougla od $\frac{360^\circ}{7} \approx 51^\circ 26'$.



Slika 6: Konstrukcija sedmougla Albrechta Dürera

3.7. Približna konstrukcija br. 7

Ova elegantna konstrukcija sedmougla izvodi se pomoću četiri luka (vidjeti Sliku 7).



Slika 7: Konstrukcija sedmougla pomoću četiri luka

U tački A kružnice prečnika $\overline{AB}$ sa centrom u C konstruirajmo luk l_1 poluprečnika $\overline{AC}$. U tački D presjeka luka l_1 i početne kružnice konstruiramo drugi luk l_2, istog poluprečnika, koji siječe duž $\overline{BD}$ u tački E. Tačka E je centar trećeg luka l_3 poluprečnika $\overline{ED}$ koji siječe poluprečnik $\overline{AC}$ u tački F. Očigledno je

$$|AC| = |AD| = |DC| = |DE| = |EF| \ .$$

Četvrti luk je sa centrom u tački D i poluprečnika $\overline{DF}$ i siječe polaznu kružnicu u tački G. Duž $\overline{DG}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.
Po konstrukciji je

$$\sphericalangle GCD = \sphericalangle FED = 120^\circ - \arccos(\sin(60^\circ) - \sin(30^\circ)).$$

4. Pogreška u konstrukcijama

Greške koje činimo u gore navedenim približnim konstrukcijama sedmougla date su u Tablici 1. Prikazane su u procentima odstupanja vrijednosti centralnog ugla sedmougla u približnim konstrukcijama od tačne vrijednosti tog ugla kod pravilnog sedmougla.

Konstrukcija	Centralni ugao	Greška
Pravilan sedmougao	51.428571°	0.000%
Konstrukcija 1	51.317812°	0.215%
Konstrukcija 2	51.827292°	0.775%
Konstrukcija 3	51.518222°	0.174%
Konstrukcija 4	51.460483°	0.062%
Konstrukcija 5	51.460500°	0.062%
Konstrukcija 6	51.316667°	$0,218\%$
Konstrukcija 7	51.470701°	0.082%

Tablica 1: Pogreške pri gore navedenim približnim konstrukcijama sedmougla

Literatura

[1] A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics*, Washington, Math. Assoc. Amer., 1964.
[2] L. Bankoff, J. Garfunkel: The Heptagonal Triangle., *Math. Mag. 46*, 1973.
[3] V. Benčić: *Elementarna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
[4] B. Bold: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover, 1982.
[5] J. L. Coolidge: *The mathematics of great amateurs*, Oxford, University Press, 1950.
[6] J. C. Cortés: *Estudio matemático del trazado general de polígonos regulares*, Epsilon 39, 1997.
[7] R. Courant, H. Robbins: *Šta je matematika?*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
[8] R. Courant, H. Robbins: *The Regular Heptagon, An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1996.
[9] Ž. Hanjš: Približne konstrukcije nekih pravilnih mnogokuta, *MFL 1*, 1993/94.
[10] R. Hartshorne: *Geometry Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.
[11] Z. Lučić: *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Sl. glasnik, Beograd, 2009.
[12] G. E. Martin: *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998.
[13] M. Nurkanović: *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike*, 2018. (skripta).
[14] R. Onodi: *Različiti algebarski i geometrijski aspekti konstrukcije pravilnih poligona*, Magistarski rad, PMF Tuzla, 2010.
[15] Đ. Paunović: *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.
[16] J. Stillwell: *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
[17] D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, London, 1991.

Sjećanje na Roberta

Rad, koji ste upravo pročitali, nije slučajno prvi rad u drugom broju časopisa. Na ovaj način smo htjeli da odamo poštovanje i oživimo uspomenu na našeg, rano preminulog, kolegu matematičara Onodi Roberta (1960. – 2012.). Sjećam se, kada sam došao na studij matematike na PMF Sarajevo, da smo sve studente starijih godina studija posmatrali sa poštovanjem i respektom, a kolegu Roberta niste mogli ne primijetiti. Odavao je neku vrstu sigurnosti i smirenosti, visok, ozbiljan, uvijek spreman pomoći i nasavjetovati. Takav je bio kasnije i u životu i u poslu, i kao profesor matematike i kao savjetnik za matematiku u Pedagoškom zavodu Tuzla. Vrijedno i odgovorno radio je na stalnom uzdizanju matematičkih vrijednosti kod drugih, na propagiranju važnosti matematike unutar obrazovnog sistema, organizirao takmičenja iz matematike i uvijek bio dostupan i kolegama i učenicima za priču o matematici.

Sarađivali smo sa Robertom i na Odsjeku matematika PMF u Tuzli, pomagao je, izvodio vježbe na mnogim predmetima, uvijek bio spreman da pomogne razvoju Odsjeka matematika i same matematike na ovoj regiji. Na ovom fakultetu je upisao i postdiplomski studij i uspješno magistrirao, pod mentorstvom uvažene kolegice Zehre Nurkanović. Ovaj rad koji ste imali priliku da pročitate je upravo izvod iz Robertovog magistarskog rada.

Na žalost, opaka bolest je prekinula sve njegove planove.

Dragi Roberte, bilo je veliko zadovoljstvo i privilegija poznavati te i raditi s tobom.

Tvoji matematičari te nisu zaboravili. Počivaj u miru, dobri čovječe.

Prof. dr. Enes Duvnjaković

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 11–19

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Izračunavanje nekih konačnih suma

Nevzeta Karać[a], Alma Šehanović[b]

[a] *Gimnazija "Meša Selimović", Tuzla*
[b] *Gimnazija "Meša Selimović", Tuzla*

Sažetak: U matematici se često, na svim nivoima obrazovanja, ukaže potreba za nalaženje nekih konačnih suma. Želja nam je da u ovom radu pokažemo kako se izračunavaju neke konačne sume, što je ilustrovano nizom zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.

1. Uvod

Često u testovima logičkog tipa i različitim enigmatskim časopisima možemo naći zadatak sličan sljedećem.
Zadatak. *Napisati sljedeći član u nizu brojeva*

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \cdots$$

Rješenje: Problem se svodi na određivanje općeg člana datog niza. Kako je

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 = \frac{2\cdot 1+1}{1},\\
a_2 &= \frac{5}{2} = \frac{2\cdot 2+1}{2},\\
a_3 &= \frac{7}{3} = \frac{2\cdot 3+1}{3},\\
a_4 &= \frac{9}{4} = \frac{2\cdot 4+1}{4},\\
a_5 &= \frac{11}{5} = \frac{2\cdot 5+1}{5},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

opći član niza $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \cdots$ je $a_n = \frac{2n+1}{n}$, pa je $a_6 = \frac{13}{6}$. □

Ovaj postupak možemo uspješno primijeniti na izračunavanje nekih konačnih suma. U nastavku navodimo nekoliko primjera u kojima ćemo koristiti i poznate sume potencija prirodnih brojeva:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručni rad
Email adrese: nevzeta.karac@hotmail.com (Nevzeta Karać), alma.sehanovic@gmail.com (Alma Šehanović)

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \tag{3}$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}, \tag{4}$$

te sumu prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{5}$$

2. Izračunavanje nekih konačnih suma

Primjer 2.1. *Izračunati sumu:* $S = -1 + 2 + 7 + 14 + 23 + \cdots + 1598$.

Rješenje: Posmatrajmo niz $-1, 2, 7, 14, 23, \cdots$. Tada je

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 = 1^2 - 2, \\ a_2 &= 2 = 2^2 - 2, \\ a_3 &= 7 = 3^2 - 2, \\ a_4 &= 14 = 4^2 - 2, \\ a_5 &= 23 = 5^2 - 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opći član niza $-1, 2, 7, 14, 23, \cdots$ je $a_n = n^2 - 2$, pa traženu sumu S možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} S &= -1 + 2 + 7 + 14 + 23 + \cdots + 1598 \\ &= \left(1^2 - 2\right) + \left(2^2 - 2\right) + \left(3^2 - 2\right) + \left(4^2 - 2\right) + \cdots + \left(40^2 - 2\right) \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 40^2 - 40 \cdot 2 \ , \end{aligned}$$

odnosno, koristeći (2)

$$S = \frac{40 \cdot 41 \cdot 81}{6} - 40 \cdot 2 = 22060 \ .$$

□

Primjer 2.2. *Izračunati sumu:* $S = 1 + 12 + 45 + 112 + \cdots + 3312$.

Rješenje: Posmatrajmo niz $1, 12, 45, 112, \cdots$. Primjetimo da je

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 1 \cdot 1^2, \\ a_2 &= 12 = 3 \cdot 2^2, \\ a_3 &= 45 = 5 \cdot 3^2, \\ a_4 &= 112 = 7 \cdot 4^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opći član ovog niza je $a_n = (2n-1)\, n^2 = 2n^3 - n^2$, pa traženu sumu S možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} S &= 1 + 12 + 45 + 112 + \cdots + 3312 \\ &= 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 2 \cdot 4^3 - 4^2 + \cdots + 2 \cdot 12^3 - 12^2 \\ &= 2\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 12^3\right) - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 12^2\right) \ . \end{aligned}$$

Sada, koristeći (2) i (3) dobijamo da je

$$S = 12168 - 650 = 11\,518 \ .$$

□

Primjer 2.3. *Izračunati sumu:* $S = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{33}{8} + \frac{129}{16} + \cdots + \frac{131073}{512}$.

Rješenje: U nizu $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{33}{8}, \frac{129}{16}, \cdots$ je:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2^1+1}{2^1}, \\
a_2 &= \frac{9}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{2^3+1}{2^2}, \\
a_3 &= \frac{33}{8} = \frac{32+1}{8} = \frac{2^5+1}{2^3}, \\
a_4 &= \frac{129}{16} = \frac{128+1}{16} = \frac{2^7+1}{2^4}, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Uočavamo da je opći član ovog niza $a_n = \frac{2^{2n-1}+1}{2^n}$. Koristeći to i (5) sumu S možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{33}{8} + \frac{129}{16} + \cdots + \frac{131073}{512} \\
&= \frac{2+1}{2} + \frac{2^3+1}{2^2} + \frac{2^5+1}{2^3} + \frac{2^7+1}{2^4} + \cdots + \frac{2^{17}+1}{2^9} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2^5}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{2^7}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{2^{17}}{2^9} + \frac{1}{2^9} \\
&= \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^9}\right) \\
&= \frac{1\left(1-2^9\right)}{1-2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^9}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2^9 - 1 + 1 - \frac{1}{2^9} = \frac{2^{18}-1}{2^9} \ .
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.4. *Izračunati sumu:* $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \frac{1}{117} + \frac{1}{221} + \cdots + \frac{1}{4076357}$.

Rješenje: Niz $\frac{1}{5}, \frac{1}{45}, \frac{1}{117}, \frac{1}{221}, \cdots$ možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{1\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 9}, \frac{1}{9\cdot 13}, \frac{1}{13\cdot 17}, \cdots \ .$$

Opći član ovog niza je $a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. Rastavljajući na parcijalne sabirke dobijamo

$$\frac{1}{(4n-3)\,(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4n-3)} - \frac{1}{(4n+1)}\right) \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 5} &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right),\\
\frac{1}{5\cdot 9} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right),\\
\frac{1}{9\cdot 13} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right),\\
\frac{1}{13\cdot 17} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right),\\
&\vdots\\
\frac{1}{2017\cdot 2021} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2021}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, traženu sumu S možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{2017\cdot 2021}\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2021}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2021}\right)=\frac{505}{2021}.
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.5. *Izračunati sumu:* $S=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\frac{9}{400}+\cdots+\frac{21}{12100}$.

Rješenje: Posmatrajmo niz $\frac{3}{4},\frac{5}{36},\frac{7}{144},\frac{9}{400},\cdots$. U njemu je:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3}{4}=\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2},\\
a_2 &= \frac{5}{36}=\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2},\\
a_3 &= \frac{7}{144}=\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2},\\
a_4 &= \frac{9}{400}=\frac{2\cdot 4+1}{4^2\cdot 5^2},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uočavamo da je opći član datog niza $a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Rastavljajući na parcijalne sabirke imamo

$$\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2},$$

pa je tražena suma

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\frac{9}{400}+\cdots+\frac{21}{12100}\\
&= \frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}+\frac{2\cdot 4+1}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2\cdot 10+1}{10^2\cdot 11^2}\\
&= \frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}\\
&= 1-\frac{1}{121}=\frac{120}{121}.
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.6. *Izračunati sumu:* $S = \frac{1}{3\sqrt{1}+1\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{81\sqrt{79}+79\sqrt{81}}$.

Rješenje: Prvo primijetimo da je

$$S = \sum_{n=1}^{40} a_n \ ,$$

za $a_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}$. Racionalisanjem dobijamo da je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}}{\left[(2n+1)\sqrt{2n-1}\right]^2-\left[(2n-1)\sqrt{2n+1}\right]^2} = \frac{(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}}{(2n+1)^2(2n-1)-(2n-1)^2(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}}{2(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{2n-1}-\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+1}\right) ,
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{3\sqrt{1}+1\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{81\sqrt{79}+79\sqrt{81}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{7}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{79}}{79}-\frac{\sqrt{81}}{81}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9} .
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.7. *Izračunati sumu:* $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$.

Rješenje: 1
Ako je $x = 1$, suma je

$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Neka je $x \neq 1$. Sumu S_n možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right)+\left(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n\right) \\
&= (1+x+\cdots+x^n)+\left(x+x^2+\cdots+x^n\right)+\left(x^2+2x^3+\cdots+(n-1)x^n\right) \\
&= (1+x+\cdots+x^n)+\left(x+x^2+\cdots+x^n\right)+ \\
&\quad \left(x^2+x^3+\cdots+x^n\right)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^n\right)+x^n .
\end{aligned}$$

Sada, koristeći (5) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1\left(x^{n+1}-1\right)}{x-1}+\frac{x\left(x^n-1\right)}{x-1}+\frac{x^2\left(x^{n-1}-1\right)}{x-1}+\cdots+\frac{x^{n-1}\left(x^2-1\right)}{x-1}+\frac{x^n(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1}-x+x^{n+1}-x^2+\cdots+x^{n+1}-x^{n-1}+x^{n+1}-x^n}{x-1} \\
&= \frac{(n+1)x^{n+1}-\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n\right)}{x-1} = \frac{(n+1)x^{n+1}-\frac{\left(x^{n+1}-1\right)}{x-1}}{x-1} ,
\end{aligned}$$

odnosno

$$S_n = \frac{(nx - n + x - 2)\,x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}\ .$$

Rješenje: 2

Tražena suma S_n je izvod sume

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^{n+1} \overset{(5)}{=} \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}\ .$$

Derivacijom dobijamo

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}\right)'\ ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)\,x^n \\ &= \frac{(n+2)\,x^{n+1}\,(x-1) - x^{n+2} + 1}{(x-1)^2} = \frac{(nx - n + x - 2)\,x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}\ . \end{aligned}$$

□

Primjer 2.8. *Izračunati sumu:* $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n+1)\,x^n$.

Rješenje: 1

Ako je $x = 1$, onda je

$$S_n = (n+1)^2\ .$$

Neka je $x \neq 1$. Množenjem tražene sume S_n sa x ($x \neq 0$) i koristeći (5) dobijamo da je

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n - (2n+1)\,x^{n+1} \\ &= 1 - (2n+1)\,x^{n+1} + 2x\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) \\ &= 1 - (2n+1)\,x^{n+1} + 2x\frac{1 - x^n}{1 - x}\ . \end{aligned}$$

Dakle,

$$(1-x)\,S_n = 1 - (2n+1)\,x^{n+1} + 2x\frac{1 - x^n}{1 - x}\ ,$$

pa je

$$S_n = \frac{1 + x - (2n+3)\,x^{n+1} + (2n+1)\,x^{n+2}}{(1-x)^2}\ .$$

Rješenje: 2

Sumu S_n možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n+1)\,x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 2x + 4x^2 + 6x^3 + \cdots + 2nx^n \\ &= \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n}_{S_1} + 2x\underbrace{\left(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}\right)}_{S_2}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$S_1 \overset{(5)}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{i} \quad S_2 = (S_1)' \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + 2x\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + 2x\frac{(n+1)\,x^n\,(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1+x-(2n+3)\,x^{n+1}+(2n+1)\,x^{n+2}}{(1-x)^2} \ . \end{aligned}$$

□

Primjer 2.9. *Izračunati sumu:* $S_n = x + x^2\,(1+x) + x^3\left(1+x+x^2\right) + \cdots + x^n\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)$.

Rješenje: Neka je $x \neq 1$. Koristeći (5) traženu sumu S_n možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} S_n &= x\cdot\frac{x-1}{x-1} + x^2\cdot\frac{x^2-1}{x-1} + x^3\cdot\frac{x^3-1}{x-1} + \cdots + x^n\cdot\frac{x^n-1}{x-1} \\ &= \frac{x}{x-1}\left[x-1+x\left(x^2-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\cdots+x^{n-1}\left(x^n-1\right)\right] \\ &= \frac{x}{x-1}\left[\left(x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}\right)-\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)\right] \\ &= \frac{x}{x-1}\left(\frac{x^{2n+1}-x}{x^2-1}-\frac{x^n-1}{x-1}\right) = \frac{x^{n+1}\left(x^{n+1}-x-1\right)+x}{(x-1)^2\,(x+1)} \ . \end{aligned}$$

□

Primjer 2.10.

a) *Izračunati sumu* $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$;

b) *Odrediti* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Rješenje: a) Posmatrajmo razliku

$$\begin{aligned} S_n - 2S_n &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}-1-\frac{3}{2}-\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}-\cdots-\frac{2n-1}{2^{n-1}} \\ &= -1-\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}-\cdots-\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n} \\ &= -1-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)+\frac{2n-1}{2^n} = -3+\frac{2n+3}{2^n} \ . \end{aligned}$$

Dakle, $S_n = 3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

b) Sada je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right) = 3 \ .$$

□

Primjer 2.11. *Izračunati:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)$.

Rješenje: Neka je

$$S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} \ .$$

Tada je

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \ .$$

Koristeći (5) dobijamo da je

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ . \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{1}{2}S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}\right) = 4 \ .$$

□

Primjer 2.12. *Izračunati sumu:* $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica}$.

Rješenje: Broj $\underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica}$ možemo napisati u obliku

$$\underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} = \frac{\overbrace{999\ldots9}^{ndevetki}}{9} = \frac{10^n - 1}{9} \ ,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9} = \frac{1}{9}\left(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n\right) - \frac{n}{9} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10\left(10^n - 1\right)}{81} - \frac{n}{9} \ . \end{aligned}$$

□

Primjer 2.13. *Brojevi* $49, 4489, 4444889, \cdots$ *se dobiju tako što se "u sredini" svakog prethodnog broja ubaci broj* 48. *Dokazati da su svi takvi brojevi potpuni kvadrati prirodnog broja.*

Rješenje: Broj $444\ldots888\ldots9$ možemo napisati u obliku

$$4 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n-1\ jedinica} \cdot 9 = 4 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} + 1 \ .$$

Kako je $\underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} = \frac{10^n - 1}{9}$, imamo

$$\begin{aligned} &4 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ jedinica} + 1 = 4 \cdot \frac{10^n-1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 1 \\ = \ &\frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2 \ . \end{aligned}$$

□

3. Zadaci za vježbu

Izračunati sume:

1. $S = 2 + 9 + 28 + 65 + 126 + \cdots + 8001$.
2. $S = 4 + 18 + 48 + 100 + \cdots + 8820$.
3. $S = \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{88} + \frac{1}{154} + \cdots + \frac{1}{8188}$.
4. $S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{225\sqrt{224} + 224\sqrt{225}}$.
5. $S_n = \frac{5}{2} + 5 + \frac{19}{2} + 18 + \cdots + \frac{n + 2^{n+1}}{2}$.
6. $S_n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^3 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^n, x \neq \pm 1, n \in N$.
7. Neka je $\overline{aaa\ldots a}$ broj čije su sve cifre a, gdje je $a \neq 0$. Izračunati

$$S = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{n} .$$

Zahvalnost

Zahvaljujemo se profesoru Mehmedu Nurkanoviću za motivaciju i sugestije kojima je pomogao uobličenje ovog rada.

Literatura

[1] B. Dakić: *Zbirka zadataka za četvrti razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1997.
[2] A. Huskić: *Zbirka zadataka iz matematike za četvrti razred srednjih škola*, Svjetlost, Sarajevo, 2005.
[3] S. Mintaković: *Zbirka zadataka iz algebre*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1970.
[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika*, PrintCom, Tuzla, 2009.
[5] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 20–26

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva

Ajla Nurkanović[a], Alija Muminagić[b]

[a] *Studentica IV godine, Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *Penzioner, Danska*

Sažetak: Fibonaccievi brojevi posjeduju mnoštvo zanimljivih osobina. Jedna od njih je da se Fibonaccievi brojevi pojavljuju kao koeficijenati u rezultatu i ostatku pri dijeljenju polinoma x^n sa $x^2 - x - 1$. U radu ćemo također uvesti i osnovne pojmove diferentnog računa kako bismo, pored elementarnih metoda, neke od osobina Fibonaccievih brojeva pokazali i metodima diferentnog računa.

1. Uvod

Fibonaccievim brojevima nazivamo članove Fibonaccievog niza koji je definiran kao rješenje linearne diferentne jednadžbe drugog reda

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, F_1 = 1,\ n = 0, 1, 2 \dots\ . \tag{1}$$

Dakle, članovi tog niza, odnosno prvi Fibonaccievi brojevi, su

$$\{F_k\}_{k=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots\}\,. \tag{2}$$

Rješavanjem diferentne jednadžbe (1) može se doći do eksplicitne formule za opći član Fibonaccievog niza. Naime, iz odgovarajuće karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0\ ,$$

čiji su korijeni $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, slijedi da je opće rješenje jednadžbe (1) dato sa

$$F_n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2 \dots\ .$$

Koristeći početne vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ dobijamo

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,$$

zbog čega je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots\ , \tag{3}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Email adrese: ajlanurkanovic17@gmail.com (Ajla Nurkanović), (Alija Muminagić)

odnosno

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n = 0, 1, 2 \ldots ,$$

gdje je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Interesantno je uočiti da vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha\ ,\end{aligned}$$

kao i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\beta. \tag{4}$$

Primijetimo da je broj $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ poznat pod nazivom *zlatni presjek*.
Upoznajmo se i sa nekim osobinama diferentnog računa koji će nam koristiti u kasnijim dokazima (v. [3] i [4]).

Definicija 1.1. *Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne promjenljive t.* ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definiramo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)\ . \tag{5}$$

Ako je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, kao npr. skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, tada umjesto promjenljive t koristimo oznaku n, a umjesto izraza $x(n)$ pišemo x_n, pa jednakost (5) ima oblik

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n\ .$$

Primjer 1.2. *Neka je a konstanta. Tada vrijedi:*
1° $\Delta a = a - a = 0$,
2° $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)\,a^t$,
3° $\Delta \log at = \log a\,(t+1) - \log at = \log\left(1+\frac{1}{t}\right)$.

Definicija 1.3. *Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva* ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ (ili $\sum x$), to jest*

$$\text{ako je } \Delta X(t) = x(t)\,, \text{ tada je } \Delta^{-1}x(t) = X(t)\,.$$

Općenito definiramo Δ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ sa:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-n+1}x(t)\right)\ .$$

Primjer 1.4. *Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ funkcija za koju je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi:*

$$\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t)\,,\ (a \neq 1)\ .$$

Lema 1.5. *Za Fibonaccieve brojeve F_k, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\triangle^{-1} F_k = F_{k+1}. \tag{6}$$

Dokaz : Zaista, koristeći (3), osobine diferentnog operatora i Primjer 1.4, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\triangle^{-1} F_k &= \triangle^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) = F_{k+1}\ .
\end{aligned}$$

□

Sljedeći rezultat je poznat kao *fundamentalni teorem za izračunavanje određenih (konačnih) suma*, koji je analogan fundamentalnom teoremu integralnog računa (za izračunavanje određenih integrala).

Teorem 1.6. *Ako je y_n antidiferencija (neodređena suma) niza x_n i $n \geq m+1$, tada vrijedi*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k = [y_k]_m^n = y_n - y_m\ .$$

Slično metodu parcijalne integracije u integralnom računu imamo metod parcijalnog sumiranja konačnih suma iskazan sljedećim teoremom.

Teorem 1.7. *Ako je $m < n$, tada je*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k \Delta y_k = [x_k y_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta x_k)\, y_{k+1}\ . \tag{7}$$

2. Neke osobine Fibonaccievih brojeva i primjena na računanje suma

Jedna vrlo zanimljiva osobina Fibonaccievih brojeva može se dobiti dijeljenjem polinoma, kao u sljedećem slučaju. Naime, nije teško provjeriti da je

$$x^7 = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\mathbf{1}\cdot x^5 + \mathbf{1}\cdot x^4 + \mathbf{2}\cdot x^3 + \mathbf{3}\cdot x^2 + \mathbf{5}\cdot x + \mathbf{8}\right) + \mathbf{13}\cdot x + \mathbf{8}\ . \tag{8}$$

Uočavamo da su koeficijenti (podebljano) na desnoj strani jednakosti (8) brojevi **1**, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13** i **8** a oni pripadaju skupu (2), tj. to su Fibonaccievi brojevi: F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7 i F_6.
Pokažimo sada da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi generalizacija formule (8).

Lema 2.1. *Vrijedi*

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(F_1 x^{n-2} + F_2 x^{n-3} + \cdots + F_{n-2} x + F_{n-1}\right) + F_n x + F_{n-1}\ , \tag{9}$$

gdje su F_n $(n \in \mathbb{N})$ Fibonaccievi brojevi.

Dokaz : Zaista, nakon množenja desna strana formule (9) postaje

$$\begin{aligned}F_1x^n + F_2x^{n-1} + F_3x^{n-2} + \cdots + F_{n-2}x^3 + F_{n-1}x^2\\ - F_1x^{n-1} - F_2x^{n-2} - \cdots - F_{n-3}x^3 - F_{n-2}x^2 - F_{n-1}x\\ - F_1x^{n-2} - \cdots - F_{n-3}x^3 - F_{n-3}x^2 - F_{n-2}x + F_nx\ ,\end{aligned}$$

odnosno
$F_1x^n + (F_2 - F_1)\,x^{n-1} + (F_3 - F_2 - F_1)\,x^{n-2} + \cdots + (F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})\,x^2 + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\,x.$
Koristeći relacije (1) dobijamo da je desna strana u (9) jednaka x^n. □
Uočimo da dijeljkenje polinoma x^n sa x^2-x-1 nije slučajno jer se polinom x^2-x-1 javlja u karakterističnoj jednadžbi diferentne jednadžbe (1).
Sljedeća osobina za Fibonaccieve brojeve je dobro poznata, ali ćemo za njen dokaz ovdje koristiti nestandardan metod, to jest jednakost (9).

Lema 2.2. *Za zbir prvih n Fibonaccievih brojeva $F_1, F_2, \ldots F_n$ vrijedi sljedeće:*

$$S_n = F_{n+2} - 1\ . \tag{10}$$

Dokaz : Ako u (9) umjesto x stavimo 1, dobijamo

$$1^n = \left(1^2 - 1 - 1\right)(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1}) + F_n + F_{n-1}\ ,$$

odnosno

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} - 1\ .$$

Sada, koristeći (1), dobijamo da je

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} = F_{n+1} - 1\ .$$

Ako sada dodamo F_n na obje strane, imamo

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = F_{n+1} + F_n - 1$$

i ponovo, koristeći (1), dobijamo da je

$$S_n = F_{n+2} - 1\ .$$

□
Sljedeća osobina može jednostavno se dokazati matematičkom indukcijom (što ostavljamo čitaocu za vježbu). Međutim, pokazat ćemo da se dokaz može izvesti i na dva nova načina: primjenom jednakosti (6), te primjenom diferentnog računa (metodom parcijalnog sumiranja).

Teorem 2.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi formula*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2\ . \tag{11}$$

Dokaz : Dokažimo formulu (11) na dva načina.

I način: Koristeći (10) dobijamo da je

$$\begin{aligned}T_n &= 1\cdot F_1 + 2\cdot F_2 + \cdots + n\cdot F_n\\ &= (F_1+F_2+\cdots+F_n) + (F_2+\cdots+F_n) + \cdots + (F_{n-1}+F_n)\\ &= S_n + (S_n - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1})\\ &= nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = nS_n - \sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+2}-1)\\ &= nS_n - (F_3+F_4+\cdots+F_{n+1}-(n-1))\\ &= nS_n - (S_{n+1}-(F_1+F_2)-(n-1))\\ &= nS_n - (S_{n+1}-2-(n-1))\\ &= nS_n - S_{n+1} + n + 1 = n(F_{n+2}-1) - (F_{n+3}-1) + n + 1\\ &= nF_{n+2} - F_{n+3} + 2\ .\end{aligned}$$

II način: Primjenom Teorema 1.7 dobijamo da je

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n} kF_k = \left| \begin{array}{lll} k = x_k & \Rightarrow & \triangle x_k = 1\\ F_k = \triangle y_k & \Rightarrow & y_k = \triangle^{-1}F_k \end{array}\right|\\ &= \left[k\,\triangle^{-1}F_k\right]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\triangle^{-1}F_{k+1}\ .\end{aligned}$$

Sada, koristeći (6), imamo da je

$$\begin{aligned}T_n &= [kF_{k+1}]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} F_{k+2} = (n+1)F_{n+2} - F_2 - (F_3+F_4+\cdots+F_{n+2})\\ &= (n+1)F_{n+2} - F_2 - (S_{n+1}+F_{n+2}-F_1-F_2) = nF_{n+2} - S_{n+1} + F_1\ .\end{aligned}$$

Kako je

$$F_1 = 1 \quad \text{i} \quad S_{n+1} = F_{n+3} - 1\ ,$$

to je

$$T_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2\ .$$

□

Sljedeći primjer nam ilustrira još neke vrlo zanimljive osobine Fibonaccievih brojeva.

Primjer 2.4. *Ako je sa F_n dat $n-$ti Fibonacciev broj, pokazati da tada vrijedi sljedeća jednakost*

$$\frac{(-1)^n}{F_{2n}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\ . \tag{12}$$

a) Izračunati sumu $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{2^k}}$ i provjeriti tačnost te formule za $n = 2, 3, 4$.

b) Izračunati sumu reda $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^k}}$.

Rješenje: Kako je F_n dato sa (3), to je

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n-1}}{F_n}-\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}-\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)}\\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}\\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}\\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(-\sqrt{5}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}\left(-\sqrt{5}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}\\
&= \frac{(-1)^{n}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)} = \frac{(-1)^{n}}{F_{2n}}\ ,
\end{aligned}$$

odnosno vrijedi (12).

a) Izračunajmo sada sumu $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{2^k}}$. U tu svrhu koristit ćemo jednakost (12) za $n=2^{k-1}$:

$$\frac{(-1)^{2^{k-1}}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}=\frac{F_{2^{k-1}-1}}{F_{2^{k-1}}}-\frac{F_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}\ ,$$

odnosno, kako je n paran broj, dobijamo

$$\frac{1}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}=\frac{F_{2^{k-1}-1}}{F_{2^{k-1}}}-\frac{F_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}\ .$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_{2^0}}+\frac{1}{F_{2^1}}+\frac{1}{F_{2^2}}+\frac{1}{F_{2^3}}+\frac{1}{F_{2^4}}+\cdots+\frac{1}{F_{2^{n-2}}}+\frac{1}{F_{2^{n-1}}}+\frac{1}{F_{2^n}}\\
&= \frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_{2\cdot 2}}+\frac{1}{F_{2\cdot 4}}+\frac{1}{F_{2\cdot 8}}+\cdots+\frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-3}}}+\frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-2}}}+\frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\ ,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\left(\frac{F_1}{F_2}-\frac{F_3}{F_4}\right)+\left(\frac{F_3}{F_4}-\frac{F_7}{F_8}\right)+\left(\frac{F_7}{F_8}-\frac{F_{15}}{F_{16}}\right)+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{F_{2^{n-3}-1}}{F_{2^{n-3}}}-\frac{F_{2\cdot 2^{n-3}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-3}}}\right)+\left(\frac{F_{2^{n-2}-1}}{F_{2^{n-2}}}-\frac{F_{2\cdot 2^{n-2}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-2}}}\right)+\left(\frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}}-\frac{F_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\right)\\
&= \frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{F_1}{F_2}-\frac{F_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\ .
\end{aligned}$$

Kako je $F_1=F_2=1$, to je

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{2^k}}=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\ . \tag{13}$$

Uvjerimo se u tačnost formule (13) za $n = 2, 3, 4$. Koristit ćemo članove Fibonaccievog niza date u (2).
Za $n = 2$ imamo

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \,,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^2-1}}{F_{2^2}} = 3 - \frac{F_3}{F_4} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \,.$$

Za $n = 3$ imamo

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{50}{21} \,,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^3-1}}{F_{2^3}} = 3 - \frac{F_7}{F_8} = 3 - \frac{13}{21} = \frac{50}{21} \,.$$

Za $n = 4$ imamo

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} + \frac{1}{F_{16}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} = \frac{2351}{987} \,,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^4-1}}{F_{2^4}} = 3 - \frac{F_{15}}{F_{16}} = 3 - \frac{610}{987} = \frac{2351}{987} \,.$$

Dakle, formula (13) je tačna za $n = 2, 3, 4$.

b) Izračunajmo sada red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$. Koristeći (13) i (4) dobijamo sljedeće

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} \overset{(13)}{=} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \overset{(4)}{=} 3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \approx 2.3820 \,.$$

□

Literatura

[1] J. Carstensen: *Blandet om Fibonacci-og Lucastal*, Matematik Magasinet, 68/2013.
[2] T. Koshy: *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays*, Mathematical Spectrum, Vol. 42, Number 3, 2009.-2010.
[3] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci s primjenom*, PrintCom, Tuzla, 2016.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 27–32

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Kosinusni teorem i primjena

Alija Muminagić[a], Jens Carstensen[b]

[a] *Danska*
[b] *Danska*

Sažetak: Sinusni teorem i kosinusni teorem imaju vrlo značajnu ulogu u geometriji te im se u nastavi matematike posvećuje posebna pažnja. U ovom radu je dat jedan manje poznat dokaz kosinusnog teorema, kao i njegovo geometrijsko značenje.

1. Kosinusni teorem s manje poznatim dokazom

Teorem 1.1. *Kvadrat dužine jedne stranice trougla jednak je razlici zbira kvadrata dužina drugih dviju stranica trougla i dvostrukog proizvoda dužina tih dviju stranica s kosinusom ugla između njih, to jest*

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma\ . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dokaz : Teorem se može dokazati na više načina, a mi ovdje dajemo jedan manje poznat dokaz.

a) Dokažimo prvo da vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$ u *oštrouglom* trouglu $\triangle ABC$. Ostale dvije jednakosti se slično dokazuju. U tu svrhu neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Ako su D, E i F dodirne tačke datog trougla i njemu upisane kružnice $k(I, r)$ sa centrom u I i poluprečnika r, tada je $|ID| = |IE| = |IF| = r$. Neka je $|CD| = x$. Na osnovu teorema o jednakosti tangentnih dužina slijedi da je $|CE| = |CD| = x$.

Sa Slike 1 vidimo da je

$$|AE| = |AF| = b - x, |BF| = |BD| = a - x\ ,$$

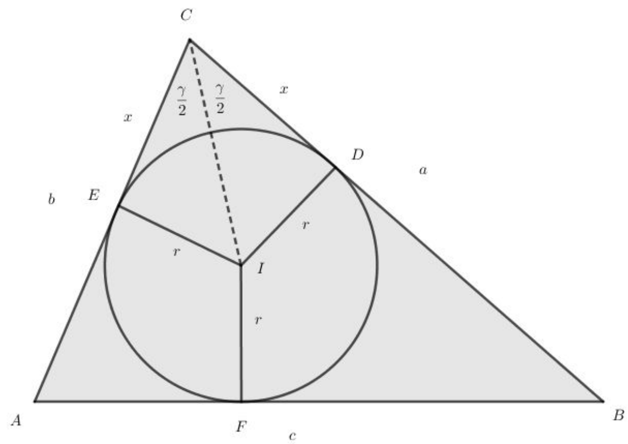
pa je

$$c = |AB| = |AF| + |FB| = b - x + a - x\ ,$$

odnosno

$$x = \frac{a + b - c}{2}\ . \tag{2}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: *Stručni rad*
Email adrese: (Alija Muminagić), (Jens Carstensen)



Slika 1:

Kako je trougao $\triangle IDC$ pravougli, to je $tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{x}$, te je

$$x = \frac{r}{tg\frac{\gamma}{2}} \ . \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobijamo da vrijedi jednakost

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{r}{tg\frac{\gamma}{2}} \ ,$$

te imamo da je

$$r = \frac{(a+b-c)}{2} tg\frac{\gamma}{2} \ . \tag{4}$$

Znamo da je površina trougla $\triangle ABC$ data sa $P_{ABC} = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma$ i $P_{ABC} = r \cdot s = r \cdot \dfrac{a+b+c}{2}$, iz čega slijedi da je $\dfrac{1}{2} ab \sin\gamma = r \cdot \dfrac{a+b+c}{2}$. Odavde je

$$r = \frac{ab\sin\gamma}{a+b+c} = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c} \ . \tag{5}$$

Konačno, eliminacijom r iz (4) i (5), dobijamo

$$\frac{(a+b-c)}{2} tg\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c} \ ,$$

odnosno

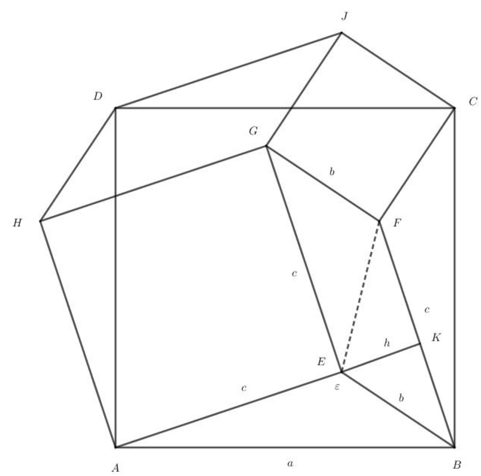
$$(a+b-c)(a+b+c) = 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2} \ .$$

Koristeći da je $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1+\cos\gamma}{2}$, posljednja jednakost se može zapisati kao

$$(a+b)^2 - c^2 = 2ab + 2ab\cos\gamma \ ,$$

to jest $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, što je i trebalo dokazati.

b) Neka je sada trougao $\triangle ABE$ *tupougli*, to jest neka je u tom trouglu ugao $\varepsilon = \measuredangle AEB$ veći od 90°. Prikažimo geometrijski dokaz. Uvedimo oznake kao na Slici 2, to jest $a = |AB|$, $b = |BE|$, $c = |AE|$ i sa P_{XYZ} označimo površinu trougla $\triangle XYZ$, a sa P_{PQRS} površinu četverougla $PQRS$. Nad stranicom AB konstruišimo kvadrat $ABCD$, a nad stranicama BC, CD i AD trouglove $\triangle BCF$, $\triangle CDJ$ i $\triangle ADH$ podudarne s trouglom $\triangle ABE$ (vidjeti Sliku 2). Tako je $P_{AEB} = P_{DJC}$ i $P_{BCF} = P_{ADH}$. Zato su površine četverougla $ABCD$ i mnogougla $AEBFCJDH$ jednake, to jest $a^2 = c^2 + b^2 + 2P_{BEGF}$.



Slika 2:

Kako je

$$P_{BEGF} = 2P_{BFE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = ch \ ,$$

to je

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2ch = c^2 + b^2 + 2cb\cos\left(180° - \varepsilon\right) \ ,$$

odnosno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varepsilon$. Druge dvije jednakosti dokazuju se analogno.

c) U slučaju kada je trougao $\triangle ABC$ *pravougli,* Teorem 1.1 se svodi na Pitagorin teorem. □

2. Kosinusni teorem - geometrijsko značenje

Po Teoremu 1.1 imamo da u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi jednakost

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ , \tag{6}$$

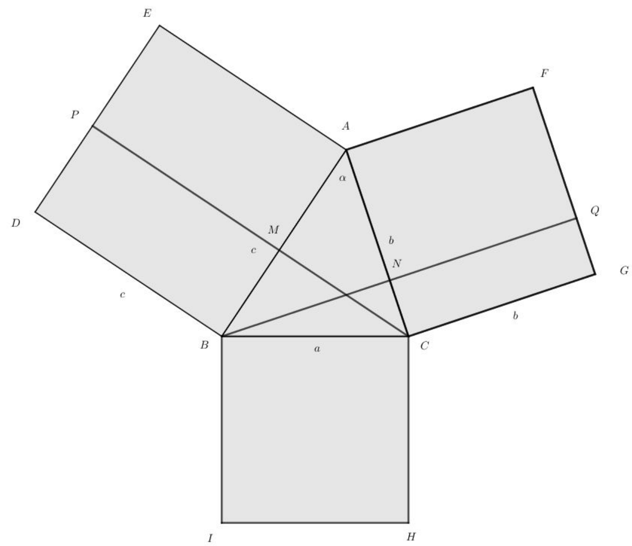
odnosno

$$a^2 = b\left(b - c\cos\alpha\right) + c\left(c - b\cos\alpha\right) \ . \tag{7}$$

Pogledajmo šta formula (7) geometrijski predstavlja.

2.1. Trougao $\triangle ABC$ je oštrougli

Nad stranicama datog oštrouglog trougla $\triangle ABC$ konstruišimo, redom, kvadrate $ABDE$, $ACGF$ i $BCHI$ (vidjeti Sliku 3). Neka visina povučena iz vrha B datog trougla siječe produžene stranice kvadrata $ACGF$ u tačkama N i Q, a visina povučena iz vrha C siječe produžene stranice kvadrata $ABDE$ u tačkama M i P. Izračunajmo sada koliko je $P_{CNQG} + P_{BMPD}$.



Slika 3:

Znamo da je

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = |CG| \cdot |CN| + |BD| \cdot |BM| = b \cdot |CN| + c \cdot |BM| \ ,$$

odnosno

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b\,(b - |AN|) + c\,(c - |AM|) \ .$$

U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je $\cos\alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b}$, odnosno $|AM| = b\cos\alpha$. Slično imamo da u pravouglom trouglu $\triangle ANC$ je $\cos\alpha = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AN|}{c}$, odnosno $|AN| = c\cos\alpha$. Dakle,

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b\,(b - c\cos\alpha) + c\,(c - b\cos\alpha) \ . \tag{8}$$

Sada, iz (6),(7) i (8) dobijamo geometrijsko značenje kosinusnog teorema (Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} i P_{BMPD} (vidjeti Sliku 3).

2.2. Trougao $\triangle ABC$ je tupougli

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha > 90^\circ$ (vidjeti Sliku 4). Visine datog trougla iz vrhova B i C sijeku prave AC i AB u tačkama N i M. Na taj način dobijamo opet pravougaonike $CNQG$ i $BMPD$ koji sadrže kvadrate $ACGF$ i $BAED$, tj. kvadrate sa dužinama stranica $|AC| = b$ i $|AB| = c$. U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je

$$\cos\measuredangle MAC = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b} \ ,$$

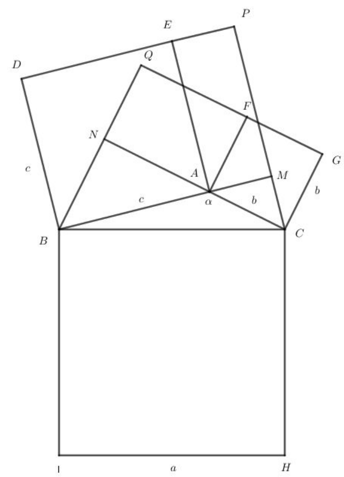
to jest $|AM| = -b\cos\alpha$.

Sada je

$$|BM| = |AB| + |AM| = c - b\cos\alpha \ ,$$

kao i u slučaju kada je $\triangle ABC$ oštrougli. Jedina razlika je što je sada $|BM| > c$. Dakle, vrijedi da je

$$P_{BMPD} = |BD| \cdot |BM| = c\,(c - b\cos\alpha) \ .$$



Slika 4:

Slično se pokaže da je i

$$P_{CNQG} = |CG| \cdot |CN| = b\,(b - c\cos\alpha)\ .$$

Dakle, i u ovom slučaju dobijamo isto geometrijsko značenje kosinusnog teorema(Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} *i* P_{BMPD} *(vidjeti Sliku 4).*

2.3. Trougao $\triangle ABC$ *je pravougli*

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha = 90^\circ$. Tada se pravougaonici $CNQG$ i $BMPD$ poklapaju sa kvadratima $CAFG$ i $BAED$ i Teorem 1.1 se poklapa sa Pitagorinim teoremom.

3. Tri rješenja jednog primjera

Primjer 3.1. *Dokazati da u svakom trouglu vrijedi jednakost*

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cos\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3\ . \tag{9}$$

Rješenje:

Rješenje 1: Primjenom kosinusnog teorema (Teorem 1.1) dobijamo da je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\ ,$$

te je

$$\begin{aligned}
(9) \Leftrightarrow\ & \frac{\left(b^2 + c^2\right)^2 - a^2\left(b^2 + c^2\right)}{2b^2c^2} + \frac{\left(a^2 + c^2\right)^2 - b^2\left(a^2 + c^2\right)}{2a^2c^2} + \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2 - c^2\left(a^2 + b^2\right)}{2a^2b^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & \frac{b^4 + 2b^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2}{2b^2c^2} + \frac{a^4 + 2a^2c^2 + c^4 - b^2a^2 - b^2c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^2a^2 - c^2b^2}{2a^2b^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & \frac{b^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2c^2} - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2a^2} - \frac{b^2}{2c^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} + 1 + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c^2}{2b^2} - \frac{c^2}{2a^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3\ .
\end{aligned}$$

Rješenje 2: Primjenom projekcionih relacija

$$
\begin{aligned}
a &= c\cos\beta + b\cos\gamma,\\
b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha,\\
c &= a\cos\beta + b\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

(dokazati) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
(9) &\Leftrightarrow \left(\frac{b\cos\alpha}{c}+\frac{c\cos\alpha}{b}\right)+\left(\frac{c\cos\beta}{a}+\frac{a\cos\beta}{c}\right)+\left(\frac{a\cos\gamma}{b}+\frac{b\cos\gamma}{a}\right)=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{c\cos\beta+b\cos\gamma}{a}+\frac{a\cos\gamma+c\cos\alpha}{b}+\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha}{c}=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=3,\ \text{što je tačno.}
\end{aligned}
$$

Rješenje 3: Primjenom Sinusnog teorema dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
(9) &\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\beta+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\gamma=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\sin\gamma}=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\beta}+\frac{\sin(180^\circ-\gamma)}{\sin\gamma}=3,\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\sin\beta}+\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma}=3,\ \text{što je tačno.}
\end{aligned}
$$

□

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zanimljiv dokaz kosinusova poučka,* Miš, broj 81/godina 17./ listopad 2015.
[2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Matematiske miniaturer,* 1. oplag, Fredniksberg, 2004.
[3] J. Carstensen: *Cosinusrelationen-et par bemerkniger,* LMFK-bladet Nr. 2, maj 2018.
[4] V. Pavković: *Elementarna matematika 2,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.
[5] B.A. Kpeymap: *Zadačnik po algebre*, Hayka, Moskva, 1968.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 33–43

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Površina tangentnog i tetivnog mnogougla

Hasan Smajić[a]

[a]*JU OŠ "Malešići", Malešići*

Sažetak: U ovom radu izvedena je formula za izračunavanje površine bicentričnog četverougla (četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni) pomoću dužine njegovih stranica. Zatim su izvedene različite forme površine tetivnog mnogougla kao i formula za površinu tangentnog mnogougla.

1. Uvod

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja započetih u ranijim radovima [1],[2],[3] u kojima su dokazani teoremi o potrebnim i dovoljnim uvjetima da bi konveksni mnogougao bio tangentni (može se u njega upisati kružnica), odnosno tetivni (može se oko njega opisati kružnica).
Poznato nam je da se proučavanje površine trougla, četverougla i pravilnog mnogougla može izvesti na više načina (pomoću različitih formula).
Postavlja se pitanje: kako izračunati površinu tangentnog i tetivnog mnogougla koji nisu pravilni? U ovome radu bit će dat odgovor na to pitanje.
Slike urađene u *GeoGebri* služe uglavnom kao provjera tačnosti algebarskih izračunavanja (valjanosti izvedenih formula).
Prije svega, neophodno je podsjetiti se nekih važnih rezultata dobijenih u [1],[2],[3], a koje ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 1.1. *Konveksni mnogougao $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima neparan broj tjemena ($n=2k+1$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cos\varphi_1}=\cdots=\frac{a_{n-2}}{\cos\varphi_{n-2}}=\frac{a_{n-1}}{\cos\varphi_{n-1}}=2R\ ,$$

pri čemu su $a_i=A_iA_{i+1}$, $(i=1,2,\dots n-1)$ bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i=\measuredangle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n}{2}\ ,$$

$$\varphi_i=\measuredangle OA_iA_{i+1}=\measuredangle OA_{i+1}A_i=\alpha_i-\varphi_{i-1},(i=2,3,\dots n-1)\ ,$$

R poluprečnik opisane kružnice trougla $A_1A_2A_3$ i O centar te kružnice.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Email adresa: smajic.cico@gmail.com (Hasan Smajić)

Teorem 1.2. *Konveksni mnogougao $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima paran broj tjemena ($n=2k$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cos\varphi_1}=\cdots=\frac{a_{n-2}}{\cos\varphi_{n-2}}=\frac{a_{n-1}}{\cos\varphi_{n-1}}=2R\ ,$$

pri čemu su $a_i=A_iA_{i+1}$, $(i=1,2,\ldots n-1)$ bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i=\measuredangle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1=\arctan\frac{a_2-a_1\cos\alpha_2}{a_1\sin\alpha_2},0^\circ<\varphi_1<90^\circ\ ,$$

$$\varphi_i=\measuredangle OA_iA_{i+1}=\measuredangle OA_{i+1}A_i=\alpha_i-\varphi_{i-1},(i=2,3,\ldots n-1)\ ,$$

R poluprečnik opisane kružnice sa centrom u tački O.

Teorem 1.3. *Mnogougao koji ima n tjemena je tangentni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cot\frac{\alpha_1}{2}+\cot\frac{\beta_1}{2}}=\cdots=\frac{a_{n-3}}{\cot\frac{\alpha_{n-3}}{2}+\cot\frac{\beta_{n-3}}{2}}=\frac{a_{n-2}}{\cot\frac{\alpha_{n-2}}{2}+\cot\frac{\beta_{n-2}}{2}}=r\ , \tag{1}$$

gdje su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-3},a_{n-2}$ bilo kojih $(n-2)$ stranica pri čemu preostale dvije stranice nisu paralelne, α_i i β_i su uglovi na stranici a_i, $(i=1,2,\ldots,n-2)$, a r je poluprečnik upisane kružnice.

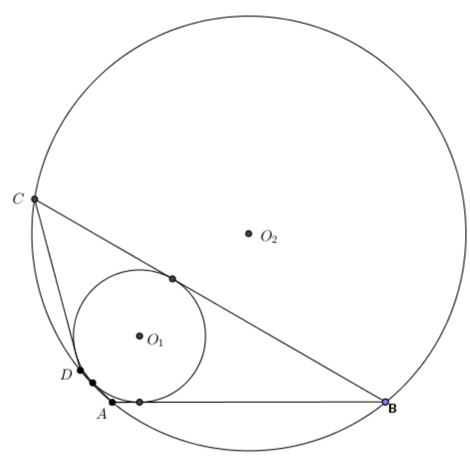
2. Površina bicentričnog četverougla (tangentno-tetivnog)

Na Slici 1 dat je primjer jednog tangentno-tetivnog četverougla, to jest četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni. Naime, da bi konveksni četverougao $ABCD$ bio bicentrični mora ispunjavati dva uvjeta:

a) zbirovi suprotnih stranica su jednaki, to jest $a+c=b+d$ (uvjet tangentnosti),

b) zbirovi suprotnih uglova su jednaki, to jest $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ (uvjet tetivnosti).

Međutim, prije nego pristupimo postupku izračunavanja površine bicentričnog četverougla, navest ćemo dokaz za izračunavanje površine tetivnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica.



Slika 1: Tangentno-tetivni četverougao

Teorem 2.1. *Ako su a, b, c i d dužine stranica tetivnog četverougla, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, tada se njegova površina P_{ABCD} izražava formulom*

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

Dokaz : Neka je četverougao $ABCD$ tetivni. Vidjeti Sliku 1. Tada je $\alpha + \gamma = 180^\circ$ i

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha\ .$$

Dalje, imamo da je

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BDC} = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2} = \frac{(ad+bc)\sin\alpha}{2} = \frac{(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2}\ .$$

Kako je

$$\cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\ ,$$

primjenom kosinusnog teorema na trougao ABD i trougao BCD (koristeći da je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $\cos\gamma = -\cos\alpha$), dobijamo

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha\ ,$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}\ .$$

Zamjenom ovako izračunatog $\cos\alpha$, dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \frac{(ad+bc)\sqrt{1-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2}}{4}\ ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \sqrt{\tfrac{-a+b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a-b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b-c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-d}{2}} \\ &= \sqrt{\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-a\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-b\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-c\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-d\right)}\ , \end{aligned}$$

to jest

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zanimljivo je da će formula za površinu bicentričnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica imati sličnu, ali jednostavniju formu nego u slučaju tetivnog četverougla.

Teorem 2.2. *Neka su a, b, c i d dužine stranica bicentričnog četverougla $ABCD$. Tada je njegova površina data sa*

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd}\ .$$

Dokaz : Za bicentrični četverougao $ABCD$ i $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ znamo da je $a+c = b+d$ i da je površina data sa

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

Kako je

$$\begin{aligned} s-a &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - a = \tfrac{2(a+c)}{2} - a = c, \quad & s-b &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - b = \tfrac{2(b+d)}{2} - b = d, \\ s-c &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - c = \tfrac{2(a+c)}{2} - c = a, \quad & s-d &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - d = \tfrac{2(b+d)}{2} - d = b\ , \end{aligned}$$

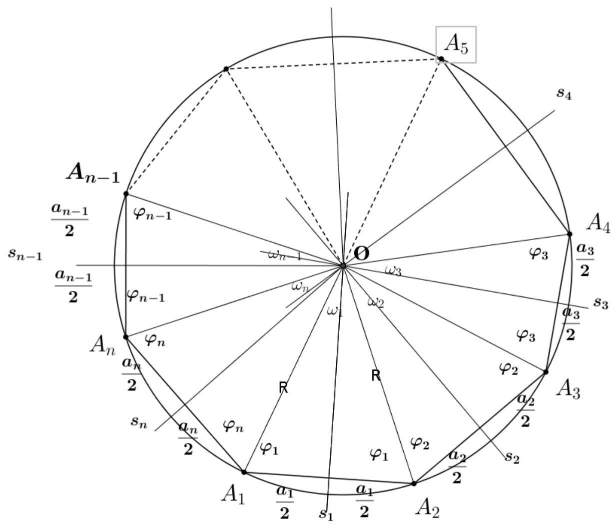
dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd}\ ,$$

površina bicentričnog četverougla $ABCD$. □

3. Površina tetivnog mnogougla

Na Slici 2 dat je primjer jednog tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$.



Slika 2: Tetivni mnogougao

Teorem 3.1. *Površina tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima n tjemena data je sa*

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n\right)}{2} ,$$

gdje je $\alpha_i = \sphericalangle A_i,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}, \quad za \quad n = 2k+1 ,$$

i

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a_2 - a_1 \cos\alpha_2}{a_1 \sin\alpha_2}, \quad za \quad n = 2k ,$$

a

$$\varphi_i = \measuredangle OA_iA_{i+1} = \measuredangle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n .$$

Dokaz : Kako je

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = P_{OA_1A_2} + P_{OA_2A_3} + \cdots + P_{OA_{n-1}A_n} ,$$

to je

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{R^2\sin\omega_1}{2} + \frac{R^2\sin\omega_2}{2} + \cdots + \frac{R^2\sin\omega_n}{2} = \frac{R^2\left(\sin\omega_1 + \sin\omega_2 + \cdots + \sin\omega_n\right)}{2}$$

$$= \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n\right)}{2} = \frac{R^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 2\varphi_k}{2} .$$

Ovdje smo koristili poznatu jednakost

$$\sin\omega_i = \sin(180^\circ - 2\varphi_i) = \sin 2\varphi_i \ ,$$

koja vrijedi za uglove ω_i i φ_i u trouglu $\triangle OA_iA_{i+1}$. $\square$

Izvedimo sada formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ u funkciji stranica $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i uglova $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Kako je $\cos\varphi_i = \frac{\frac{a_i}{2}}{R}$, to je $R^2 = \frac{a_i^2}{4\cos^2\varphi_i}$ i

$$R^2 \sin 2\varphi_i = \frac{a_i^2}{4\cos^2\varphi_i} \cdot 2\sin\varphi_i\cos\varphi_i = \frac{a_i^2\sin\varphi_i}{2\cos\varphi_i} = \frac{a_i^2\tan\varphi_i}{2} \ .$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1^2\tan\varphi_1}{2} + \frac{a_2^2\tan\varphi_2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2\tan\varphi_{n-1}}{2} + \frac{a_n^2\tan\varphi_n}{2}}{2} \ , \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{a_1^2\tan\varphi_1 + a_2^2\tan\varphi_2 + \cdots + a_{n-1}^2\tan\varphi_{n-1} + a_n^2\tan\varphi_n}{4} \ ,$$

to jest

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\tan\varphi_k \ .$$

Na kraju, izvedimo formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1\cdots A_{n-1}A_n$ u funkciji stranica $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i poluprečnika R.

Označimo sa h_i visine trouglova OA_iA_{i+1} na stranice a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ i sa h_n visinu trougla OA_nA_1 na stranicu a_n. Kako je

$$\sin 2\varphi_i = 2\sin\varphi_i\cos\varphi_i = 2\cdot\frac{h_i}{R}\cdot\frac{\frac{a_i}{2}}{R} = \frac{a_i\sqrt{R^2 - \frac{a_i^2}{4}}}{R^2} = \frac{a_i\sqrt{4R^2 - a_i^2}}{2R^2} \ ,$$

to imamo da je površinu tetivnog mnogougla data sa

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1}{2}\sqrt{4R^2 - a_1^2} + \frac{a_2}{2}\sqrt{4R^2 - a_2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2}\sqrt{4R^2 - a_{n-1}^2} + \frac{a_n}{2}\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2} \ , \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{4R^2 - a_k^2} \ .$$

4. Površina tangentnog mnogougla

Uočimo da relacija (1) vrijedi i kad umjesto $n-2$ stavimo n.

Teorem 4.1. *Površina tangentnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ izražava se formulom*

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = r\cdot s = r^2\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ ,$$

pri čemu je r poluprečnik upisane kružnice, a α_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ su uglovi mnogougla.

Dokaz : Neka su α_i, α_{i+1} uglovi na stranici a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, α_n, α_1 uglovi na stranici a_n i r poluprečnik upisane kružnice tangentnog mnogougla. Iz

$$\frac{a_1}{\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\alpha_2}{2}} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{\cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}} = \frac{a_n}{\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}} = r \ ,$$

dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= r\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\alpha_2}{2}\right), \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= r\left(\cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right), \\ a_n &= r\left(\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}\right) \ , \end{aligned}$$

pa je

$$s = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{2} = r\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ .$$

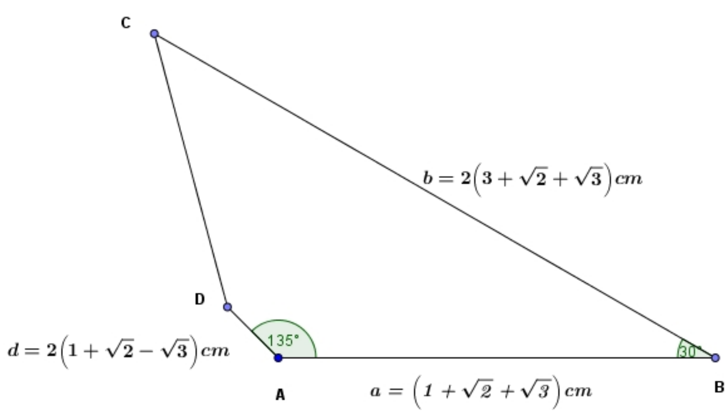
Dakle, formulom

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = r\cdot s = r^2\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ ,$$

izražava se površina tangentnog mnogougla. $\square$

5. Primjeri primjene dobijenih rezultata

Primjer 5.1. *Na Slici 3 dat je četverougao $ABCD$. Pokazati da je dati četverougao bicentričan. Zatim odrediti dužinu stranice $c = CD$, uglove $\gamma = \measuredangle BCD$ i $\delta = \measuredangle ADC$, poluprečnik upisane kružnice r i poluprečnik opisane kružnice R, te površinu P_{ABCD}.*



Slika 3: Četverougao $ABCD$

Rješenje: Da je dati četverougao tetivan dovoljno je pokazati da su uglovi $\omega = \measuredangle ACB$ i $\tau = \measuredangle ADB$ jednaki. Primjenom kosinusnog teorema na trouglove ACB i ADB za $a = |AB| = 2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $b = |BC| = 2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $d = |AD| = 2\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ dobijamo

$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(30^\circ)}, \quad |BD| = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos(135^\circ)} \ ,$$

$$|AC| = 2\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}, \quad |BD| = 4\sqrt{4+\sqrt{2}}\ ,$$

te primjenom sinusnog teorema imamo da je

$$\frac{|AB|}{\sin\omega} = \frac{|AC|}{\sin(30^\circ)}, \quad \frac{|AB|}{\sin\tau} = \frac{|BD|}{\sin(135^\circ)}\ .$$

Sada je

$$\sin\omega = \tfrac{|AB|\cdot\sin(30^\circ)}{|AC|} = \tfrac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}},$$
$$\sin\tau = \tfrac{|AB|\cdot\sin(135^\circ)}{|BD|} = \tfrac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}\ .$$

Dakle, dobili smo da je $\omega = \tau$, pa je četverougao $ABCD$ tetivni.

Kako je četverougao $ABCD$ tetivni, to je $\alpha+\gamma = \beta+\delta$. Sada je

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2(\beta+\delta) = 360^\circ\ ,$$

odnosno

$$\alpha+\gamma = 180^\circ,$$
$$\beta+\delta = 180^\circ,$$

te je

$$\gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$
$$\delta = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ\ .$$

Pokažimo sada da je dati četverougao i tangentni. Prema Teoremu 1.3 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{a}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}}\ .$$

Kako je

$$\tfrac{a}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} = \tfrac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\cot\frac{135^\circ}{2}+\cot\frac{30^\circ}{2}} = \tfrac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)} = 2\ ,$$

i

$$\tfrac{b}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}} = \tfrac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\cot\frac{30^\circ}{2}+\cot\frac{45^\circ}{2}} = \tfrac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)} = 2\ ,$$

to je tačno. Dakle, četverougao je tangentni i poluprečnik upisane kreužnice je $r = 2$. Za stranicu $c = |CD|$ imamo da je

$$c = r\left(\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}\right) = 2\left(\cot\frac{45^\circ}{2}+\cot\frac{150^\circ}{2}\right) = 2\left(\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\ ,$$

to jest $c = 2\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

Odredimo dužinu poluprečnika R opisane kružnice. Kako je $n = 4$ paran broj, to prema Teoremu 1.2 imamo da je

$$\varphi_1 = \arctan\frac{b-a\cos\beta}{a\sin\beta} = \arctan\tfrac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos 30^\circ}{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin 30^\circ}$$
$$= \arctan\tfrac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{1}{2}} = \arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+4\right) = \arctan(1.2327)\ ,$$

odnosno $\varphi_1 \approx 50.95°$. Sada je

$$R = \frac{a}{2\cos\varphi_1} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cos 50.95°} \approx \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot 0.63},$$

to jest $R \approx 6.581\,4$. Dalje,

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \beta - \varphi_1 \approx 30° - 50.95° = -20.95°,\\ \varphi_3 &= \gamma - \varphi_2 \approx 45° + 20.95° = 65.95°,\\ \varphi_4 &= \delta - \varphi_3 \approx 150° - 65.95° = 84.05°\ .\end{aligned}$$

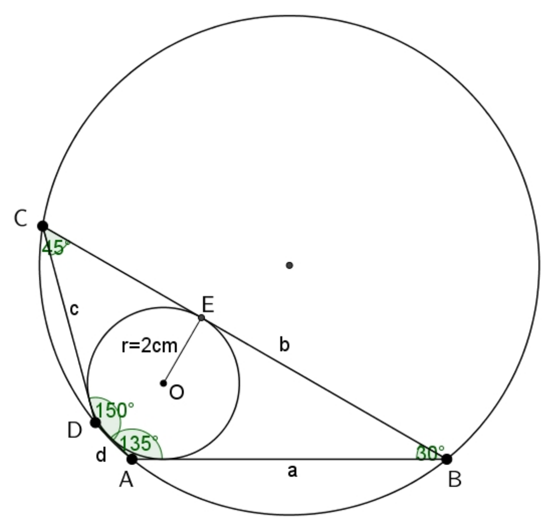
I konačno, izračunajmo površinu bicentričnog četverougla

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4\right)}{2}\\ &\approx \tfrac{(6.581\,4)^2(\sin 2(50.95°)+\sin 2(-20.95°)+\sin 2(65.95°)+\sin 2(84.05°))}{2},\end{aligned}$$

odnosno $P_{ABCD} \approx 27.314$. Isti rezultat dobijamo i ako koristimo sljedeću formulu $P_{ABCD} = \sqrt{abcd}$. Zaista,

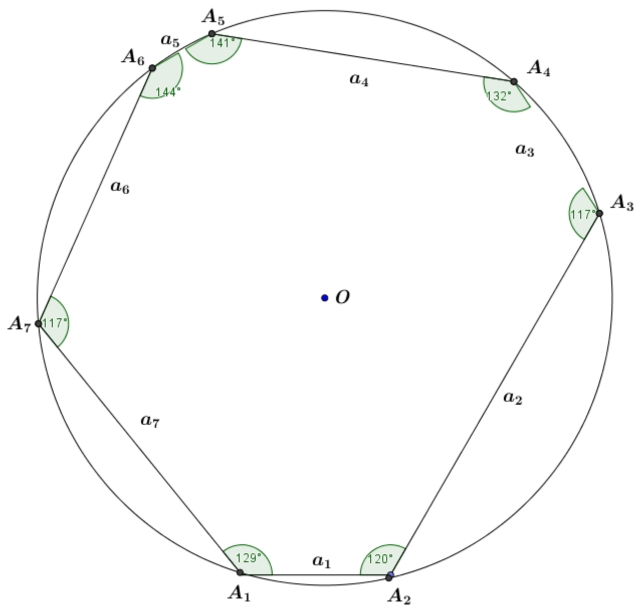
$$\begin{aligned}P_{ABCD} = \sqrt{abcd} &= \sqrt{2^4\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\\ &= 4\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3\right)\left(\left(3+\sqrt{2}\right)^2-3\right)} = 8\sqrt{6+4\sqrt{2}}\,,\end{aligned}$$

to jest $P_{ABCD} \approx 27.314$ (Vidjeti sliku 4). □



Slika 4: Bicentrični četverougao $ABCD$

Primjer 5.2. *Na Slici 5 dat je sedmougao. Odrediti obim i površinu sedmougla upisanog u kružnicu poluprečnika $R = 3cm$ čiji su uglovi redom $\alpha_1 = 129°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 117°$, $\alpha_4 = 132°$, $\alpha_5 = 141°$, $\alpha_6 = 144°$, $\alpha_7 = 117°$.*



Slika 5: Sedmougao

Rješenje: Kako je $n = 7$ neparan broj imamo da je

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7}{2} = \frac{129^\circ + 120^\circ - 117^\circ + 132^\circ - 141^\circ + 144^\circ - 117^\circ}{2} = 75^\circ \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \alpha_2 - \varphi_1 = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ, \\
\varphi_3 &= \alpha_3 - \varphi_2 = 117^\circ - 45^\circ = 72^\circ, \\
\varphi_4 &= \alpha_4 - \varphi_3 = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ, \\
\varphi_5 &= \alpha_5 - \varphi_4 = 141^\circ - 60^\circ = 81^\circ, \\
\varphi_6 &= \alpha_6 - \varphi_5 = 144^\circ - 81^\circ = 63^\circ, \\
\varphi_7 &= \alpha_7 - \varphi_6 = 117^\circ - 63^\circ = 54^\circ \ .
\end{aligned}$$

Stranice sedmougla su

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2R\cos\varphi_1 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 75^\circ \approx 1.552\,9 cm, \\
a_2 &= 2R\cos\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ \approx 4.242\,6 cm, \\
a_3 &= 2R\cos\varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 72^\circ \approx 1.854\,1 cm, \\
a_4 &= 2R\cos\varphi_4 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \approx 3.0 cm, \\
a_5 &= 2R\cos\varphi_5 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 81^\circ \approx 0.938\,61 cm, \\
a_6 &= 2R\cos\varphi_6 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 63^\circ \approx 2.723\,9 cm, \\
a_7 &= 2R\cos\varphi_7 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 3.526\,7 cm,
\end{aligned}$$

a obim

$$\begin{aligned}
O &\approx (1.552\,9 + 4.242\,6 + 1.854\,1 + 3.0 + 0.938\,61 + 2.723\,9 + 3.526\,7)\, cm, \\
O &\approx 17.839 cm \ .
\end{aligned}$$

I konačno,

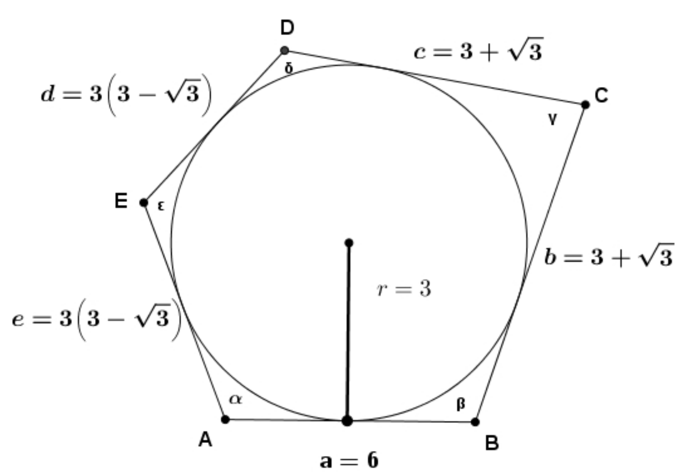
$$P = \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4 + \sin 2\varphi_5 + \sin 2\varphi_6 + \sin 2\varphi_7)}{2} \ ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} P &\approx \frac{3^2(\sin 2(75^\circ)+\sin 2(45^\circ)+\sin 2(72^\circ)+\sin 2(60^\circ)+\sin 2(81^\circ)+\sin 2(63^\circ)+\sin 2(54^\circ))}{2} \\ &= \frac{9(\sin 150^\circ+\sin 90^\circ+\sin 144^\circ+\sin 120^\circ+\sin 162^\circ+\sin 126^\circ+\sin 108^\circ)}{2} \\ &= \frac{9(\sin 30^\circ+1+\sin 36^\circ+\sin 60^\circ+\sin 18^\circ+\sin 54^\circ+\sin 72^\circ)}{2} \\ &= \frac{9\left(\frac{1}{2}+1+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)}{2} \\ &\approx 22.603 \ . \end{aligned}$$

□

Primjer 5.3. *Na Slici 6 dat je tangentni petougao ABCDE površine* $P_{ABCDE} = 3\left(15 - 2\sqrt{3}\right)$. *Odrediti njegove uglove.*



Slika 6: Tangentni petougao

Rješenje: Koristeći podatke sa slike i Teorem 4.1 dobijamo da za uglove α_i, α_{i+1} na stranici a_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ i α_5, α_1 uglove na stranici $a_5 = e = 3\left(3 - \sqrt{3}\right)$ i $r = 3$ poluprečnik upisane kružnice tangentnog mnogougla vrijedi

$$\cot \frac{\alpha_i}{2} + \cot \frac{\alpha_{i+1}}{2} = \frac{a_i}{r} \ ,$$

$$\cot \frac{\alpha_5}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_5}{2} \ ,$$

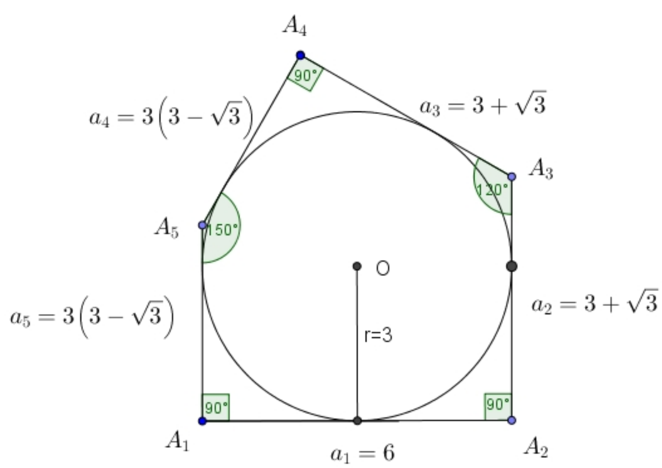
odnosno vrijedi

$$
\begin{aligned}
\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2} &= \frac{6}{3}\ ,\\
\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\ ,\\
\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2} &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\ ,\\
\cot\frac{\delta}{2}+\cot\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\ ,\\
\cot\frac{\varepsilon}{2}+\cot\frac{\alpha}{2} &= \frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\ .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Sabiranjem gornjih jednakosti dobijamo

$$
2\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}+\cot\frac{\varepsilon}{2}\right)=10-\frac{4\sqrt{3}}{3}\ . \tag{3}
$$

Sada koristeći drugu i četvrtu jednadžbu iz (2) u (3) dobijamo da je $\cot\frac{\alpha}{2}=1$, odnosno $\alpha=90^\circ$. Uvrštavajući ovu vrijednost za α prvu jednadžbu sistema (2) dobijamo da je i $\beta=90^\circ$, te iz druge jednadžbe sistema (2) dobijamo $\gamma=120^\circ$, iz treće $\delta=90^\circ$ i iz četvrte $\varepsilon=150^\circ$. Vidjeti rezultate na Slici 7. □



Slika 7: Tangentni petougao

Literatura

[1] H. Smajić: *Tangentni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2011.
[2] H. Smajić: *Tetivni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2016.
[3] H. Smajić: *Tetivni mnogougao koji ima paran broj tjemena*, Didaktički putokazi, Zenica, 2017.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 44–54

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Metoda Georgya Pólyae

Elvir Mujkić[a]

[a]*Srednja škola, Kalesija*

Sažetak: Vrlo često na različitim nivoima obrazovanja susrećemo se sa problemom da učenici ne znaju kako započeti zadatak, kako ga rješavati i kada su stigli do rješenja, i da li je to rješenje zaista rješenje zadatka. Namjera nam je u ovom radu da nastavnicima i profesorima matematike i učenicima prikažemo metodu kojom se uči metoda rješavanja zadataka, što će biti predstavljeno kroz određen broj primjera sa različitih nivoa obrazovanja.

1. Uvod

George Pólya (mađarski Pólya György, Budimpešta, 13.decembar 1887 godine - Palo Alto, 7. septembar 1985 godine) je bio mađarski matematičar [9]. Nakon završene osnovne škole upisuje gimnaziju gdje najviše interesovanja pokazuje za jezike. Poslije srednje škole prvo upisuje pravo na Budimpeštanskom univerzitetu, ali to brzo napušta i upisuje jezike. Potom vrlo brzo postaje profesor latinskog i mađarskog jezika. Veoma brzo se počeo zanimati za filozofiju, te na nagovor profesora filozofije upisuje tečaj matematike i fizike, kako bi bolje razumio filozofiju. Međutim, uviđa da je matematika ono čime bi se volio baviti. Godine 1910/1911 studirajući na Bečkom Univerzitetu, povremeno uči barunovog sina, provodeći mnogo vremena istražujući načine kako bi mu objasnio matematiku. Nakon toga doktorira u Budimpešti, te odlazi u Zürich da radi na Univerzitetu, između ostalih njegovi studenti su bili Röntgen i Einstein. Poslije toga odlazi na Oxford i Cambridge na godinu dana, a onda zajedno sa suprugom 1940 godine emigrira u Palo Alto, u SAD, zbog svojih židovskih korijena. Tamo objavljuje više knjiga iz matematike, a najznačajnije je pomenuti da je 1945 godine objavio knjigu "How to solve it" koja je prodana u više od milion primjeraka, a prevedena je na 17 svjetskih jezika (između ostalih je i srpko-hrvatski jezik, a prevod je objavljen 1966 godine u izdanju zagrebačke "Školske knjige").

2. Kako riješiti problem

Moderna nastava matematike se obično opisuje kao nastava orijentirana prema učenicima, što znači da se dosadašnja dominantna uloga nastavnika stavlja u drugi plan, a povećava se učenička aktivnost u nastavi matematike. Time nastavnik nije više u poziciji glavnog aktera prijenosa znanja, već postaje koordinator i organizator nastavnog procesa. Pored toga, tendencija je poticati odgovornost učenika za vlastiti uspjeh i napredovanje u matematici. Eksperimentalan rad ima važno mjesto u metodici matematike jer je povezan s heurističkim strategijama i idejama. Heuristička metoda se odnosi na vođenje, poticanje i usmjeravanje

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Email adresa: eelvir.mujkic@yahoo.com (Elvir Mujkić)

učeničkih ideja na pronalaženje rješenja problema i otkrivanje novih sadržaja. To nastavnikovo vođenje i usmjeravanje se uglavnom ostvaruje kroz razgovor, osim spomenutih metodičkih rješenja komuniciranja i vođenja učenika tokom nastavnog sata do korištenja svih novih komunikacijskih medija. Kroz sve ove metode se može implementirati i metoda George Pólya koju je on opisao u svojoj knjizi "*How to solve it*".

Naime, George Pólya je sredinom prošlog vijeka istraživao nastavu matematike orijentisanu ka učeniku. U tom istraživanju je došao do algoritma za rješavanje matematičkih zadataka koji se sastoji od četiri koraka, a to su: Razumjeti problem (Izvorno: Understanding the problem), Izradite plan (Devising a plan), Izvršavanje plana (Carrying out the plan) i Pogled unazad i provjera (Looking back) [4].

Prvi korak

Razumjeti problem: Često prilikom rješavanja zadataka učenici i ne razumiju postavljeni zadatak [8]. Tako da je potrebno prvo sa učenicima razjasniti šta je traženo zadatkom, mada to nekada izgleda tako jednostavno. U svrhu toga George Pólya u svojoj knjizi [4], nam nudi određen broj pitanja koja trebamo postavljati učenicima kako bi provjerili da li razumiju zadatak. Ta pitanja su: *Šta je nepoznato? Šta je zadato? Kako glasi uslov? Da li je moguće zadovoljiti uslov? Da li je uslov dovoljan za određivanje nepoznate? Ili nije dovoljan? Ili preodređen? Ili kontradiktoran? Nacrtaj sliku! Uvedi prepoznatljive oznake! Rastavi razne dijelove uslova? Da li ih možeš napisati?*

Pored navedenih pitanja u kontekstu zadatka i razumijevanja istog nastavnik može dodati još neko pitanje?

Drugi korak

Izradite plan: U ovom dijelu potrebno je potražiti vezu između zadatog i nepoznatog. Ako nije moguće naći neposrednu vezu, onda se moraju razmotriti i neki drugi pomoćni zadaci koji su vezani za zadate odnosno nepoznate veličine. U svrhu toga možemo se poslužiti slijedećim pitanjima: *Da li si zadatak već vidio? Ili si isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku? Znaš li neki srodni zadatak? Da li znaš teoremu koja bi mogla pomoći? Razmotri nepoznatu! Pokušaj da se sjetiš nekog poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznatu! Evo zadatka koji je sličan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat? Možeš li primijeniti metodu kojom je zadatak riješen? Da li možeš da uvedeš neki pomoćni element koji bi ti olakšao upotrebu tog zadatka? Možeš li da drugačije formulišeš zadatak? Da li ga je moguće izraziti na još neki način? Vrati se na definicije!* [4]

Na kraju treba napraviti plan kako bi se zadatak trebao riješiti.

Ako ne možeš da riješiš postavljeni zadatak pokušaj prvo da riješiš neki srodan zadatak! Možeš li da se sjetiš nekog lakšeg zadatka koji mu je sličan? Opštiji zadatak? Specifičniji zadatak? Analogan zadatak? Možeš li da riješiš dio zadatka? Zadrži samo jedan dio uslova, a odbaci drugi dio; kada je tako nepoznata određena kako se može mijenjati? Da li iz datih podataka možeš izvući nešto upotrebljivo? Da li možeš da se sjetiš nekih drugih podataka koji ti mogu pomoći u određivanju nepoznate? Možeš li da promijeniš nepoznatu, ili date podatke, ili ako treba i jedno i drugo tako da nova nepoznata i novi podaci budu međusobno bliži? Da li si iskoristio sve zadato? Da li si iskoristio uslov u potpunosti? Da li si uzeo sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku? [4]

Treći korak

Izvršavanje plana: Ovdje učenici treba da izvrše naznačene radnje u *izradi plana*. Takođe se mogu dati konstatacije i postaviti pitanja kako bi se olakšalo izvršavanje plana. Evo nekih od njih: *Kada koristiš plan rješavanja, kontroliši svaki korak! Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan? Možeš li pokazati da je ispravan?*

Četvrti korak

Pogled unazad i provjera: Kada je zadatak riješen treba se osvrnuti na zadatak odnosno na postupak rješavanja zadatka, provjeriti i diskutovati rješenje zadatka. Sve ovo se može uraditi kroz pitanja: *Možeš li provjeriti rezultat? Možeš li provjeriti dokaz? Možeš li rješenje izvesti na drugi način? Možeš li ga uočiti na prvi pogled? Možeš li zadatak ili rezultat upotrijebiti na nekom drugom zadatku?* [4]

Ovakav način rješavanja zadataka neće dati rezultat ako se ne bude koristio češće. Naime, potrebno je od ranih razreda početi sa primjenom ovog algoritma za rješavanje zadataka, pa čak i od prvog razreda osnovne škole, kako bi učenici razvili ovaj algoritam što bolje. Možemo zaključiti: *"Da bi učenje bilo učinkovito, učenik se mora zainteresirati za gradivo koje uči, nalaziti zadovoljstvo u samom procesu učenja gradiva,* [5]*."*

U cilju promocije ovakvog načina učenja, ovdje ćemo dati jedan pregled upotrebe ovog algoritma kroz zadatke od ranih razreda osnovne škole do srednje škole.

3. Primjeri

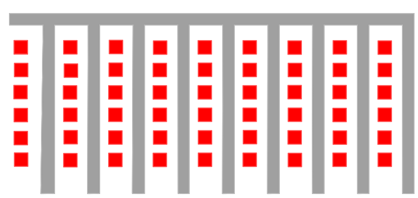
U svakom primjeru ćemo pored postavljanja pitanja za razrađivanje plana rješavanja zadataka, pisati i pretpostavljene odgovore od strane učenika.
Prvi zadatak je iz matematike za treći razred devetogodišnje osnovne škole [6], iz nastavne oblasti *Tablica množenja i dijeljenja.*

Primjer 3.1. *U naselju su* 54 *kuće. Sve kuće su jednako podijeljene u* 9 *ulica. Koliko je kuća u svakoj ulici?*

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Postavljamo pitanje sebi i učenicima:
Nastavnik: Šta znamo?
Učenik: Znamo da je u naselju ukupno 54 kuće i da su raspoređene u 9 ulica. Svaka ulica ima isti broj kuća.
Nastavnik: Kako možemo preformulisati pitanje?
Učenik: Ako je u naselju 9 ulica i u svakoj ulici jednak broj kuća, koliko kuća ima u svakoj ulici, ako naselje ima ukupno 54 kuće?
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako izraditi plan?
Učenik: Kako u naselju ima ukupno 54 kuće, a u svakoj od 9 ulica jednak broj kuća, to ćemo ukupan broj kuća podijeliti sa brojem 9 i dobiti broj kuća u svakoj ulici.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$54 : 9 = 6 \; .$$

Nastavnik: Odgovor je:
Učenik: U svakoj ulici ima po 6 kuća.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Da bi provjerili rezultat i da li smo upotrijebili sve zadate elemente trebamo pomnožiti broj ulica sa brojem kuća u ulici, tako dobijemo ukupan broj kuća u naselju. Ako se rezultat poklapa sa datim brojem kuća u naselju onda smo tačno izvršili zadatak: $9 \cdot 6 = 54$.
Što možemo prikazati i slikovito, a znači da smo dobro odredili broj kuća u pojedinoj ulici. □



Slika 1: Naselje sa ulicama

Drugi zadatak je iz matematike za treći razred devetogodišnje osnovne škole [6], iz nastavne oblasti *Sabiranje više brojeva sa upotrebom zagrada.*

Primjer 3.2. *Izračunati vrijednost izraza:* $(91 - 5) - 3$.

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta trebamo izračunati?
Učenik: Trebamo izračunati razliku, broja u zagradi (91-5) i umanjioca (3).
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Koju operaciju ćemo prvo rješavati?
Učenik: Prvo rješavamo onu operaciju koja se nalazi u zagradi.

Nastavnik: Kakvi su brojevi u zagradi?
Učenik: Jedan broj je dvocifren, a drugi broj je jednocifren. Umanjenik je dvocifren broj 91, a umanjilac je jednocifren broj 5.
Nastavnik: Da li smo rješavali slične zadatke?
Učenik: Da, jesmo.
Nastavnik: Na koji način smo određivali razliku takvih brojeva?
Učenik: Ovakvu razliku određujemo tako što od cifre jedinica umanjenika oduzmemo umanjilac. Ako je cifre jedinica umanjenika manja od umanjioca, tada uz cifru jedinica pišemo deseticu 1, a cifru desetica umanjimo za 1. Tako dobijamo broj između 10 i 19, koji je sigurno veći od umanjioca, pa možemo izvršiti oduzimanje.
Nastavnik: Šta nam preostaje?
Učenik: Na kraju od dobivene razlike brojeva iz zagrade oduzmemo broj koji se nalazi iza zagrade (3).
Korak 3.: Izvršavanje plana
Učenici izvršavaju plan, a jedan od njih to radi na tabli:

$$\begin{aligned}&(91-5)-3=\\&(80+11-5)-3=\\&86-3=83\ .\end{aligned}$$

Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Možemo li provjeriti tačnost?
Učenik: Možemo! Tako što na razliku dodamo umanjioce, prvo onaj izvan zagrade (3), pa zatim i onaj u zagradi (5):

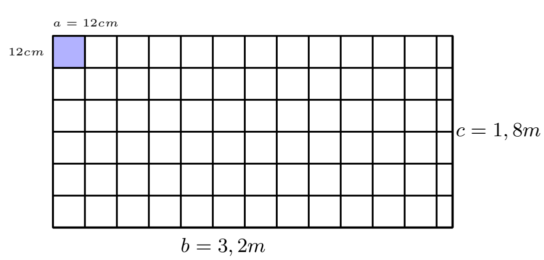
$$(83+3)+5=86+5=91\ .$$

□

Treći zadatak je iz matematike za sedmi razred devetogodišnje osnovne škole [3], iz nastavne oblasti *Površina pravougaonika, kvadrata i paralelograma*.

Primjer 3.3. *Koliko je potrebno pločica oblika kvadrata stranice* $12cm$*, da se poploča pod kupatila dimenzija: dužine* $2,3m$ *i širine* $1,8m$*?*

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta znamo?
Učenik: Znamo da su pločice u obliku kvadrata čija je stranica $a = 12cm$, i znamo dimenzije kupatila $b = 2,3m$ i $c = 1,8m$, koje je u obliku pravougaonika.
Nastavnik: Šta trebamo odrediti?
Učenik: Trebamo odrediti koliko komada pločica će biti potrebno da se poploča pod kupatila.
Nastavnik: Nacrtajmo skicu kako bi to izgledalo.



Slika 2: Raspored pločica

Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako ćemo to odrediti, možemo se poslužiti i skicom?
Učenik: Odrediti ćemo površinu koju pokriva jedna pločica, i površinu kupatila. Onda ćemo površinu kupatila podijeliti sa površinom jedne pločice. Označimo sa P_k površinu kupatila, a sa P_p površinu pločice.
Nastavnik: Kako ćemo izračunati površine pločice i kupatila?
Učenik: Površine pločice odnosno kupatila ćemo izračunati kao površine kvadrata odnosno pravougaonika, to jest $P_p = a^2$, odnosno, $P_k = b \cdot c$.
Nastavnik: O čemu moramo voditi računa?
Učenik: Moramo paziti da jedinica mjere površine kupatila bude ista jedinici mjere površine jedne pločice.
Nastavnik: Šta ako nisu iste jedinice mjere površina?
Učenik: Potrebno ih je pretvoriti u iste jedinice mjere.
Nastavnik: Da li je bitno koju jedinicu mjere odabrati u koju ćemo izvršiti pretvaranje i zašto?
Učenik: Ne, nije bitno koja je jedinica mjere, zato što će omjeri mjernih brojeva tih površina biti jednaki bez obzira na jedinicu mjere.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$P_k = b \cdot c = 2,3m \cdot 1,8m \ ,$$
$$P_k = 4,14m^2 \ .$$
$$P_p = a^2 = (12cm)^2 = 144cm^2 \ .$$

Kako je $1m^2 = 100^2cm^2 = 10000cm^2$, tada je

$$P_k = 4,14m^2 = 4,14 \cdot 1000cm^2 \ ,$$
$$P_k = 41400cm^2 \ .$$

Dakle, odnos površine kupatila i površine jedne pločice je,

$$P_k : P_p = 41400c^2 : 144cm^2 = 287,5 \ .$$

Za popločavanje poda kupatila dimenzija, dužina $2,3m$ i širine $1,8m$, potrebno je 287,5 komada pločica, čija je stranica $12cm$.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Provjerimo tačnost rezultata? Kako? Jesmo li iskoristili sve zadane podatke?
Učenik: Pomnožimo li mjerni broj površine jedne pločice sa brojem pločica dobićemo površinu koju će pokriti taj broj pločica. Ako ta površina bude jednaka površini kupatila, naš način računanja će biti ispravan i tačan.

$$144cm^2 \cdot 287,5 = 41400cm^2 = 4,14m^2 \ .$$

Nastavnik: Odakle zaključujemo da smo ispravno postupili u planu i tačno izvršili račun.
Takođe, vidimo da smo iskoristili sve zadane vrijednosti iz postavke zadatka. □

Četvrti zadatak je iz matematike za sedmi razred devetogodišnje osnovne škole [3], iz nastavne oblasti *Površina pravougaonika, kvadrata i paralelograma.*

Primjer 3.4. *Osnovica paralelograma je* $3,56m$*, a njegova površina* $6,28m^2$*. Kolika je udaljenost između osnovica paralelograma?*

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta nam je poznato?
Učenik: Poznate su nam osnovica paralelograma i njegova površina.
Nastavnik: Šta predstavlja udaljenost između osnovica?

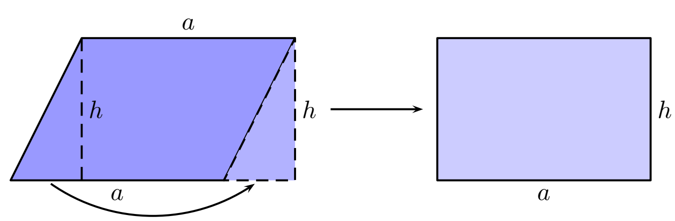
Učenik: Udaljenost između osnovica predstavlja visinu paralelograma.
Nastavnik: Kako možemo preformulisati zadatak?
Učenik: Kolika je visina paralelograma kod kojeg znamo da je osnovica $3,56m$ i površina paralelograma $6,28m^2$?

Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Pomoću koje poznate veličine paralelograma možemo odrediti visinu paralelograma?
Učenik: Pomoću površine i osnovice paralelograma.
Nastavnik: Kako se računa površina paralelograma?
Učenik: Površina paralelograma se računa pomoću formule $P = a \cdot h$, gdje je a osnovica paralelograma, a h je visina paralelograma na tu osnovicu.
Uvrštavanjem poznatih veličina dobijamo prostu linearnu jednačinu, koju treba riješiti.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$\begin{aligned} P &= a \cdot h \ , \\ 6,28m^2 &= 3,56m \cdot h / : 3,56m \ , \\ h &= 6,28m^2 : 3,56m \ , \\ h &= 1,33...m \ . \end{aligned}$$

Visina odnosno udaljenost između osnovica paralelograma je $h = 1,33...m$.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Da bismo provjerili tačnost ovog zadatka konstruišimo paralelogram osnovice a i visine h, a zatim taj paralelogram treba pretvoriti u pravougaonik, koji će imati površinu jednaku površini paralelograma. Kao što možemo vidjeti na sljedećoj slici:

□



Slika 3: Odnos paralelograma i pravougaonika

Peti zadatak je iz matematike za deveti razred devetogodišnje osnovne škole [1], iz nastavne oblasti *Razlomljeni racionalni izrazi.*

Primjer 3.5. *Izvršiti naznačene operacije s racionalnim algebarskim izrazima:*

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{3a}{a^2-b^2}$$

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta trebamo uraditi sa racionalnim algebarskim izrazima?
Učenik: Trebamo izvršiti naznačene operacije, odnosno trebamo izvršiti oduzimanje datih razlomaka.
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako se vrši oduzimanje algebarskih razlomaka?
Učenik: Oduzimanje algebarskih razlomaka se vrši dovođenjem na isti zajednički imenilac, a zatim brojnike oduzimamo.
Nastavnik: Znamo li zajednički imenilac?
Učenik: Ne znamo.

Nastavnik: Kako određujemo zajednički imenilac?
Učenik: Zajednički imenilac određujemo na osnovu prostih faktora svih imenilaca.
Nastavnik: Šta to znači?
Učenik: To znači da sve imenioce trebamo rastaviti na proste faktore.
Nastavnik: Da li smo to već ranije radili u nekim zadacima, i možemo li ih iskoristiti u našem primjeru?
Učenik: Jesmo, radili smo zadatke sa rastavljanjem polinoma na proste faktore. Kako su prva dva imenioca prosti faktori, to ćemo treći imenilac rastaviti $a^2 - b^2$, kao razliku kvadrata, to jest $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Nastavnik: Hoćemo li moći tada odrediti zajednički imenilac?
Učenik: Da, moći ćemo odrediti zajednički imenilac.
Nastavnik: Šta dalje trebamo uraditi?
Učenik: Dalje moramo prvi i drugi razlomak proširiti, kako bi mogli izvršiti oduzimanje.
Nastavnik: U redu. Vidim da imate plan za rješavanje ovog zadatka, hajdemo ga izvršiti.

Korak 3.: Izvršavanje plana

Učenik: Prvo ćemo rastaviti treći imenilac na proste faktore kako smo i rekli,:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \ ,$$

a onda ćemo vršiti operacije proširivanja i oduzimanja razlomaka:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{3a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a+b} - \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a-b} - \frac{3a}{a^2-b^2} \ .$$

Uz uslov da je $a \neq b; a \neq -b$,

$$\frac{a+b}{(a-b)(a+b)} - \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} - \frac{3a}{a^2-b^2} = \frac{a+b-(a-b)-3a}{(a-b)(a+b)}$$
$$= \frac{2b-3a}{(a-b)(a+b)} \ .$$

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Zašto je bitno naglasiti da prilikom proširivanja razlomaka mora biti $a \neq b; a \neq -b$?
Učenik: Proširivanje razlomaka se može izvršiti samo brojevima odnosno izrazima čija je vrijednost različita od nula. U konkretnom slučaju vrijednosti sa kojima proširujemo razlomke su $a + b \neq 0$, i $a - b \neq 0$. Iz ovoga slijedi da mora biti $a \neq -b$ i $a \neq b$. □

Šesti zadatak je iz matematike za prvi razred srednje škole [2], iz nastavne oblasti *Linearna jednačina i nejednačina*.

Primjer 3.6. *Riješiti sistem linearnih jednačina grafičkom metodom:*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Šta treba odrediti?
Učenik: Treba odrediti rješenje sistema linearnih jednačina u obliku uređenog para brojeva odnosno koordinate neke tačke.

Korak 2.: Izradite plan

Nastavnik: Kako se rješava sistem jednačina grafičkom metodom?
Učenik: Sistem linearnih jednačina se grafičkom metodom rješava tako što se jednačine predstave kao grafici linearnih funkcija u koordinatnom sistemu. A rješenje sistema će biti presječna tačka tih grafika funkcija.
Nastavnik: Kako ćemo predstaviti jednačinu kao linearnu funkciju?
Učenik: Linearnu funkciju s dvije nepoznate predstavljamo kao funkciju na način da jednačinu riješimo po

nepoznatoj y.
Nastavnik: Kako predstaviti grafik linearne funkcije u koordinatnom sistemu? Da li smo to već ranije radili?
Učenik: Da to smo već radili. A grafik funkcije ćemo predstaviti pomoću dvije tačke, sa grafika tih funkcija. Rješenje sistema će biti koordinate presječne tačke grafika obje funkcije, čije vrijednosti očitavamo na x-osi odnosno y-osi.

Korak 3.: Izvršavanje plana

$$x - 2y = 4 \implies -2y = 4 - x / : (-2) \ ,$$

$y = \frac{1}{2}x - 2$. Tablica ove funkcije je

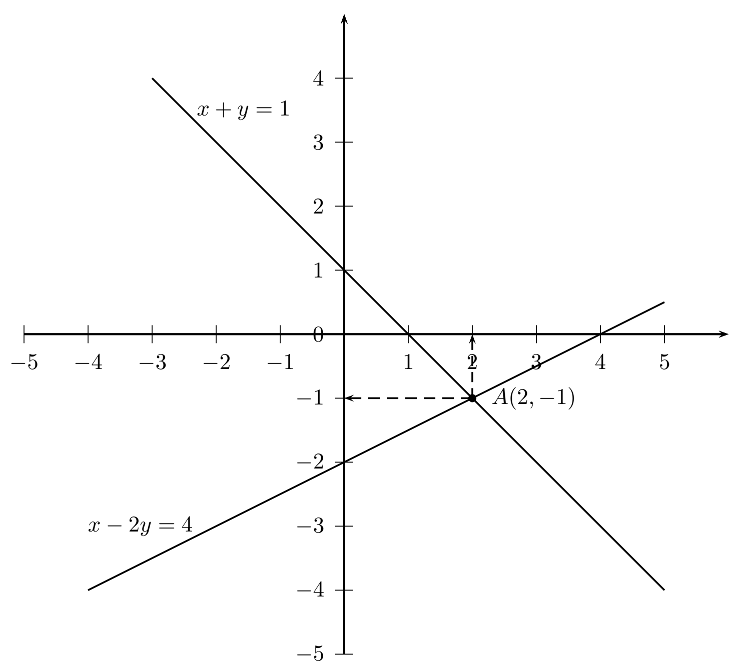
x	0	4
y	-2	0

$$x + y = 1 \implies y = 1 - x \ .$$

$y = -x + 1$. Tablica ove funkcije je

x	0	1
y	1	0

Nacrtajmo grafike ovih funkcija.



Slika 4: Grafik funkcija $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $y = -x + 1$.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Kako možemo provjeriti da li smo tačno uradili zadatak?
Učenik: Kako je rješenje jednačine onaj broj koji uvršten umjesto nepoznate veličine u jednačinu istu pretvori u tačnu jednakost, to će imati:

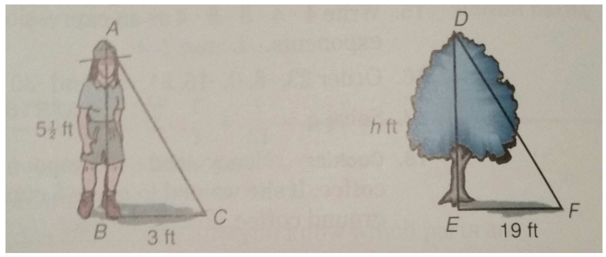
$$2 - 2 \cdot (-1) = 4 \implies 2 + 2 = 4 \implies 4 = 4 \ (T) \ ,$$

$$2 + (-1) = 1 \implies 2 - 1 = 1 \implies 1 = 1 \ (T) \ ,$$

Nastavnik: što znači da smo dobro napravili plan za izradu zadatka. □

Sedmi zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Proporcije.*

Primjer 3.7. *Čuvar parka je želio da procijeni visinu drveća koja su zasađena prije pet godina. U* 2 *sata poslije podne njegova sjena je bila duga* 3 *stope. Sjena drveća je bila* 19 *stopa duga. Ako je čuvar visok* 5, 5 *stopa, kolika je visina drveća?*



Slika 5: Čuvar parka

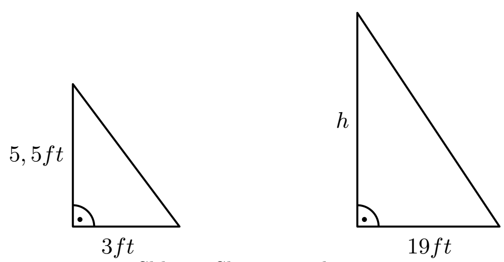
Rješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Pogledajmo skicu i popunimo je sa informacijama kako bi razumjeli naš problem.
Nastavnik: Šta trebamo izračunati sa skice?
Učenik: Potrebno je izračunati visinu drveća odnosno jednu katetu pravouglog trougla, označimo je sa h.

Korak 2.: Izradite plan

Nastavnik: Nacrtajmo dva pravougla trougla:



Slika 6: Slični trouglovi

Nastavnik: Kakvi su skicirani trouglovi?
Učenik: Ovi trouglovi su pravougli, a odakle imamo da su i slični.
Nastavnik: Kako se odnose odgovarajuće stranice sličnih trouglova?
Učenik: Odgovarajuće stranice sličnih trouglova su proporcionalne.
Nastavnik: Kako možemo, koristeći informacije sa skice, napisati proporciju?
Učenik:

$$\frac{SjenaCuvara}{SjenaDrveca} = \frac{VisinaCuvara}{VisinaDrveca} ,$$

Uvrstimo odgovarajuće vrijednosti za navedene veličine.

Korak 3.: Izvršavanje plana

Uvrštavajući veličine u proporciju imamo:

$$\frac{3}{19} = \frac{5\frac{1}{2}}{h} \implies 3h = 19 \cdot 5,5 ,$$

$$3h = 104\frac{1}{2} \implies h = 34\frac{5}{6} .$$

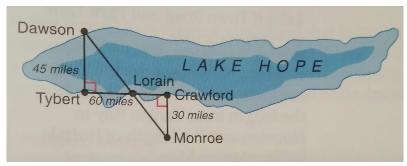
Drvo je visoko oko 35 stopa.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Ovaj zadatak se može primjenjivati za izračunavanje sličnih zadataka pri rješavanju zadataka iz sličnosti. □

Osmi zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Primjena sličnosti*.

Primjer 3.8. *Koristeći dijagram na slici ispod teksta, odrediti kolika je udaljenost od Tyberta do Crawforda?*



Slika 7: Lake Hope

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Kako možemo preformulisati ovaj zadatak?
Učenik: Odrediti udaljenost između Tyberta i Crawforda koristeći sličnost trouglova na slici?
Korak 2.: Izradite plan - Plan
Nastavnik: Kako možemo odrediti traženu udaljenost?
Učenik: Udaljenost između Tyberta i Crawforda možemo odrediti kao zbir udaljenosti od Tyberta do Loraina i od Loraina do Crawforda.
Nastavnik: Na slici vidimo dva trougla, možemo li ih iskoristiti za određivanje potrebnih veličina?
Učenik: Trouglovi na slici su slični pravougli trouglovi, pa možemo iskoristiti sličnost trouglova za određivanje udaljenosti.
Nastavnik: Neka prva slova naziva gradova predstavljaju vrhove trouglova. Tako da imamo slične trouglove $\triangle LTD \sim \triangle LCM$ i možemo postaviti proporciju na osnovu sličnosti trouglova, nepoznatu dužinu $|LC|$ označimo sa x.
Korak 3.: Izvršavanje plana
Učenik: Udaljenost između Tyberta i Crawforda je:

$$|TC| = |TL| + |LC| \ .$$

Napišimo proporciju:

$$\frac{|MC|}{|LC|} = \frac{|DT|}{|TL|} \implies \frac{30}{x} = \frac{45}{60} \implies x = \frac{30}{45} \cdot 60 \implies x = 40 \ .$$

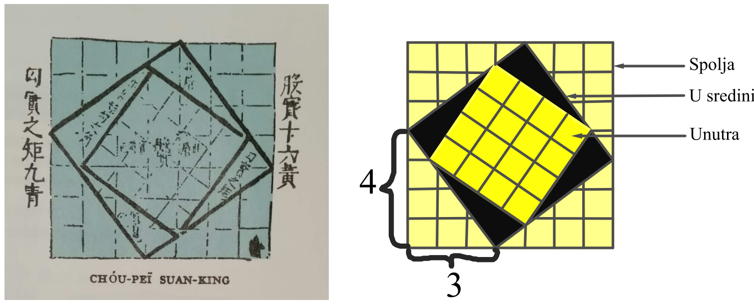
Sada možemo izračunati dužinu od Tyberta do Crawforda, kao:

$$|TCw = |TL| + |LC| = 60 + 40 = 100 \ ,$$

to jest udaljenost od Tyberta do Crawforda je 100 milja.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Procijenite rastojanje tako što ćete ga uporediti sa onima na karti. Da li se čini ta udaljenost razumnom. □

Deveti zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Primjena Pitagorine teoreme*.

Primjer 3.9. *Na slici je prikazana Kineska ilustracija pod nazivom CHÓU-PEI SUAN-KING. Pronađite ukupnu površinu četiri mala trougla na ilustraciji?*



Slika 8: Kineska ilustracija (lijevo) i skicirana ilustracija (desno)

Rješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Hajdemo prvo da precrtamo figuru i označimo šta je to unutra, u sredini i koji kvadrati su spolja.
Nastavnik: Šta treba da odredimo?
Učenik: Treba da odredimo površinu osjenčenih trouglova.

Korak 2.: Izradite plan

Nastavnik: Kako ćemo odrediti površinu osjenčenih trouglova?
Učenik: Da bi odredili površinu osjenčenih trouglova, moramo naći površinu kvadrata koji se nalazi u sredini i oduzeti površinu kvadrata koji se nalazi unutar tog kvadrata.

Korak 3.: Izvršavanje plana

Učenik: Kvadrat u sredini je konstruisan od hipotenuze trougla čije su katete 3 i 4. To je površina kvadrata ista kao i kvadrat hipotenuze:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 \ ,$$

$$c^2 = 9 + 16 = 25 \ .$$

Površina kvadrata je 25 kvadratnih jedinica mjere. Sada oduzimamo površinu kvadrata unutra, to je 4^2 ili 16 kvadratnih jednica mjere.
Ukupna površina četiri mala trougla je: $25 - 16 = 9$ kvadratnih jedinica mjere.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Procijenimo površinu svakog malog trougla brojanjem kvadrata. Onda pomnožimo sa 4 nađenu površinu i time ćemo dobiti ukupnu površinu, $2 \cdot 4 = 8$. Odgovor je razuman i približna je vrijednost onome što smo procijenili.
Pitagorina teorema koja je korištena u ovom zadatku može biti primijenjena u mnogim situacijama uključujući različita mjerenja. □

Literatura

[1] A. Hodžić, R. Onodi: *Matematika za 8. razred osnovne škole*, Ljiljan, Sarajevo, 1998.
[2] A. Huskić: *Zbirka zadataka za prvi razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo, 2006.
[3] A. Fako: *Matematika za 6. razred osnovne škole*, Ljiljan, Sarajevo, 1998.
[4] G. Polya: *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
[5] G. Polya: *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2003.
[6] V. Mujakić, D. Kovačević, Ž. Hamidović: *Moja Matematika - Radna sveska za treći razred devetogodišnje osnovne škole*, NAM Tuzla, 2015.
[7] W. Collins and Coo: *Mathematics - Applications and Connections*, Course 3, Glencoe/McGraw-Hill, Westerville Ohio, 1995.
[8] E. Mujkić: *Stereometrija u GeoGebri sa WEB prikazom*, Magistarski rad, Tuzla, 2018.
[9] *https://en.wikipedia.org/wiki/George_Polya, oktobar*2018.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 55–62

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina

Senada Mustafić[a]

[a] *JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla*

Sažetak: Geometrijske metode možemo koristiti kod objašnjavanja drugih oblasti matematike. U ovom radu su dati različiti geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina za dva pozitivna broja. Naglasak je na vizualizaciji, upotrebi tzv. "dokaza bez riječi" i razvijanju matematičkih sposobnosti učenika.

"Na velike se vrhunce ponekad može uspeti s različitih padina planine, no, one koji stignu na vrh, obasjava isto sunce."(Vladimir Devide)

1. Definicije brojevnih sredina

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine svakako je jedna od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Prvi pojmovi o brojevnim sredinama potiču još od pitagorejaca [1)].

Definicija 1.1. *Harmonijska sredina $H_n(a)$, geometrijska sredina $G_n(a)$, aritmetička sredina $A_n(a)$ i kvadratna sredina $K_n(a)$, pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ su definisane, redom, izrazima:*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \ ,$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \ ,$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ ,$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ .$$

Za dva proizvoljna pozitivna broja očito važi nejednakost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $a = b$. Sada imamo,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \implies a + b \geq 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ .$$

Time smo pokazali da je $A_2 \geq G_2$, odnosno da je aritmetička sredina dva pozitivna broja veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine. Općenito, važe sljedeće nejednakosti.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Email adresa: senada.mustafic@gmail.com (Senada Mustafić)

[1)] Pitagora, matematičar i filozof, (582 – 496. p.n.e.)

Teorem 1.2 (Nejednakost između brojevnih sredina). *Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada važi*

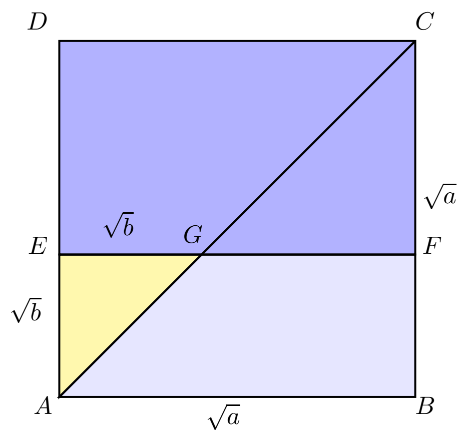
$$\min\{a_1, a_2, ..., a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \ ,$$

s jednakostima ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. Značaj vizualizacije u nastavi matematike

Stalnim posmatranjem svijeta oko sebe donosimo i odluke na osnovu toga što vidimo, tako da se korišćenje slike u dokazu pokazuje kao olakšavajući način za usvajanje i razumijevanje novih sadržaja većini učenika. Pri učenju i shvaćanju matematike vizualizacija može dati jasnije značenje matematičkim pojmovima i vezama između njih. Da bi se nastavno gradivo što lakše usvojilo i što duže pamtilo, potrebno je različite nastavne sadržaje što je moguće više povezivati. Jedan od načina na koji se to može vrlo lako ostvariti jest zadavanje istog zadatka unutar različitih nastavnih cjelina.

- ***Geometrijski dokaz AG nejednakosti***



Slika 1

Kvadrat $ABCD$ ima stranice dužine $\sqrt{a}$, a pravougaonik $ABFE$ ima stranice dužina $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$, $b \leq a$. Trougao $\triangle AGE$ je jednakokrako-pravougli, jer je $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AGE = 45°$, pa je (v. Sliku 1)

$$\sqrt{ab} = P_{ABFE} = P_{AGE} + P_{ABFG} \leq P_{AGE} + P_{ABC} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \ ,$$

a time je dokazana nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

- ***Geometrijski dokaz AG nejednakosti***

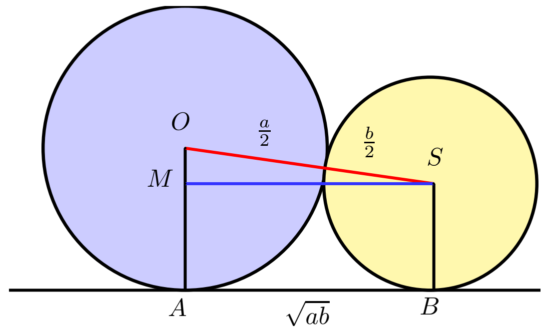
Neka su date kružnice sa središtima O i S i poluprečnicima $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ $(a \geq b)$, redom, koje se dodiruju spolja (v. Sliku 2). Neka je AB zajednička tangenta tih dviju kružnica. Tačke A i B su tačke dodira tangente i kružnica. Trapez $ABSO$ ima dva prava ugla pri tjemenima A i B. Neka je duž $\overline{SM}$ paralelna sa AB. Tada je $\triangle OMS$ pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$|MS|^2 = |OS|^2 - |OM|^2 \ ,$$

odnosno

$$|MS|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab \ ,$$

iz čega slijedi $|MS| = \sqrt{ab}$.



Slika 2

Kako je u pravouglom trouglu dužina hipotenuze veća od dužine katete, to važi $|OS| \geq |MS|$, to jest $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Jednakost važi kada je $a = b$.

- ***Analitički dokaz AG nejednakosti***:

René Descartes [2)] se prvi koristio pravouglim koordinatnim sistemom kako bi vizualizirao svoja opažanja i tako na veličanstven način povezao geometriju i algebru.
Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^x$. U pitanju je konveksna funkcija, što geometrijski znači da je grafik funkcije između dvije tačke na grafiku uvijek ispod tetive koja spaja te dvije tačke.
Na grafiku date eksponencijalne funkcije izaberimo dvije tačke sa koordinatama (x_1, e^{x_1}) i (x_2, e^{x_2}), te uvedimo oznake $e^{x_1} = a$ i $e^{x_2} = b$ (v. Sliku 3).
Jednačina prave kroz pomenute tačke glasi:

$$y - b = \frac{b-a}{x_2 - x_1}(x - x_2) \ .$$

Tačka te prave sa apscisom $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ima ordinatu $\dfrac{a+b}{2}$, a tačka s tom apscisom na grafiku eksponencijalne funkcije ima ordinatu

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{e^{x_1+x_2}} = \sqrt{e^{x_1}e^{x_2}} = \sqrt{ab} \ .$$

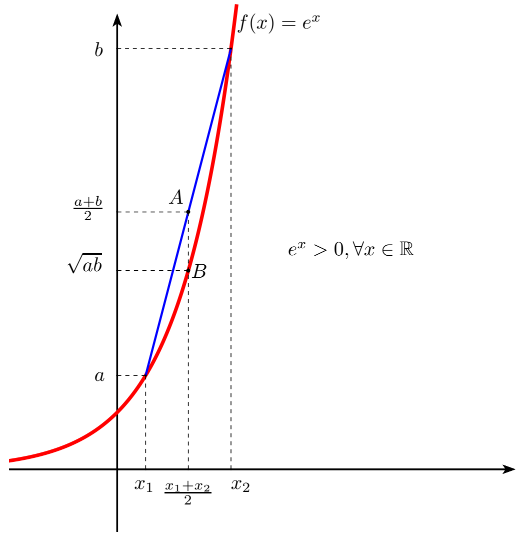
Posmatrana tačka grafika eksponencijalne funkcije $B\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \sqrt{ab}\right)$ je ispod tačke $A\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ na tetivi koju data prava gradi sa grafikom funkcije $f(x) = e^x$, tako da slijedi dobro poznata AG nejednakost:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ .$$

- ***Geometrijski dokaz između harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine***

Neka je data kružnica sa prečnikom $\overline{AB}$ dužine $b - a$ i središtem O. Tačka D nalazi se na pravoj kroz A i B tako da je $|AD| = b$ i tačka B je između tačaka A i D. Tada je $|BD| = a$ (v. Sliku 4).

[2)] René Descartes, francuski filozof i matematičar, (1596–1650).



Slika 3

Iz tačke D povučena je tangenta na kružnicu. Tačka T je dodirna tačka te tangente i kružnice. U pravouglom trouglu $\triangle OTD$ hipotenuza ima dužinu $|OD| = |AD| - |OA| = b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}$, a dužinu katete $|TD|$ možemo izračunati pomoću Pitagorinog teorema:

$$|TD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\ .$$

Budući da je dužina hipotenuze veća od dužine katete, vrijedi nejednakost $|OD| \geq |TD|$, to jest $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Inače, na Slici 4 pojavljuje se nejednakost još dviju sredina: kvadratne i harmonijske. Naime, kako je $\overline{CO}$ poluprečnik okomit na $\overline{AB}$, tada dužina hipotenuze $\overline{CD}$ iznosi

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$

Ovaj izraz je kvadratna sredina brojeva a i b. Nadalje, ako je N podnožje visine iz vrha T u pravouglom trouglu $\triangle OTD$, tada iz sličnosti trouglova $\triangle TND$ i $\triangle OTD$ slijedi $|ND| : |TD| = |TD| : |OD|$, to jest

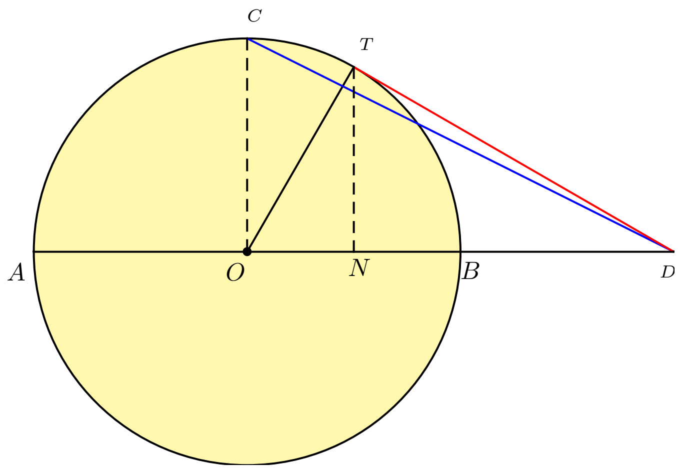
$$|ND| = \frac{|TD|^2}{|OD|}\ ,$$

odnoasno

$$|ND| = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ .$$

Ovaj izraz je harmonijska sredina brojeva a i b. Sa slike 4 uočavamo da je $|ND| < |TD| < |OD| < |CD|$, odnosno da važi,

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$



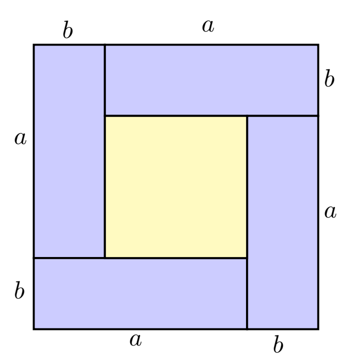
Slika 4

Ovim smo pokazali da zaista vrijedi:

$$H_2 < G_2 < A_2 < K_2.$$

- ***"Dokazi bez riječi"***

Jedan od načina kako podsticati vizualizaciju kod učenika je metoda "dokaz bez riječi". Na slikama je naznačena ideja i put dokaza, koji učenicima može poslužiti kao putokaz kako da sami dokažu tvrđenje. Učiti dokazivati znači učiti rasuđivati, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike, [5]. Članak pod naslovom "Two mathematical papers without words" objavljen je u Mathematical Magazine u septembru 1975. godine. Od 70-tih godina Mathematical Association of America počinje redovno objavljivati "dokaze bez riječi" u matematičkim časopisima. "Dokaz bez riječi" je vrijedan oblik učenja u matematici, posebno u podučavanju i pozitivno utiče na razvoj matematičkih sposobnosti kod učenika.
Primjer "dokaza bez riječi" nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je dat Slikom 5.

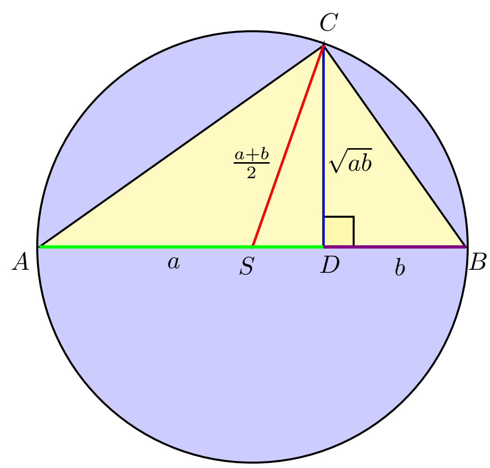


Slika 5: "Bez riječi"

Učenike na ovaj način podstičemo na istraživanje i logičko zaključivanje. Dokaz se lako izvodi uočavajući da veći kvadrat stranice $a + b$ ima površinu $(a + b)^2$, koja je očito veća od površine četiri pravougaonika sa stranicama a i b. Tada je,

$$(a+b)^2 \geq 4ab \implies a+b \geq 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ .$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je površina velikog kvadrata jednaka površini četiri pravougaonika, odnosno ako i samo ako kvadrat u sredini figure nestaje, a to se događa ako i samo ako je $a-b=0$.
Ova i slične geometrijske interpretacije važnih algebarskih identiteta i nejednakosti mogu se koristiti prilikom organizovanja grupnog oblika rada, sklapanjem dijelova slike od strane učenika u okviru grupe.
U sklopu nastavne jedinice "Sličnost trouglova" učenicima se može zadati da pažljivo prouče Sliku 6 i sami dokažu AG nejednakost.



Slika 6: "Bez riječi"

U savremeno doba, nove tehnologije nam pružaju mogućnosti da poboljšamo, obogatimo i unaprijedimo nastavu matematike. Koristeći interaktivne materijale i matematičke programe kao što je GeoGebra učenicima se nejednakosti između brojnih sredina mogu na lijep i zanimljiv način predstaviti kao dokaz bez riječi. Učenici imaju mogućnost da vide i sami ispitaju šta se dešava promjenom određenih veličina u samom zadatku, kao na primjer na Slici 6, pomjeranjem tačke D mijenjaju veličine duži a i b i posmatraju šta se dešava s odnosom između aritmetičke i geometrijske sredine.

3. Primjeri zadataka koji se mogu riješiti primjenom nejednakosti između brojevnih sredina

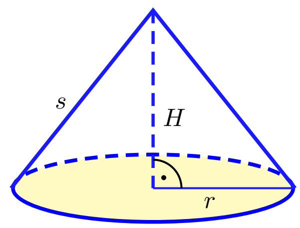
Primjer 3.1 (Federalno takmičenje 2006. OŠ VIII razred). *Zbir dužina prečnika baze i visine uspravne kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one kupe koja ima najveću zapreminu.*

Rješenje:
Uspravna kupa čiji je poluprečnik baze r i izvodnica s ima površinu $P = r\pi(r+s)$ (Slika 7).
Zapremina kupe poluprečnika baze r i visine H je $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$.
Koristeći AG nejednakost za tri pozitivna broja r,r i H, imamo

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{\pi}{3}r \cdot r \cdot H \leqslant \frac{\pi}{3}\left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72\pi \ .$$

Znak jednakosti vrijedi kada je $r = H = 6$, tj. u tom slučaju kupa ima najveću zapreminu. Njena izvodnica ima dužinu $s = \sqrt{r^2+H^2} = 6\sqrt{2}$, a njena površina iznosi

$$P = r\pi(r+s) = 36\pi(1+\sqrt{2}) \ .$$



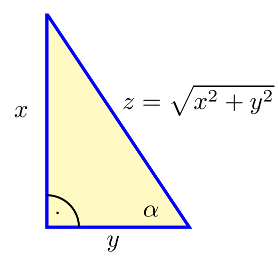
Slika 7: Kupa

□

Sljedeći zadatak spada u izoperimetrijske probleme (probleme koji se odnose na određivanje figure u ravni zadatog obima, a najveće moguće površine).

Primjer 3.2. *Između svih pravouglih trouglova čiji je obim jednak a, naći onaj čija je površina najveća.*

Rješenje: Neka su sa x i y označene dužine kateta datog pravouglog trougla (Slika8).



Slika 8: Pravougli trougao

Koristeći poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja x^2 i y^2, imamo

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \implies \frac{xy}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{4} \ .$$

Površina pravouglog trougla iznosi $P = \dfrac{xy}{2}$, pa zbog posljednje nejednakosti imamo da važi

$$P \leq \frac{x^2 + y^2}{4} \ .$$

Jednakost važi ako je $x = y$. Tada je $P_{max} = \dfrac{x^2}{2}$.

Obim datog pravouglog trougla iznosi $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = a$, pa uz uslov $x = y$, dobijamo $2x + x\sqrt{2} = a$, odnosno

$$x = y = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \ .$$

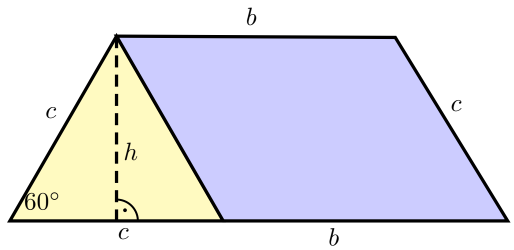
Dakle, riječ je o jednakokrako-pravouglom trouglu čije su katete $\dfrac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$, hipotenuza $a(\sqrt{2} - 1)$, dok maksimalna površina iznosi

$$P_{max} = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) \ .$$

□

Primjer 3.3 (Kantonalno takmičenje (TK) 2018. SŠ IV razred). *Od svih jednakokrakih trapeza kojima je ugao na osnovici* 60° *i čija je površina jednaka* $6\sqrt{3}$ *odrediti onaj koji ima minimalan obim.*

Rješenje: Neka su a i b veća i manja osnovica trapeza, h njegov visina, α ugao na osnovici, P površina i O obim trapeza (Slika 9).



Slika 9: Trapez

Kako je $\alpha = 60^\circ$, uočavanjem jednakostraničnog trougla na jednom kraku trapeza, dobijamo da je $a = b + c$ i $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$. Na osnovu toga zaključujemo da važi

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2b+c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c(2b+c)\sqrt{3}}{4} \ ,$$

$$\frac{c(2b+c)\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow 2c(2b+c) = 48 \ ,$$

$$O = a + b + 2c = (2b+c) + 2c \ .$$

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve $2b + c$ i $2c$, dobijamo

$$\frac{O}{2} = \frac{(2b+c)+2c}{2} \geq \sqrt{(2b+c)2c} = \sqrt{48} \ ,$$

odakle slijedi $O \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$.
Jednakost u prethodnoj nejednakosti se postiže u slučaju $2b + c = 2c$, odnosno $2b = c$. Dakle, minimalna vrijednost obima iznosi $8\sqrt{3}$. □

Na kantonalnim takmičenjima učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona održanim u zadnjih deset godina (od 2009.godine do 2018.godine) postavljeno je ukupno 176 zadataka ([8]). Od tih 176 zadataka u 12 se pojavljuju nejednakosti između brojevnih sredina, u procentima 6,8%.
Proučavanje nejednakosti i njihove primjene pružaju velike mogućnosti za razvoj matematičkih sposobnosti učenika, kao što su kritičko mišljenje, logičko zaključivanje, kreativnost, matematička intuicija, matematička imaginacija, fleksibilnost i predviđanje. Sama primjena nejednakosti zahtijeva dobro poznavanje matematike, bogatstvo ideja i različitih metoda za rješavanje problema.

Bibliografija

[1] Š. Arslanagić: *Nejednakosti između brojnih sredina i njihova primjena*, Udruženje matematičara BiH, Sarajevo 2000.
[2] Š. Arslanagić: *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o, Sarajevo, 2006.
[3] B. Dakić, N. Elezović : *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola*, 1. dio, Element d.o.o., Zagreb, 2014.
[4] B. Dakić, N. Elezović: *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola*, 2. dio, Element d.o.o., Zagreb, 2014.
[5] Z. Kurnik: *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola br. 10., 2000/2001.
[6] S. Mustafić: *Razvijanje matematičkih sposobnosti učenika različitim načinima dokazivanja nejednakosti*, Magistarski rad, PMF Tuzla, 2017.
[7] https://mis.element.hr/list/16/broj/55/clanak/775/bez-rijeci
[8] http://www.umtk.info/

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 63–67

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Iskustva iz nastavne prakse

Sofija Vlajin[a]

[a] *OŠ "Sveti Sava", Sremska Mitrovica*

Matematika, kako to lepo zvuči ...
Predrasuda je da su časovi matematike dosadni i neprijatni za učenike, da se učenici plaše namrgođenih i strogih profesora, da se sve aktivnosti učenika svode na prepisivanje sa table. Može to i drugačije!
Interaktivna tabla menja vaš pogled na čas matematike. Ako nemate ovakvu tablu, potrebno je malo truda, internet, laptop i projektor. Profesoru su danas na raspolaganju mnogobrojni nastavni materijali koji sadrže slike, ton, animacije. Ne morate sve sami da pravite. Hvala kolegama koji su njihove radove učinili dostupnim svima nama. Razmena iskustava je veoma korisna.
Profesor je sada u mogućnosti da časovima udahne živost, lepotu, boju, muziku, poneki film. Čas postaje dinamičan i estetski na veoma zavidnom nivou. Ono što ne sme da bude ni izostavljeno ni zanemareno je angažovanje učenika u svim aktivnostima ovako unapređenog časa. Učenici su najbolji putokaz kako da čas učinite drugačijim. Zadatak nastavnika je da saopšti informaciju, maksimalno angažuje učenike i održi pažnju fokusiranu na glavnu temu. Pratite aktivnosti i interesovanja učenika i usmerite način interpretacije gradiva u tom pravcu. Bićete iznenađeni koliko će vam učenici pomoći u realizaciji časa. Optimalan odnos aktivnosti - 60 % učenici, 40 % nastavnik.

Evo nekoliko ideja koje sam prikupila na internetu, od kolega, sa seminara, a neke sam i sama smislila. Najvažnije je da sam sve isprobala i skoro sve uvrstila u redovnu upotrebu na času.

Za uvežbavanje razlomaka i decimalnih brojeva mogu uspešno da posluže matematičke igrice. Učenici rado igraju igrice, a na sajtu **www.sheppardsoftware.com** može da se pronađe mnogo igrica sa različitim matematičkim sadržajem. Lepo dizajnirane, jarkih boja, igrice se veoma dopadaju učenicima. Kada se upoznaju sa igricom, predložite da ograniče vreme na 5 minuta i startuju. Stvoriće se prijatna, radno-borbena atmosfera uz poneki uzvik. Kada vreme istekne znaće se ko je bio najuspešniji. Niko se neće buniti, tako je pokazao računar. Obavezno pružite još jednu šansu za revanš. Ovakav čas sam uspešno realizovala i sa učenicima četvrtog razreda. Bilo je to na obostrano zadovoljstvo i učiteljice i učenika. Matematičke igrice su veoma zahvalne za uvežbavanje gradiva jer mogu da se podese na različite nivoe, brzinu, vremensko ograničenje. Učenik ide na viši nivo, kad savlada prethodni. Ovakav čas može da se realizuje samo u digitalnoj učionici.
Kada su razlomci u pitanju mogu da se koriste i lego kocke, kojih ima raznih veličina i boja.
Može da se izvede i jedan malo zahtevniji i skuplji čas. Učenici se podele u 2 grupe i dobiju recept za kolače (kuglice), prepun razlomaka i decimalnih brojeva. Svaka grupa treba da napravi kuglice po datom receptu. Na kraju se zadatak - pojede.
Kada dođe na red da se učenici upoznaju sa Dekartovim[1)] pravouglim koordinatnom sistemom, zanimljivo

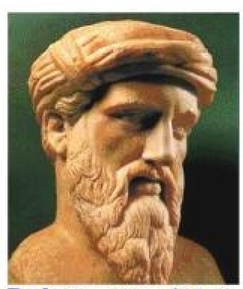
Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija:
Email adresa: zelenikutak@gmail.com (Sofija Vlajin)

[1)] René Descartes, francuski filozof i matematičar, (1596–1650).

je i vrlo efektno da prvo pogledaju film o Dekartu, u realizaciji obrazovnog programa RTS-a. Postoji serija filmova pod nazivom "*Iz života poznatih matematičara*",
www.youtube.com/watch?v=aOVKkhJuyMY ,
https://www.youtube.com/watch?v=XB_8kB5geD8 ,
https://www.youtube.com/watch?v=teVXn85fA5c .
Učenici na ovaj način upoznaju vreme u kome je živeo Dekart, prate njegov život od rođenja pa sve do smrti. Kroz film se provlače Dekartova otkrića i učenici mogu da shvate koliko su ona značajna.

Slika 1: René Descartes

Površina i obim kruga mogu mnogo bolje da se obrade i shvate uz animacije. Primer:
https://www.youtube.com/watch?v=TvA_C3MMlgc.
Na času, zadatak učenika treba da bude, da sami izračunaju koliko iznosi π. Učenici izrežu krug, izmere njegov obim i podele ga prečnikom. Iz nekoliko merenja izračunaju srednju dobijenu vrednost za π.
U saradnji sa profesorom muzičke kulture, učenici mogu da čuju kako π "zvuči" kada se odsvira na klaviru. Mogu i sami da probaju da ga odsviraju. A može i ovako
http://cudaprirode.com/portal/video/4633-evo-kako-broj-pi-zvui .
Na ovakav način, svirajući brojeve, učenici mogu da "čuju" razliku između konačnih i beskonačnih decimalnih brojeva, kao i da prepoznaju beskonačan periodičan decimalan broj. Pažljivim slušanjem veoma lako se uoče jedan ton ili grupa tonova koji se ponavljaju. Decimalni zarez predstavlja se kratkom pauzom.

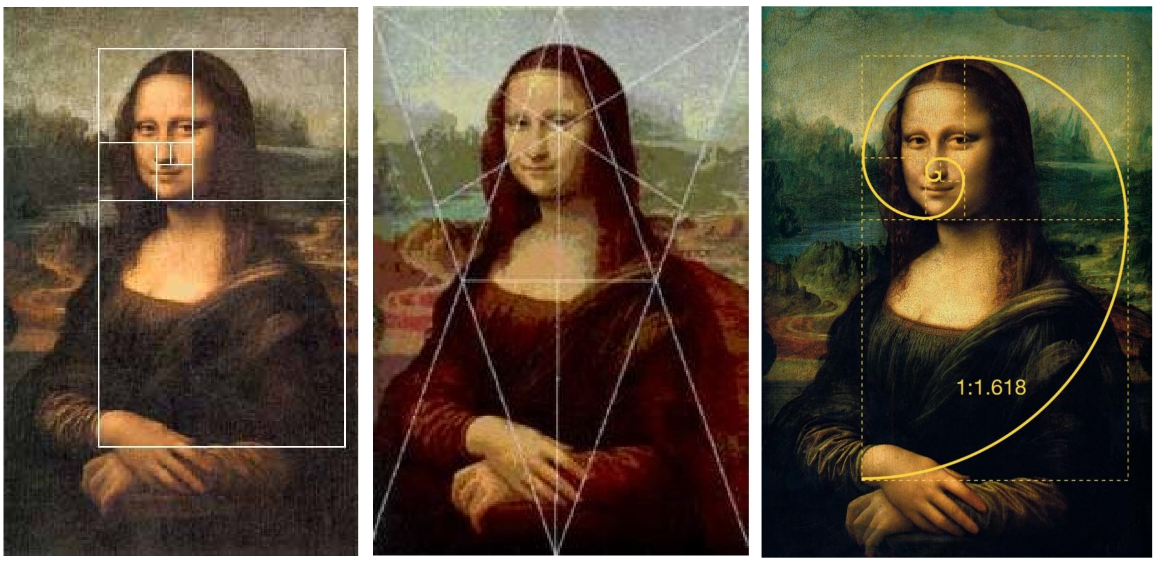


Slika 2: Pitagora

Slicnost pravouglih trouglova izmamiće vas u dvorište. Praktična primena - izračunavanje visine drveta pomoću njegove senke. Matematika ima svoje dragocenosti - Pitagorinu[2)] teoremu i zlatni presek. Vodeni

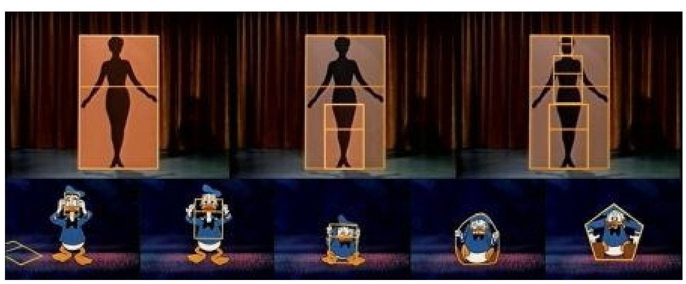
[2)]otok Sam, oko 582. - Mezopotamija oko 496. p.n.e.

dokaz Pitagorine teoreme upotpuniće sve animacije sa crtežima.
https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o
http://www.lugram.net/pitagorina_teorema.htm
http://www.slideshare.net/JocaArt/pitagorina-teorema-33726604?related=1 .
O Pitagori ima toliko materijala na internetu i učenicima je zadovoljstvo da sami pronalaze informacije. Posebno je zanimljiv Pitagorin privatan život. Čarobna proporcija - zlatni presek, nalazi se svuda oko nas, u umetnosti, prirodi, arhitekturi. Učenici na pravi način mogu da shvate zlatni presek i zlatni pravougaonik, samo ako vide fotografije gde je naglašena proporcija određenih dimenzija. Čuvena Mona Liza je veoma lep primer za to,



Slika 3: Mona Liza

kao i ljudsko telo.



Slika 4

Da bi učenici postali svesni da je matematika svuda oko nas, u tu svrhu najbolje će poslužiti crtani film Volta Diznija "*Donald u svetu matematike*". To je jedan od najboljih obrazovnih filmova koje je Dizni ikada napravio,
https://www.youtube.com/watch?v=EM9PjAORE84 .
Bićete prijatno iznenadeni pozitivnom reakcijom učenika. Crtani film traje oko 28 minuta.

A kada dođu na red Talesova teorema i piramide, nemojte učenicima uskratiti zadovoljstvo da pogledaju lepu prezentaciju "*Kako je Tales pobedio piramidu*",

Slika 5

http://www.slideshare.net/jvolarov/pr-ic-a-o-piramidi?qid=ebe0488e-1e0d-458c-86c8-84027a 141984&v=default&b=&from_search=5 .
Posmatrajući prezentaciju učenici shvate pravu veličinu egipatskih piramida i genijalnost Talesove ideje.

Da razmeru učinite zanimljivom, možete da prikažete primenu u geografiji, fizici i hemiji ili nešto što se učenicima više dopada. Upotrebite aplikaciju Google Maps i neka zadatak bude da svako izračuna udaljenost od kuće do škole. Tu se malo umeša i fizika, pa se sve lepo poveže i utvrdi gradivo.

Na internetu postoji mnogo dobrih on-line testova koje učenici mogu da rešavaju koristeći mobilni telefon. Većina učenika ima pametne telefone pa je rad u paru lako izvodljiv. Učenici slobodno koriste telefone na času za rešavanje testova, za pristup ezbirci, da fotografišu važne formule i crteže sa table i slicno. Na početku svake školske godine vrši se inicijalno on-line testiranje u digitalnoj učionici. Učenici odmah po završetku testa vide osvojen broj poena i komentar da li su prošli. Ova informacija prosledi se i na email adresu koju učenici unesu pre početka testiranja. Na ovaj način i roditelji mogu da vide njihove rezultate.

Na redovnim časovima možete uneti malo svežine i zanimljivosti ako teoreme napišete u šifrovanom obliku i upoznate učenike sa Polibijevim[3] kvadratom.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

Slika 6: Polibijev kvadrat

Učenici rado dešifruju poruke, ali i vrše šifrovanje.

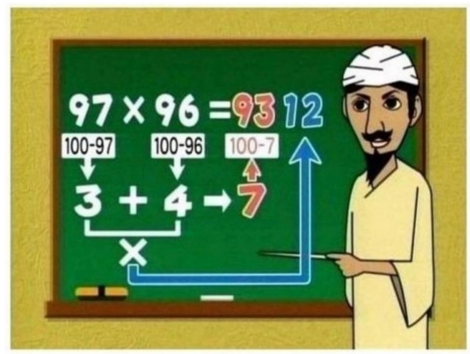
Već duže vreme pre obrade novog gradiva prvo gledamo film ili prezentacije učenika. Učenici dobrovoljno istražuju po nepoznatoj oblasti i drugovima predstavljaju svoje radove. Profesor prethodno daje uputstva šta mora da sadrži prezentacija. Prezentacije ne ocenjujem sumativno, pa je angažovanje učenika dragoceno jer ne rade za ocenu, već da bi stekli samopouzdanje, bili aktivni, zapaženi i naučili nešto novo. To je veoma značajna kvalitativna razlika. Nema efikasnijeg učenja od onoga kada nekog drugog učite to isto. Posle prezentacija učenika, pogledamo i neke druge prezentacije koje pronađemo na internetu.

Pozitivno je kada učenici mogu svoj rad da uporede sa nekim drugim radovima i analiziraju ih. Na časovima kada gledamo film ili prezentacije, ne koristimo sveske, samo se sluša, gleda i komentariše. Sledećeg časa učenici su sasvim spremni da prihvate novu lekciju. Informaciju učenici mogu da pronađu u udžbeniku,

[3] grčki: $\Pi o\lambda\upsilon\beta\iota o\zeta$, oko 203-120. godine p. n. e. grčki historičar

na internetu, nije im za to potreban nastavnik. Uloga nastavnika je da osposobi učenika da u moru informacija razlikuje važno od nevažnog, istakne najvažnije, to jest prepozna pravu i dragocenu informaciju. Na ovakvim časovima učenici vremenom steknu tu sposobnost i to je veoma značajna osobina.

Kad god je moguće treba istaći i na praktičnim primerima pokazati vezu matematike sa ostalim naukama i umetnostima. U svaki čas obavezno ubaciti malo istorije matematike, poneku zanimljivost, matematičku asocijaciju i slično.



Slika 7

U mojim e-učionicama posle obrade lekcije, postavljam link sa istom lekcijom sa sajta **www.oso.rs**. Time je omogućeno da učenici nekoliko puta mogu da poslušaju predavanje. Ovo je veoma korisno za učenike koji su bili odsutni sa predavanja.

Da bi časovi matematike bili prijatni i pristupačni učenicima, koristim sve što i oni koriste. Matematičke igrice, animacije, filmove, prezentacije, aplikacije i slično. Poželjno je da profesor ima i e-učionicu, pa sve linkove postavi na zidu i omogući svim učenicima jednostavan pregled. Odlazak u digitalnu učionicu, optimalno jednom nedeljno. Škola u kojoj radim omogućila je internet u mom kabinetu, na raspolaganju imam laptop i projektor, a upotrebu digitalne učionice sredom i petkom. Interaktivna tabla je takođe u digitalnoj učionici.

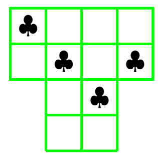
Matematika, kako to lepo zvuči ... .

2

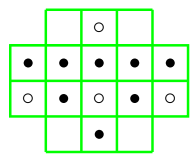
KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

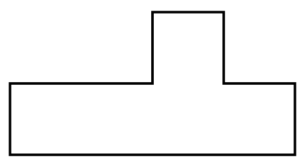
Zadatak 1. *Figuru na slici podijeliti na četiri jednaka dijela, tako da u svakom od tih dijelova bude po jedna djetelina.*



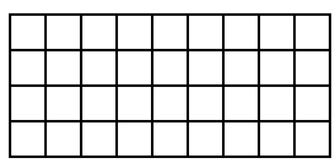
Zadatak 2. *Figuru na slici podijeliti na četiri jednaka dijela, tako da u svakom od tih dijelova bude po jedan prazni i dva puna kružića.*



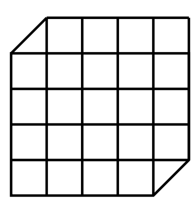
Zadatak 3. *Figuru na slici podijeliti na tri dijela (sa dva sječenja) od kojih se može složiti kvadrat!*



Zadatak 4. *Figuru na slici podijeliti na dva dijela od kojih se može složiti kvadrat!*



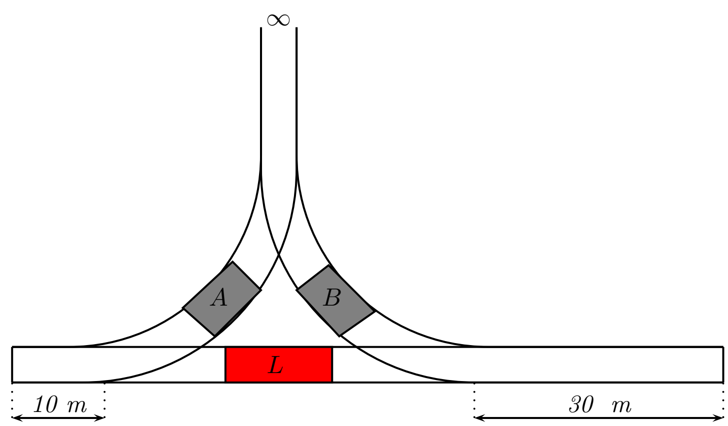
Zadatak 5. *Figuru na slici podijeliti na dva dijela od kojih se može složiti pravougaonik veličine* 6×4*!*



Ciljna skupina: svi uzrasti

Nagradni zadatak: Problem kretanja

Zadatak 1. *U željezničkim čvorištima česte su potrebe za manevrisanjem i premještanjem vagona i lokomotiva, da bi se formirale kompozicije vozova za razne potrebe. Na narednoj slici je prikazana jedna takva situacija. Sistem pruga ima oblik "trougla", ali su ograničenja u dužinama "slijepih" krajeva pruga. U lijevom "tjemenu" imamo slijepi dio dugačak* $10\ m$*, u desnom "tjemenu" slijepi dio je dugačak "30 m", a u gornjem dijelu "trougla" nema ograničenja u dužini. Na dvije pruge su postavljeni vagoni* A *i* B*, a na trećoj se nalazi lokomotiva* L*. Dužina lokomotive je* $20\ m$*, a dužine vagona su jednake i iznose* $10\ m$*. Mašinovođa treba izvršiti zamjenu mjesta vagonima i vratiti lokomotivu na početni položaj. Kako će to mašinovođa uraditi?*



Za nagradni zadatak iz prošlog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni zadatak.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2019. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno prigodnom nagradom

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 71–72

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 11 (*). *U izrazu* $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 7$ *zamijeniti* $*$ *sa* $+$ *ili* $-$ *tako da je lijeva strana jednakosti jednaka desnoj.*

Zadatak 12 (*). *Nana je napravila pekmez od jabuka. Pekmez je upakovala u* 2 *tegle od* 2 *litra,* 3 *tegle od* 3 *litra,* 4 *tegle od* 4 *litra i* 5 *tegli od* 5 *litara. Ove tegle želi rasporediti na dvije police tako da na svakoj polici bude jednak broj tegli i da broj litara pekmeza na obje police jednak.*

Zadatak 13 (*). *Napišite* 7 *susjednih prirodnih brojeva za čije pisanje je potrebno upotrijebiti* 17 *cifara.*

Zadatak 14. *Pet dječaka Muharem, Predrag, Rasim, Samir i Vejsil stoje u vrsti. Poznato je da:*

- *Predrag i Vejsil ne stoje jedan do drugog,*
- *Milorad i Predrag ne stoje jedan do drugog,*
- *Rasim i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Samir i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Vejsil i Samir ne stoje jedan do drugog,*
- *Predrag stoji desno u odnosu na Milorada.*

U kom poredku stoje dječaci?

Zadatak 15. *Pokažite da se od brojeva* $1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10$ *može sastaviti* 5 *razlomaka (treba upotrijebiti svih deset brojeva) tako da je suma ovih* 5 *razlomaka cio broj.*

Zadatak 16. *Na svakoj strani kocke napisan je tačno po jedan od sljedećih brojeva:* $8, 9, 10, 12, 13, 19$. *Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na četiri bočne strane je bio* 43, *a pri drugom bacanju kocke zbir je bio* 40. *Odredite koji je broj napisan na stranici kocke koji je suprotan broju* 19.

Zadatak 17. *U dvije posude raspoređeno je* 60 *klikera, tako da je u prvu posudu stavljeno* 35, *a u drugu posudu* 25. *Dvojica igrača, Haso i Huso, naizmjenično odabiraju jednu posudu i iz nje uzimaju koliko žele klikera. Pobjeđuje onaj igrač nakon čijeg poteza su obje posude prazne. Koji igrač podjeđuje pri pravilnoj igri. Odgovor obrazložiti.*

Zadatak 18. *Na stranici* BC *trougla* ABC *izabrana je tačka* F. *Duž* AF *siječe težišnu liniju* BD *u tački* E *tako da je* $|AE| = |BC|$. *Dokazati da je* $|BF| = |FE|$.

Zadatak 19. *Dokazati da se svaki trougao može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao, a da se pritom od ova tri mnogougla može složiti pravougaonik.*

Zadatak 20. *Koliko se četverocifrenih brojeva sa različitim ciframa može obrazovati od cifara:* $0, 1, 2, 4, 5, 7$ *tako da su djeljivi sa* 4?

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola
Zadaci označeni sa **(*)** su primjereni za najmlađi uzrast (4. i 5. razred)
Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 15.04.2019. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 11. *Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{19} + x^{18} + 1$, *polinomom* $g(x) = x^2 - 1$.

Zadatak 12. *U skupu* $\mathbb{Z}$ *riješiti jednačinu* $x^2 - y^2 = 2018$.

Zadatak 13. *Odrediti interval za* x *u kome je funkcija*

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x + 34 - 12\sqrt{x-2}}\ ,$$

konstantna.

Zadatak 14. *Odrediti sumu datog izraza:*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 \quad , \quad x \neq \pm 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Zadatak 15. *Riješiti jednačinu:*

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}\ .$$

Zadatak 16. *Na hipotenuzi* AB *pravouglog trougla* $\triangle ABC$ *date su tačke* D *i* E *takve da je* $|AE| = |AC|$ *i* $|BD| = |BC|$. *Izračunati* $\angle DCE$.

Zadatak 17. *Ako je* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ *i* $a_i > -\frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *tada je*

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \cdots + \sqrt{4a_n + 1} < n + 2\ .$$

Dokazati!

Zadatak 18. *Ako je* $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$, *gdje su* a *i* b *istog predznaka,* $a \neq 0$ *i* $b \neq 0$, *dokazati da je*

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}\ .$$

Zadatak 19. *Tačke* P *i* R *su redom središta stranica* AB *i* CD *konveksnog četverougla* $ABCD$. *Duži* BR *i* CP *se sijeku u tački* Q, *a duži* AR *i* PD *u tački* S. *Dokazati da je*

$$P_{\square PQRS} = P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC}\ .$$

Zadatak 20. *Uglovi trougla čine aritmetički niz. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa jednak* $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 73–85

Rješenja konkursnih zadataka 1 − 10

Osnovna škola

Zadatak 1 (*). *Odrediti nepoznate decimalne cifre* a, b, c *i* d *tako da vrijedi*

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 2 & 5 & a \\ & 4 & 1 & b & 2 \\ + & 5 & c & 9 & 3 \\ \hline 1 & d & 1 & 8 & 1. \end{array}$$

Rješenje: Posljednja cifra zbira $a+5$ je 1, što znači da zbir mora biti 11, odakle je $a = 6$. Pri tome imamo prenos 1 na zbir cifara desetica, pa se zbir $b + 15$ završava cifrom 8, što znači da je zbir 18, odakle je $b = 3$. I opet imamo prenos 1 na zbir cifara stotica. Posljednja cifra zbira $c + 4$ je 1, dakle, zbir je 11 te je $c = 7$ i imamo prenos 1 na zbir cifara hiljada. Konačno je $d = 3$ kao zadnja cifra zbira $1 + 3 + 4 + 5$. □

Buljubašić Tarik, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 2 (*). *Zbir dva broja je* 2016*. Ako prvi broj povećamo za* 57*, a drugi umanjimo za* 57 *dobijeni brojevi biće jednaki. O kojim brojevima je riječ.*

Rješenje: Neka su a i b traženi brojevi. Tada je $a+b = 2016$. Prema uslovu zadatka vrijedi $a+57 = b-57$. Tada je $(a+57)+(b-57) = a+b = 2016$. Kako su brojevi $a+57$ i $b-57$ jednaki i njihov zbir je 2016, to je svaki od njih polovina broja 2016. Dakle, $a + 57 = 1008$ i $b - 57 = 1008$. Tako imamo $a = 951$ i $b = 1065$. □

Zadatak 3 (*). *Esma je željela kupiti jednu knjigu čija je cijena* 23 *KM. Imala je samo novčanice od po* 5 *KM, a prodavačica je imala samo novčanice od* 2 *KM. Kako se može izvršiti plaćanje knjige.*

Rješenje: Kako je $4 \cdot 5 < 23 < 5 \cdot 5$ i $25 - 2 = 23$, to će Esma prodavačici dati 5 novčanica od $5KM$, a ona će njoj vratiti kusur od $2KM$. □

Redigirano prema rješenju: Esma Pita, 2r, "OŠ S.S. Kranjčević" Sarajevo

Zadatak 4. *Odrediti ugao* α *koji je za* 35^0 *veći od četvrtine svog suplementnog ugla.*

Rješenje: Uglovi α i $180^0 - \alpha$ su suplementni uglovi. Prema uslovu zadatka je $\alpha - \dfrac{180^0 - \alpha}{4} = 35^0$, odnosno $4\alpha - 180^0 + \alpha = 140^0$. Odavde se lahko nalazi da je $\alpha = 64^0$. □

Enver Duraković, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 5. *Odrediti najveći prirodan broj, koji pri dijeljenju sa* 15 *ima količnik jednak petostrukom ostatku.*

Rješenje: Ako je traženi broj n a ostatak dijeljenja a, tada je prema uslovima zadatka $n = 15 \cdot 5a + a = 76a$. Najveća vrijednost za n se dostiže kada ostatak a dostiže svoju najveću vrijednost. Ta najveća vrijednost je 14, pa je $n = 76 \cdot 14 = 1064$. □

Mešanović Nejra, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Ciljna skupina: Osnovna škola

Zadatak 6. *Nebojša, Bakir i Željko čitaju "Večernji list", "Oslobođenje" i "Nezavisne novine" i to svaki čita samo jedne od ovih novina. Na pitanje, ko od njih čita koje novine njihov prijatelj Jakob je odgovorio: Koliko se ja sjećam, Nebojša je čitao "Večernji list", Bakir nije čitao "Oslobođenje", a Željko nije čitao "Večernji list." Dervo je slušao ovaj razgovor, pa je rekao da je odgovor Jakoba tačan samo za jednog čitaoca. Koje novine čitaju Nebojša, Bakir i Željko?*

Rješenje: Prema tekstu zadatka samo je jedna izjava Jakoba tačna, a druge dvije nisu. Ispitatćemo koja je njegova izjava tačna.
Ako je prva izjava tačna, onda su druge dvije netačne. Iz prve izjave slijedi da je Nebojša čitao Večernji list. Tada iz netačnosti treće izjave slijedi da je i Željko čitao Večernji list. Tako smo dobili da su Nebojša i Željko čitali isti list, što je u suprotnosti sa tekstom zadatka.
Ako je druga izjava tačna. onda su prva i druga netačne izjave. Zbog toga Nebojša nije čitao Večernji list, Bakir nije čitao Oslobo đenje i Željko je čitao večernji list. Prema tome, Bakir je čitao Nezavisne novine, Nebojša Osobođenje i Željko Večernji list.
Ako je Jakobova treća izjava tačna, onda su njegove prve dvije izjave netačne. To znači da Nebojša nije čitao Večernji list, Bakir je čitao Oslobođenje i Željko nije čitao Večernji list. Dakle, ni jedan od njih nije čitao Večernji list, što je u suprotnosti sa pretpostavkom zadatka. Zaključujemo da treća izjava Jakoba nije tačna. □

Zadatak 7. *Trougao $\triangle ABC$ je pravougli trougao sa pravim uglom pri tjemenu C. Neka je AD $(D \in BC)$ simetrala ugla $\measuredangle CAB$. Ako je $|CD| = 1,5cm$ i $|BD| = 2,5$ cm, izračunati $|AC|$.*

Rješenje: 1

Znamo da simetrala ugla dijeli suprotnu stranicu trougla u omjeru dužina stranica koje obrazuju ugao, to jest vrijedi

$$|AC| : |AB| = |CD| : |BD| = 2,5 : 1,5 \ ,$$

odakle slijedi da je $|AB| = \dfrac{5}{3}|AC|$, odnosno: $c = \dfrac{5}{3}b$. Na osnovu Pitagorinog teorema iz trougla $\triangle ABC$ slijedi

$$b^2 + 4^2 = \left(\frac{5}{3}b\right)^2 \ ,$$

to jest $16b^2 = 144$, odakle je $b = 3$.

Džejla Hankušić, 8r, OŠ "Malešići" Malešići

Rješenje: 2

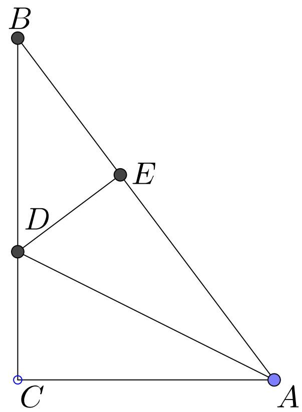
Iz tačke D povucimo normalu DE na hipotenuzu AB (Vidi Sliku 1). Posmatrajmo pravougle trouglove $\triangle DCE$ i $\triangle DEA$. Oni su podudarni jer je $|AD| = |AD|$, $\measuredangle ACD = \measuredangle AED = 90^0$ i $\measuredangle CAD = \measuredangle EAD$. Iz ove podudarnosti slijedi $|AE| = |AC| = b$ i $|DE| = |DC| = 1,5$, a iz pravouglog trougla $\triangle BDE$, na osnovu Pitagorinog teorema, imamo

$$|BE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4 \ ,$$

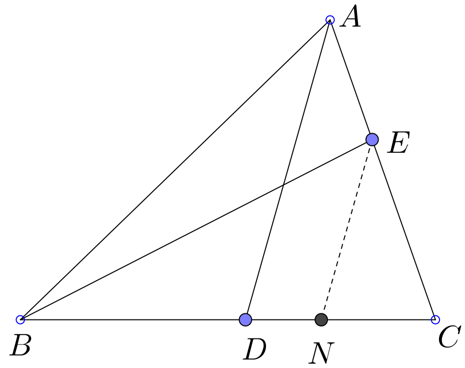
to jest $|BE| = 2$. Kako je $a = |BC| = 1,5 + 2,5 = 4$ i $c = |AB| = |AE| + |BE| = b + 2$, to na osnovu Pitagorinog teorema iz trougla $\triangle ABC$ slijedi

$$(b+2)^2 = b^2 + 4^2 \ .$$

Odavde je $b = 3$ i $c = 5$. □



$Slika1$



$Slika2$

Zadatak 8. *U trouglu $\triangle ABC$, tačke D i E su na stranicama BC i CA respektivno. Poznato je da vrijedi $BD : DC = 3 : 2$, $AE : EC = 3 : 4$. Neka se duži $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku u tački M. Ako je površina trougla jednaka 1, odrediti površinu trougla $\triangle BMD$.*

Rješenje: Prema uslovu zadatka vrijedi $P_{\Delta ABC} = 1$, $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4}$, $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{3}{2}$ (Slika 2). Odavde slijedi $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7}$, $\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{4}{7}$. Trouglovi $\triangle ABE$ i $\triangle ABC$ imaju jedake visine iz tjemena A, pa se njihove površine odnose kao osnovice, to jest

$$\frac{P_{\Delta ABE}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7} \; .$$

Odavde slijedi $P_{\Delta ABE} = \frac{3}{7}$. Analogno nalazimo $P_{\Delta BEC} = \frac{3}{7}$.

Iz tačke E povucimo pravu paralelnu sa AD. Neka ova prava diječe BC u tački N. Na osnovu Talesovog teorema imamo

$$\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{4} \; .$$

Dakle, $|DN| = \frac{3}{4}|NC|$. Nadalje, imamo $|BN| = |BD| + |NC|$, $|DC| = |DN| + |NC| = \frac{7}{4}|NC|$. S druge strane je $|BD| = \frac{3}{2}|DC| = \frac{21}{8}|NC|$. Tako imamo $|BN| = \frac{21}{8}|NC| + |NC| = \frac{27}{8}|NC|$.

Trouglovi $\triangle BNE$ i $\triangle NCE$ imaju jednake visine iz tjemena E, pa se njihove površine odnose kao odgovarajuće osnovice, tj. vrijedi

$$\frac{P_{\Delta BNE}}{P_{\Delta NCE}} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{27}{8} \; ,$$

to jest $P_{\Delta BNE} = \frac{27}{8}P_{\Delta NCE}$. Na osnovu toga imamo

$$\frac{4}{7} = P_{\Delta BEC} = P_{\Delta BNE} + P_{\Delta NCE} = \frac{35}{27}P_{\Delta BNE} \; ,$$

to jest

$$P_{\Delta BNE} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{35} = \frac{108}{5 \cdot 49} \; .$$

Trouglovi $\triangle BDM$ i $\triangle BNE$ imaju jedan zajednički ugao sa tjemenom B, pa se njihove površine odnose kao proizvodi stranica na zajedničkim kracima, to jest

$$\frac{P_{\triangle BDM}}{P_{\triangle BNE}} = \frac{BD \cdot BM}{BN \cdot BE} \ .$$

Odavde imamo

$$P_{\triangle BDM} = \frac{|BD|}{|BN|} \cdot \frac{|BM|}{|BE|} \cdot P_{\triangle BNE} = \frac{|BD|}{|BN|} \cdot \frac{|BM|}{|BE|} \cdot \frac{108}{5 \cdot 49} \ .$$

Na osnovu Talesovog teorema imamo

$$\frac{|BM|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|BN|} = \frac{\frac{21}{8}|NC|}{\frac{27}{8}|NC|} = \frac{7}{9} \ .$$

Konačno je

$$P_{\triangle BDM} = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{108}{5 \cdot 49} = \frac{4}{15} \ .$$

□

Zadatak 9. *Izračunati vrijednost izraza*

$$(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\cdots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \ .$$

Rješenje: Stavimo $w = (2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$. Imamo

$$\begin{aligned}
w &= (2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \underbrace{(2-1)(2+1)}_{(2^2-1)}\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \underbrace{\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)}_{=(2^4-1)}\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&\vdots \left(2^{2^{10}}-1\right)\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \left(2^{2^{10}}\right)^2-1+1 = 2^{2^{11}} \ .
\end{aligned}$$

□

Duraković Aida, 9r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 10. *Nekom dvocifrenom broju doda se zbir njegovih cifara, a zatim se sa dobijenim brojem izvrši ista operacija. Na ovaj način dobija se dvocifreni broj koji ima iste cife kao početni broj, ali u obrnutom poretku. Odrediti brojeve koji imaju ovu osobinu.*

Rješenje: 1

Neka broj $A = 10a + b$ ima traženu osobinu. Stavimo $B = A + a + b = 10c + d$ i $C = B + c + d$. Tada, prema uslovu zadatka, vrijedi $C = 10b + a$. Prema načinu formiranja brojeva A, B i C vrijedi $A < B < C$. Nadalje, imamo

$$C - A = 10b + a - (10a + b) = 9b - 9a = 9(b - a) > 0 \ ,$$

pa je $a < b$ i broj $C - A$ je djeljiv brojem 9. To znači da brojevi A i C pri djeljenju sa 9 imaju isti ostatak. Neka je $A = 9x + r$, $C = 9y + r$, pri čemu je $0 \le r < 9$. S druge strane je $A = 10a + b = 9a + (a + b)$, to jest $a + b = A - 9a = 9x + r - 9a = 9(x - a) + r$. To znači da brojevi $A, a + b$ i C imaju isti ostatak pri djeljenju sa 9. Ispitajmo koji je ostatak djeljenja broja B brojem 9. Imamo

$$B = A + (a + b) = 9x + r + 9(x - a) + r = 9(2x - a) + 2r\ .$$

Analogno, iz $C = B+(c+d)$ slijedi da broj C ima dva puta veći ostatak pri djeljenju sa 9 nego broj B. Prema tome, imamo $C = 9q+4r$. Kako je $C = 9y+r$, to je $9q+4r = 9y+r$, pa je $3r = 9(y-q)$. Dakle, $r = 3(y-q)$. Razlika $C-A = 9(b-a)$ je prirodan broj i ona predstavlja zbir brojeva $a+b$ i $c+d$. Oba ova broja su djeljiva sa 3 i $a < b$, pa je $3 \le a + b \le 15$ i $3 \le c + d \le 18$. Dakle, $9 \le 9(b - a) = C - A = (a + b) + (c + d) \le 33$, pa je $1 \le b - a \le 3$. Dvocifreni brojevi djeljivi sa 3 čije cifre zadovoljavaju uslov $a + 1 \le b \le a + 3$ su:

$$12, 24, 36, 45, 57, 69, 78\ .$$

Direktnom provjerom nalazimo da beojevi 12 i 69 ispunjavaju traženi uslov.

Rješenje: 2

Neka su A, B i C kao u prvom rješenju. Tada je $11a + 2b = 10c + d$ i $11c + 2d = 10b + a$. Odavde nalazimo

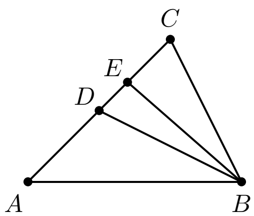
$$\begin{aligned} c &= \frac{7a - 2b}{3} = 2a - b + \frac{a + b}{3} \\ d &= \frac{-37a + 26b}{3} - 12a + 9b - \frac{a + b}{3}. \end{aligned}$$

Kako su c i d cifre, to 3 dijeli $a + b$, pa je $a + b = 3t$. Kako je $a < b$, to je $a + b \le 15$, pa je $t = 1, 2, 3, 4, 5$.
Ako je $t = 1$, onda je $c = 3a - 2$ i $d = 26 - 21a$. Obje jednakosti su zadovoljene za $a = 1$. Tada je $b = 2$, pa je $A = 12$.
Ako je $t = 5$, onda je $b = 15 - a$, $c = 3a - 10$ i $d = 130 - 21a$. Jedino za $a = 6$, c i d su decimalne cifre. Tada je $b = 15 - 6 = 9$, pa je traženi broj $A = 69$.
Za ostale vrijednosti parametra t brojevi c i d nisu decimalne cifre. $\square$

Srednja škola

Zadatak 1. *U $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C - \sphericalangle A = 60^\circ$, BD je simetrala ugla $\sphericalangle B$, $D \in AC$ i BE je visina $E \in AC$. Izračunati $|DE|$ ako je $|BD| = 10$ cm.*

Rješenje:



Iz pretpostavki zadatka imamo da je $\sphericalangle C - \sphericalangle A = 60^\circ$ i $\sphericalangle DBA = \frac{\sphericalangle B}{2}$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
&\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ \\
\Longrightarrow &\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle A + 60^\circ = 180^\circ \\
\Longrightarrow &2\sphericalangle A + \sphericalangle B = 120^\circ \\
\Longrightarrow &\sphericalangle A + \frac{\sphericalangle B}{2} = 60^\circ \ .
\end{aligned}
$$

Iz trougla $\triangle ADB$ slijedi da je $\sphericalangle A + \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2} = 180^\circ$, odakle je onda $\sphericalangle ADB = 120^\circ$, a dalje zaključujemo da je $\sphericalangle EDB = 60^\circ$ i $\sphericalangle DBE = 30^\circ$.
Trougao $\triangle EDB$ je pravougli čija je hipotenuza $|DB| = 10$ *cm*, pa zbog uglova tog trougla (30° i 60°) zaključujemo da je $|ED| = \frac{10}{2} = 5$ *cm*. □

Fazlić Amina, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 2. *Za koje vrijednosti a i b je $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$?*

Rješenje: Jednakost $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$ možemo zapisati sa $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{1}{2} + 1 = 0$. Ovo je ekvivalentno sa $a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} + b - 2\sqrt{b} + 1 = 0$, a ovo opet možemo zapisati u obliku

$$\left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - 1\right)^2 = 0 \ .$$

Kako je lijeva strana posljednje jednakosti zbir kvadrata, a to treba biti jednako 0, oba sabirka lijeve strane moraju biti jednaka 0, to jest

$$\left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0 \quad \text{i} \quad \left(\sqrt{b} - 1\right)^2 = 0 \ .$$

Dakle,

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad b = 1 \ .$$

□

Ćulah Arman, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 3. *Polinom* $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ *je kvadrat drugog polinoma, gdje su* a *i* b *realni brojevi. Odrediti drugi polinom i realne brijeve* a *i* b.

Rješenje: Neka je polinom $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ kvadrat nekog polinoma $Q(x)$, to jest $P(x) = Q(x)^2$. Kako je $P(x)$ polinom četvrtog stepena, to polinom $Q(x)$ mora biti polinom drugog stepena, pa ga možemo zapisati sa

$$Q(x) = \pm(x^2 + mx + n) \ .$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(x) = Q(x)^2 = (x^2 + mx + n)^2 &= x^4 + m^2x^2 + n^2 + 2x^2mx + 2x^2n + 2mxn \\ &= x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2 \\ &= x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b \ . \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da moraju vrijediti sljedeće jednakosti;

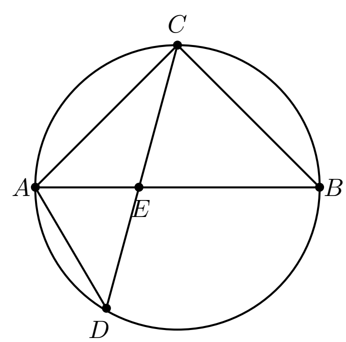
$$2m = 2 \ , \ m^2 + 2n = a \ , \ 2mn = 2 \ , \ n^2 = b \ .$$

Dakle, $m = 1$, $n = 1$, $a = 3$ i $b = 1$, pa je traženi polinom $Q(x) = \pm(x^2 + x + 1)$. □

Rakovac Kanita, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 4. *Tetive* $\overline{AB}$ *i* $\overline{AC}$ *kruga* k *su jednake, a tetiva* $\overline{AD}$ *siječe* $\overline{BC}$ *u tački* E. *Ako je* $|AC| = 12$ *i* $|AE| = 8$, *izračunati* $|AD|$.

Rješenje:



Vrijedi $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA$ jer su uglovi nad istom tetivom. $\triangle BCA$ je jednakokrak pa je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$. Trouglovi $\triangle BEA$ i $\triangle DBA$ su slični jer imaju zajednički ugao $\sphericalangle BAD$ i jednake uglove $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABC$. Prema tome, vrijedi

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AD|} \implies |AD| = \frac{|AB|^2}{|AE|} = \frac{144}{8} = 18 \ .$$

Dakle, $|AD| = 18$. □

Osmić Asja, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 5. *Koji dvocifreni brojevi* $10x + y$ *zadovoljavaju uslov* $10x + y = x^2 + y^2 + xy$?

Rješenje: Uslov se može zapisati na sljedeći način:

$$x^2 + x(y - 10) + y^2 - y = 0 \ .$$

Riješimo ovo kao kvadratnu jednačinu po x:

$$x_{1,2}=\frac{10-y\pm\sqrt{(10-y)^2-4y^2+4y}}{2}=\frac{10-y\pm\sqrt{100-3y^2-16y}}{2}\ .$$

x i y su cifre dvocifrenog broja, pa diskriminanta mora biti kvadrat nekog prirodnog broja. To je očigledno nemoguće za $y\geq 4$ i za $y=0$.
Za $y=1$ diskriminanta je 81, te je $x_{1,2}=\dfrac{10-1\pm 9}{2}$, pa dobijamo jedno rješenje, a to je broj 91 ($x=9$ i $y=1$).
Za $y=2$ diskriminanta je 56, te nije kvadrat prirodnog broja.
Za $y=3$ diskriminanta je 25, te je $x_{1,2}=\dfrac{10-3\pm 5}{2}$, odakle dobijamo još dva rješenja, a to su brojevi 63 ($x=6$ i $y=3$) i 13 ($x=1$ i $y=3$).

Dakle, traženi brojevi su 91, 63 i 13. □

Bjeloglav Vesna, 4r, JU SŠC "Istočna Ilidža"

Zadatak 6. *Ako je $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$ odrediti realne vrijednosti parametra m za koje je tačna jednakost $\cos\varphi=\dfrac{m^2-4m-4}{m^2+1}$.*

Rješenje: Funkcija $y=\cos x$ je opadajuća na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, pa vrijedi

$$0<\phi<\frac{\pi}{3}\implies\cos 0>\cos\phi>\cos\frac{\pi}{3}\ ,$$

$$\frac{1}{2}<\cos\phi<1\implies\frac{1}{2}<\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}<1\ .$$

1.

$$\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}>\frac{1}{2}\iff\frac{2m^2-8m-8-m^2-1}{2(m^2+1)}>0\iff\frac{m^2-8m-9}{2(m^2+1)}>0$$
$$\iff m^2-8m-9>0\iff m\in R_1=(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$$

jer je izraz $2(m^2+1)>0$ za svako $m\in\mathbb{R}$.

2.

$$\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}<1\iff\frac{m^2-4m-4-m^2-1}{m^2+1}<0\iff\frac{-4m-5}{m^2+1}<0$$
$$\iff -4m-5<0\iff m>-\frac{5}{4}\iff m\in R_2=\left(-\frac{5}{4},+\infty\right)$$

jer je izraz $m^2+1>0$ za svako $m\in\mathbb{R}$.
Konačno rješenje je skup $R=R_1\cap R_2$, to jest $R=\left(-\frac{5}{4},-1\right)\cup(9,+\infty)$. □

Hasić Elma, 3r, JU Mješovita srednja škola Banovići

Zadatak 7. *Ako su α,β i γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ uglovi trougla i ako $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$ i $\tan\frac{\gamma}{2}$ čine aritmetički niz, tada $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ također čine aritmetički niz. Dokazati!*

Rješenje: Prema uvjetima zadatka imamo

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=2\tan\frac{\beta}{2}\iff\tan\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\frac{\gamma}{2}-\tan\frac{\beta}{2}$$
$$\iff\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$\iff\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\iff\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\ .$$

Zamjenom $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$, dobija se

$$\sin\left(90^\circ - \frac{2\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\left(-90^\circ + \frac{\alpha+2\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \cos\left(\frac{2\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} = -\cos\left(\frac{\alpha+2\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \; .$$

Primjenom formule: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$, posljednja jednakost poprima oblik

$$\cos(\alpha+\gamma)+\cos\alpha = -\cos(\alpha+\gamma)-\cos\gamma \; ,$$

odnosno

$$2\cos(180^\circ-\beta) = -\cos\alpha-\cos\gamma \Longleftrightarrow 2\cos\beta = \cos\alpha+\cos\gamma \; ,$$

to jest $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ čine aritmetički niz u datom poretku. □

Zadatak 8. *Dokazati nejednakost*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1} > 1, \; n\in\mathbb{N} \; .$$

Rješenje: 1

Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom.

Korak 1: $n=1$:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1 \; ,$$

te je tvrđenje tačno za $n=1$.

Korak 2: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n=k$, $k\in\mathbb{N}$, to jest

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1} > 1 \; .$$

Korak 3: Neka je $n=k+1$. Stavljajući taj n u lijevu stranu polazne nejednakosti, imamo

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4} = \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} \; .$$

Na osnovu *Koraka 2* imamo da je $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1} > 1-\frac{1}{k+1}$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} &> 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\\ &= 1-\frac{2}{3(k+1)}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}\\ &= 1+\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1\end{aligned}$$

Na osnovu principa potpune matematičke indukcije zaključujemo da data nejednakost vrijedi za svako $n\in\mathbb{N}$.

Ahmetović Zerina, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Rješenje: 2

Uočimo prvo da za pozitivne brojeve a i b vrijedi:

$$A \geq G \iff \frac{1}{ab} > \frac{4}{(a+b)^2} \ . \tag{1}$$

Napravimo zbirove parova razlomaka na lijevoj strani date nejednakosti, uzimajući: prvi i zadnji, drugi i predzadnji itd. (kako je zbir nazivnika razlomaka po svim parovima isti i iznosi $4n+2$) i iskoristimo nejednakost (**??**):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)(3n+1)} &\overset{(??)}{>} (4n+2)\frac{4}{(4n+2)^2} = \frac{2}{2n+1} \\ \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} = \frac{4n+2}{3n(n+2)} &\overset{(??)}{>} (4n+2)\frac{4}{(4n+2)^2} = \frac{2}{2n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kako je broj razlomaka na lijevoj strani date nejednakosti neparan (ima ih $2n+1$), to imamo n parova razlomaka čiji su zbirovi veći od $\dfrac{2}{2n+1}$, te ostaje još jedan razlomak koji nema para, a to je $\dfrac{1}{2n+1}$. Zbog toga je

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > n\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = 1 \ ,$$

što je trebalo i dokazati. □

Efendić Nura, 3r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 9. *Ako je* $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) + 3f\left(\dfrac{1+x}{x}\right) = 2x$, *odrediti* $f(x)$.

Rješenje: Neka je

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) + 3f\left(\frac{1+x}{x}\right) = 2x \ . \tag{2}$$

Uvedimo smjenu

$$\frac{x}{1+x} = t \ . \tag{3}$$

Tada je

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{t} \ . \tag{4}$$

Takođe vrijedi,

$$\frac{x}{1+x} = t \implies x = t(1+x) \implies x(1-t) = t \ ,$$

odnosno

$$x = \frac{t}{1-t} \ . \tag{5}$$

Uvrštavajući (**??**), (**??**) i (**??**) u (**??**) imamo

$$f(t) + 3f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\frac{t}{1-t} \ , \tag{6}$$

a odavde zamjeno t sa $\frac{1}{t}$ dobijamo

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 3f(t) = 2\frac{1}{t-1} \tag{7}$$

Množeći jednakost (**??**) sa -3 i sabiranjem sa (**??**), slijedi da je

$$-8f(t) = \frac{2t}{1-t} + \frac{6}{1-t} \ ,$$

odakle je

$$f(t) = \frac{t+3}{4(t-1)} \ .$$

$\square$

Mitić Marinela, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 10. *Neka su α, β i γ uglovi trougla. Dokazati da vrijedi nejednakost:*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \ .$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje: 1
Prema nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine je

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \ ,$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \ . \tag{8}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna u intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \ .$$

Kako su α, β i γ uglovi trougla, odatle slijedi

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ ,$$

odnosno

$$\frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \ . \tag{9}$$

Iz (**??**) i (**??**) slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi za $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$, odnosno za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje: 2 Koristeći A-G nejednakost, imamo

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}} \ . \tag{10}$$

Neka je $x = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. tada je

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\sin\frac{\gamma}{2} \\
\iff & \quad 2x = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
\iff & \quad 2x = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} \\
\iff & \quad \sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 2x = 0 \ .
\end{aligned}$$

Posljednju jednadžbu promatrajmo kao kvadratnu jednadžbu po $\sin\frac{\gamma}{2}$. Da bi ona imala realna rješenja njena diskriminanta mora biti nenegativna, to jest

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8x \geq 0 \ ,$$

odakle je

$$8x \leq \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{8} \iff \frac{1}{x} \geq 8 \ .$$

Zbog toga je

$$(\mathbf{??}) \iff \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6 \ .$$

Jednakost vrijedi za $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. □

Rješavatelji zadataka 1 – 10: Osnovna škola

OŠ "Malešići" Malešići - sljedeći učenici: *Aljić Lejla* (6r): 3,5; *Bešić Đulsa* (8r): 7; *Buljubašić Tarik*(6r): 1-3,5; *Delić Sumea* (6r): 1,2; *Duraković Adina*(9r): 7,9, djel.10; *Duraković Ajla* (9r): 7,9, djel.10; *Duraković Enver* (7r): 2-4; *Halilčević Delila* (7r): 1-4; *Hankušić Džejla* (8r): 7; *Hasić Fejzulah* (7r): 2-5; *Husić Omer* (9r): 7,9, djel.10, *Memić Said* (6r):1,2; *Mešanović Nejra* (6r): 1-3,5; *Mujkić Lejla* (7r): 1,4;
OŠ "S.S. Kranjčević" Sarajevo: *Esma Pita* (2r): 3.

Rješavatelji zadataka 1-10: Srednja škola

Gimanzija "Meša Selimović Tuzla - sljedeći učenici: *Ćulah Arman* (1r): 1-4; *Mitić Marinela* (1r): 9; *Imamović Hamza* (1r): 9; *Džanić Armin* (1r): 9; *Mazalović Aida* (1r): 1,9; *Rakovac Kanita* (1r): 1-3; *Osmić Asja* (2r): 1-4,9; *Ahmetović Zerina* (2r):2,3, djel.5,8,9; *Efendić Nura* (3r): 1,2,8,9; *Emkić Emina* (4r): 1,2,4,6; *Mandžić Šejla* (4r): 1,3,8,9.
Gimnazija "Ismet Mujezinović" - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (1r): 1,2,5,9; *Fazlić Amina* (2r): 1,2,5,9;
Mješovita srednja škola Banovići - sljedeći učenici: *Dostović Emina* (2r): 9; *Hasić Elma* (3r): 6;
SŠC "Istočna Ilidža": *Bjeloglav Vesna* (4r): 5,8;
Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac: *Kukuruzović Nedim* (4r): 1-9;
Međunarodna srednja škola "Richmond Park School" Tuzla: *Hasić Almedin* (1r): 2,3,5.