ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 3, No. 1, TUZLA 2020.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 3, No. 1 , 2020

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info.
Članovi UM TK imaju besplatan pristup elektronskom časopisu za tu godinu.
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:	**Žiro račun udruženja:**
Univerzitetska 4, 75000	Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
Tuzla, Bosna i Hercegovina	(za časopis)
Telefon: ++387 61 178 698	3383002261804115
Fax: ++387 35 320 861	(UniCredit Bank)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sljedeći sadržaji: konkursni zadaci, rješenja konkursnih zadataka iz prethodnog broja, zabavna matematika, nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Najbolja pristigla učenička rješenja konkursnih zadataka se objavljuju u narednom broju časopisa, kao i spisak svih učenika, rješavatelja zadataka, s brojevima uspješno riješenih zadataka. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa.* Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, 31. decembra 2020. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 2-10

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se, nakon razmatranja osnovnih osobina eksponencijalne funkcije, detaljnije razmatraju eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe, s i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Slično kako je to pokazano u [5], u slučaju iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe su također poprilično nezgodne za ispitivanje. I za njih naravno ne postoji opći postupak rješavanja. Tako smo u mogućnosti riješiti samo neke relativno jednostavne tipove eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi. U ovom radu bit će date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Budući da se eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe vrlo često pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola, to nam daje razlog više za motivaciju pri pisanju ovog rada. Poseban problem je, kao i kod drugih jednadžbi elementarne matematike, kad se zahtijeva diskusija rješenja eksponencijalne jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

Kako bi kvalitetno mogao pratiti naredno izlaganje, čitatelj treba dobro da poznaje teoriju i primjene kvadratnih jednadžbi i nejednadžbi, kao i iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi (v. [1–6]). Prije nego pristupimo detaljnijem proučavanju ovih jednadžbi i nejednažbi, upoznajmo se prvo s eksponencijalnom funkcijom i njenim osobinama, koje će nam biti od velike koristi kasnije.

Definicija 1.1. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x,\ \ 0 < a \neq 1,$ *naziva se* ***eksponencijalnom funkcijom.***

Osobine eksponencijalne funkcije:

a) Funkcija $y = a^x$ je definirana za svako x u skupu realnih brojeva.

b) Funkcija $y = a^x$ je pozitivna za svako realno $x \quad (a^x > 0\,, \quad x \in \mathbb{R})$.

c) Ako je $a > 1$, tada $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, tj. funkcija je monotono rastuća. Ako je $0 < a < 1$, tada $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, to jest funkcija je monotono opadajuća. Međutim, uočimo sljedeće: ako je $a = 1$, tada je $a^x = 1^x = 1$ za svako x, tj. funkcija ima konstantnu vrijednost, pa nije zanimljiva za ispitivanje zbog činjenice da nije injekcija, tj. nema inverznu funkciju. To je razlog zbog čega je u definiciji eksponencijalne funkcije nametnuto ograničenje $a \neq 1$.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: eksponencijalna funkcija, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe
Rad preuzet: Rad preuzet: 30. septembar 2020.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad

(a) (b)

Slika 1: Grafici eksponencijalnih funkcija: (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$.

d) Ako je $x = 0$, tada je $a^x = 1$ za sve $a > 0$.

e) Za $a > 1$ u intervalu $(-\infty, 0)$ je $0 < a^x < 1$, a za $0 < a < 1$ je $a^x > 1$.

U intervalu $(0, +\infty)$ za $a > 1$ je $a^x > 1$, a za $0 < a < 1$ je $0 < a^x < 1$.

2. Eksponencijalne jednadžbe i nejednažbe - teorijski osvrt

Definicija 2.1. *Jednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo* ***eksponencijalnom jednadžbom****.*

Naravno, u općem slučaju eksponencijalnu jednadžbu nije moguće riješiti. To se može učiniti samo s jednostavnijim oblicima tih jednadžbi.
Budući da je eksponencijalna funkcija bijektivna, to vrijedi

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad (0 < a \neq 1) \iff x_1 = x_2.$$

Na ovoj činjenici je zasnovano rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih jednadžbi. Naime, datu eksponencijalnu jednadžbu je najčešće moguće svesti na oblik

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1), \tag{1}$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$f(x) = g(x),$$

vodeći, naravno, računa i o definicionim područjima funkcija f i g.
Međutim, često se u zadacima pojavljuju eksponencijalne jednadžbe, gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena. Najjednostavniji oblik takve jednadžbe je

$$[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)} \quad (a(x) > 0). \tag{2}$$

Uočimo prvo da je definiciono područje ove jednadžbe ustvari presjek definicionih područja funkcija f, g i a, tj. $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Tada vrijedi

$$(2) \iff \{x \in DP \ \wedge \ [a(x) = 1 \ \vee \ (0 < a(x) \neq 1 \ \wedge \ f(x) = g(x))]\}.$$

Definicija 2.2. *Nejednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo* ***eksponencijalnom nejednadžbom****.*

Eksponencijalne nejednadžbe se u općem slučaju ne mogu riješiti. Naime, moguće je riješiti samo neke jednostavnije klase nejednadžbi i tada su postupci slični kao prilikom rješavanja eksponencijalnih jednadžbi. Na osobini **c)** eksponencijalne funkcije zasnovano je rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih nejednadžbi. Naime, data eksponencijalna nejednadžba najčešće se može svesti na oblik:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

i) Ako je $a > 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) < g(x).$$

ii) Ako je $0 < a < 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) > g(x).$$

Pri tome, naravno, moramo voditi računa o definicionom području date nejednadžbe kao presjeku definicionih područja funkcija f i g

Razmotrimo sada i eksponencijalne nejednadžbe gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena:

$$[a(x)]^{f(x)} < [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0) \tag{3}$$

i

$$[a(x)]^{f(x)} \leq [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0)\,. \tag{4}$$

Definiciono područje u slučaju obje nejednadžbe je presjek definicionih područja funkcija f, g i a, to jest $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Vrijedi

$$(3) \iff \left\{ x \in DP \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge \ f(x) < g(x)\ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge \ f(x) > g(x)\ ) \end{array} \right] \right\} \tag{5}$$

i

$$(4) \iff \left\{ x \in DP \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge \ f(x) \leq g(x)\ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge \ f(x) \geq g(x)\ ) \\ \vee \\ a(x) = 1 \end{array} \right] \right\}. \tag{6}$$

2.1. Primjeri zadataka bez parametara

Primjer 2.3. *Riješiti jednadžbu*

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Rješenje: Data se jednadžba može napisati u obliku

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 6^{2x}.$$

Nakon dijeljenja sa 6^{2x}, dobijamo

$$3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^{2x} = 5 \iff 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 5.$$

Uvedimo smjenu: $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$. Imamo

$$3t+2\cdot\frac{1}{t}=5 \iff 3t^2-5t+2=0 \iff \left(t=\frac{2}{3}\ \vee\ t=1\right).$$

$R: x=\frac{1}{2} \vee x=0.$ □

Primjer 2.4. *Riješiti jednadžbu*

$$8\cdot 3^{\sqrt{x}+x}=9^x-9^{\sqrt{x}+1}. \tag{7}$$

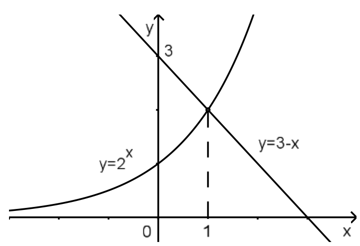
Rješenje: $DP: x\geq 0$. Uz ovaj uvjet, imamo

$$\begin{aligned}
(7) &\iff 9\cdot 3^{\sqrt{x}+x}-3^{\sqrt{x}+x}+9\cdot 9^{\sqrt{x}}-9^x=0\\
&\iff 9\cdot 3^{\sqrt{x}+x}+9\cdot 3^{2\sqrt{x}}-3^{\sqrt{x}+x}-3^{2x}=0\\
&\iff 9\cdot 3^{\sqrt{x}}\left(3^x+3^{\sqrt{x}}\right)-3^x\left(3^x+3^{\sqrt{x}}\right)=0\\
&\iff \left(3^x+3^{\sqrt{x}}\right)\left(9\cdot 3^{\sqrt{x}}-3^x\right)=0\\
&\iff 9\cdot 3^{\sqrt{x}}-3^x=0 \text{ (jer je } 3^x+3^{\sqrt{x}}>0)\\
&\iff 3^{2+\sqrt{x}}=3^x \iff 2+\sqrt{x}=x\\
&\iff \left(x\geq 2\ \wedge\ x=(x-2)^2\right) \iff x=4,
\end{aligned}$$

a to je rješenje date jednadžbe, budući da zadovoljava uvjet DP. □

Primjer 2.5. *Riješiti jednadžbu* $2^x=3-x$.

Rješenje: Ovo je primjer eksponencijalne jednadžbe koja se ne može svesti na oblik (1), te iako se čini vrlo jednostavnom ne može biti riješena na standardan način. Međutim, jednadžba se može riješiti grafički: u istom koordinatnom sistemu konstruirajmo grafike funkcija $f(x)=2^x$ i $g(x)=3-x$ (v. Sliku 2).



Slika 2: Grafici funkcija $y=2^x$ i $y=3-x$.

Sa Slike 2 je jasno da ti grafici imaju jednu jedinu tačku zajedničku, što znači da data jednadžba ima jedinstveno rješenje. To rješenje je jednostavno uočiti: $x=1$. □

Primjer 2.6. *Riješiti jednadžbu* $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x$.

Rješenje: Nakon uvođenja smjene $y=\frac{x}{2}$, data jednadžba poprima oblik

$$1+3^y=4^y \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y+\left(\frac{3}{4}\right)^y=1.$$

Iskoristit ćemo sada osobine monotonosti eksponencijalne funkcije (u slučaju kad je baza manja od 1 funkcija je opadajuća, v. osobinu c)).
Za $y<1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y > \frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y > \frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y > 1$, tj. u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.
Za $y>1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y < \frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y < \frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y < 1$, te ni u ovom slučaju jednadžba nema rješenja. Jasno je da je transformirana jednadžba zadovoljena za $y=1$, to jest $x=2$ je jedino rješenje date jednadžbe. □

Primjer 2.7. *Riješiti jednadžbu*

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1.$$

Rješenje: DP: $x \in \mathbb{R}$, pa imamo

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1 \iff \left\{\begin{array}{c} x^2-x-1=1 \\ \vee \\ \left(0<x^2-x-1 \neq 1 \wedge x^2-1=0\right) \end{array}\right\}.$$

$R: x=-1 \vee x=2.$ □

Primjer 2.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\left(4x^2-10x+7\right)^{x^2-x} \geq 1.$$

Rješenje: Na osnovu (6) imamo (imajući na umu da je DP: $x \in \mathbb{R}$)

$$\left(4x^2-10x+7\right)^{x^2-x} \geq 1 \iff \left\{\begin{array}{c} 4x^2-10x+7>1 \ \wedge \ x^2-x \geq 0 \\ \vee \\ 0<4x^2-10x+7<1 \ \wedge \ x^2-x \leq 0 \\ \vee \\ 4x^2-10x+7=1 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle \ \wedge \ x \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle \\ \vee \\ x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle \ \wedge \ x \in [0,1] \\ \vee \\ x=1 \ \vee \ x=\frac{3}{2} \end{array}\right\}.$$

$R: x \in \langle -\infty, 0] \cup \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle.$ □

Primjer 2.9. *Riješiti sljedeću nejednadžbu*

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x \leq 62.$$

Rješenje: S obzirom da je

$$\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} = \frac{16-15}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}},$$

data nejednadžba je ekvivalentna s

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x} \leq 62.$$

Uvođenjem smjene: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t$, dobijamo

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{t} \leq 62 &\iff t^2 - 62t + 1 \leq 0 \iff 31 - 8\sqrt{15} \leq t \leq 31 + 8\sqrt{15} \\ &\iff \left(4-\sqrt{15}\right)^2 \leq \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\iff \left(4+\sqrt{15}\right)^{-2} \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} \leq \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\iff -2 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \iff -4 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Rezultat: $-4 \leq x \leq 4$. □

2.2. Primjeri zadataka s parametrima

Primjer 2.10. *Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba*

$$|x+2| - |2x+8| = a^x \ :$$

a) ima tačno jedno rješenje,
b) ima više od jednog rješenja,
c) nema rješenja?

Rješenje: Jasno je da mora biti $a > 0$, pa zbog $a^x > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, lijeva strana date jednadžbe mora biti pozitivna, to jest

$$|x+2| > |2x+8| \iff (x+2)^2 > (2x+8)^2 \iff 3x^2 + 28x + 60 < 0,$$

odakle slijedi

$$x \in \left\langle -6, -\frac{10}{3} \right\rangle. \tag{8}$$

Dakle, ako data jednadžba ima rješenja, ona moraju pripadati intervalu (8). Zadatak ćemo riješiti grafičkim putem. Na slici 3 predstavljeni su grafici funkcija $y = |x+2| - |2x+8|$ (u intervalu (8)) i $y = a^x$ (za različite vrijednosti a).

a) Da bi jednadžba imala tačno jedno rješenje, grafik funkcije $y = a^x$ mora prolaziti tačkom $M(-4, 2)$ (jer on ne može prolaziti tačkama $A(-6, 0)$ ili $B\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$, tj. biće $a^{-4} = 2$, odnosno $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

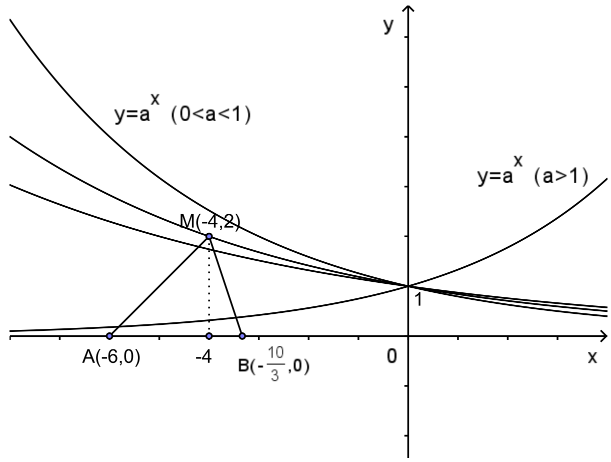
b) Za $a > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y = a^x$ siječe liniju AMB u dvije tačke, pa jednadžba ima dva rješenja.

c) Za $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y = a^x$ nema zajedničkih tačaka s linijom AMB, pa jednadžba nema rješ enja. Jednadžba nema rješenja ni kada je $a \leq 0$. □

Primjer 2.11. *Naći sve vrijednosti realnog parametra a za koje nejednakost*

$$a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$$

vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$.



Slika 3: Grafici funkcija $y = |x+2| - |2x+8|$ i $y = a^x$ (za razne vrijednosti a).

Rješenje: Uvedemo li smjenu $t = 3^x > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, problem se svodi na iznalaženje svih vrijednosti realnog parametra a tako da vrijedi

$$f(t) = at^2 + 4(a-1)t + a - 1 > 0 \text{ za svako } t > 0.$$

Kako je $f(t)$ kvadratna funkcija njen znak je najlakše ispitivati znajući položaj njenog grafika, odnosno odgovarajuće parabole, koji zavisi od znaka koeficijenata a uz t^2 i od znaka njene diskriminante $D = 4(a-1)(3a-4)$. Zbog toga ćemo razmatrat sljedeće slučajeve.

1. $a \leq 0$

   Tada za $t > 0$ vrijedi $at^2 \leq 0$, $4(a-1)t < 0$ i $a - 1 < 0$, što implicira $f(t) < 0$ za sve $t > 0$, pa ove vrijednosti parametra a ne dolaze u obzir.

2. $a > 0$ (grafik funkcije $f(t)$ je otvorom okrenut prema gore)

   i) Ako je $D < 0$, to jest $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$, tada se grafik funkcije $f(t)$ nalazi u cijelosti iznad Ot-ose, pa je $f(t) > 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. To znači da u obzir dolaze sve razmatrane vrijednosti od a, odnosno $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$.

   ii) Ako je $D \geq 0$, to jest $a \in \langle 0, 1] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$, tada da bi bilo $f(t) > 0$ za sve $t > 0$, grafik funkcije $f(t)$ za sve $t > 0$ mora biti u cijelosti iznad Ot-ose. To je moguće samo ako je veća nula funkcije $f(t)$ nepozitivna. Kako je, za $a > 0$, ta veća nula oblika $t_2 = \frac{2(1-a)+\sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a}$, to znači da mora vrijediti

   $$\frac{2(1-a) + \sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a} \leq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{(a-1)(3a-4)} \leq 2(a-1).$$

   Uočimo da je za $a \in \langle 0, 1]$, desna strana posljednje nejednakosti nepozitivna, dok je lijeva nenegativna, što je moguće samo ako je $a = 1$. S druge strane, za $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$ imamo da je (nakon kvadriranja) posljednja nejednakost zadovoljena za sve pozitivne vrijednosti od a, što znači da u obzir dolaze sve vrijednosti $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$.

Dakle, u slučaju $a > 0$, zaključujemo da je $f(t) > 0$ za sve $t > 0$ ako je $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle \cup \{1\} \cup \left[\frac{4}{3} + \infty\right\rangle = [1, +\infty\rangle$, a što ujedno predstavlja rješenje zadatka.

□

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Ispitati tok i konstruisati grafike sljedećih funkcija:

a) $y = 3^x$, b) $y = 2^{-x+1}$, c) $y = 2^x - 1$, d) $y = \begin{cases} 2^x, & x < -1, \\ 2^{-1}, & -1 \le x \le 1, \\ 2^{-x}, & x > 1. \end{cases}$

2. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Definirajmo realne funkcije s, c, t sljedećim formulama:

$$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \quad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

Dokazati da vrijedi:

a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$, b) $s(2x) = 2s(x)\,c(x)$,

c) $c(2x) = c^2(x) + s^2(x)$, d) $t(2x) = \dfrac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$,

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Riješiti sljedeće jednadžbe (**3-11**):

3. a) $2^{x-1} = 4^5$, b) $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$, c) $4^x - 4^{x-2} = 240$.

4. a) $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3}$, b) $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$.

5. a) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$, b) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.

6. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

7. a) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$, b) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

8. a) $0,5^{x^2-20x+61,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$, b) $5^x - 5^{3-x} = 20$.

9. a) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$, b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

10. a) $x^x + 27 \cdot x^{-x} - 28 = 0$, b) $|x|^{x^2-2x} = 1$.

11. $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$, b) $|x-1|^{10x^2-20x+9} = |x-1|^{3x+3}$.

12. Odrediti broj $t \in R$ takav da je $f(t) = t$ ako je $f(x)$ dato sa

$$f(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 4^{x+\sqrt{x^2-2}} + 6 + x.$$

13. Za koje vrijednosti parametara a i m jednadžba

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$$

ima rješenje?

Riješiti sljedeće nejednadžbe (**14-19**):

14. a) $2^{2x^2} + 25^{\frac{x^2-1}{2}} > 5^{x^2}$, b) $21 \cdot 3^x + 100 \cdot 5^x - 3^{x+4} > 0$.

15. a) $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}$, b) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 \geq 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

16. a) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} < 0$, b) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

17. a) $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2-x} > 1$, b) $\left(9 + 6x + x^2\right)^{-x-5} < 1$.

18. a) $\left(x^2 - 3x - 9\right)^{x^2-3x} \leq 1$, b) $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2-x} > 1$.

19. $\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{x+\sqrt{x^2-1}} \leq \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{x^2-1}}$.

20. Odrediti broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$2^{4x-2} \cdot 4^{-(x-1)^2} - 3 \cdot 2^{4x-1-x^2} + 8 \leq 0.$$

21. Za koje je vrijednosti a trinom $x^2 - 2^{a+2} \cdot x - 2^{a+3} + 12$ pozitivan za sve realne vrijednosti promjenljive x?

22. Za koje pozitivne vrijednosti p jednadžba

$$9^{x+1} + 3x + 2 = 9p^2 - 3p - 2$$

ima nenegativne korijene?

23. U koordinatnoj ravni odrediti skup tačaka (uz grafičku ilustraciju) čije koordinate (x, y) zadovoljavaju nejednakosti:

a) $x^{x^2+y^2} < x^9 \quad (x > 0)$,

b) $x^y > x^{\cos x} \quad (x > 0)$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 2(1), 21-33, 2019.

[6] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 11 – 15

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Figurativni brojevi

Senada Mustafić

JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Sažetak: U ovom radu bavimo se jednom grupom zanimljivih prirodnih brojeva - figurativnim brojevima, koje možemo pomoću tačkica prikazati u obliku pravilnog mnogougla. Primjenom vizuelno-logičkog pristupa u zapažanju osobina trougaonih i kvadratnih brojeva kod učenika razvijamo kreativnost i sposobnost rješavanja problema na više različitih načina.

1. Uvod

"Algebra je pisana geometrija, a geometrija je slikovita algebra."

Marija-Sofija Žermen (1776.-1831.), francuska matematičarka

Istorija matematike potvrđuje da su mnogi matematičari još u ranoj mladosti pokazivali izuzetne matematičke sposobnosti. Njemački matematičar Karl Fridrich Gauss ($1777.-1855.$) je u četvrtom razredu osnovne škole pronašao formulu za zbir konačnog broja članova aritmetičkog niza. Na postavljeni zadatak da saberu sve prirodne brojeve od 1 do 100, na veliko iznenađenje svog učitelja, Gauss je vrlo brzo dobio rezultat. Dok su drugi učenici rješavali sabiranjem broj po broj on je, posmatrajući sabirke, uočio zakonitost da zbir prvog i posljednjeg broja iznosi 101, isto kao i zbir drugog i pretposljenjeg broja, itd. Takvih parova je tačno 50, pa je traženi zbir 5050. Ovaj kreativan način rješavanja zadatka je ukazao na Gaussove izuzetne matematičke sposobnosti.

Švajcarski psiholog i filozof Jean Piaget (1896.-1980.) smatra da su osnovne mentalne strukture rezultat interakcije jedinke i njene sredine, nasljeđa i iskustva, sazrijevanja i učenja. Pod nadarenošću podrazumijevamo osobine učenika koje omogućavaju ostvarivanje izrazito natprosječnih postignuća u jednoj ili više oblasti ljudskih djelatnosti. Nadarenost predstavlja područje u kojem se preklapaju sposobnosti, kreativnost i osobine ličnosti, a sve to pod povoljnim uticajem okoline.

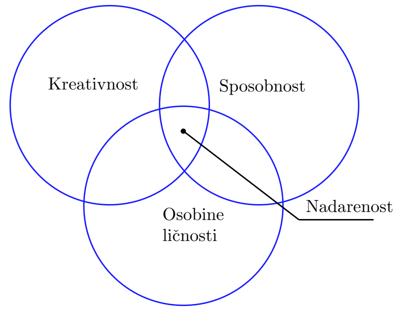
Istraživanja pokazuju da se među visoko darovitim učenicima mogu identifikovati tri tipa darovitih:

1. ***analitički tip*** - kojima razvijene verbalno-logičke komponente razmišljanja preovladavaju nad vizuelno-slikovnim komponentama;

2. ***geometrijski tip*** - posjeduje izražene vizuelne komponente i sposobnost uočavanja relacija na slici ili modelu;

3. ***harmonijski tip*** - posjeduju dobro razvijene i verbalno-logičke i vizuelno-slikovne sposobnosti.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi:
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad



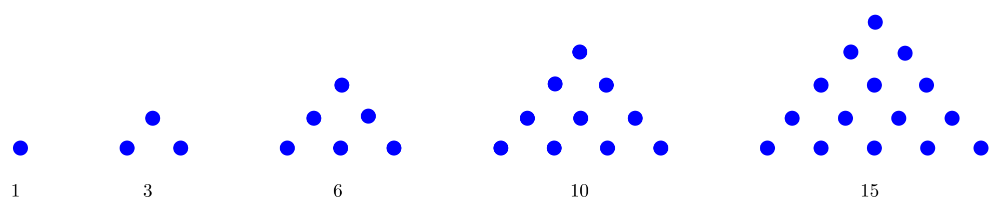
Slika 1: Nadarenost.

2. Figurativni brojevi

Kada dobijemo zadatak dokazati iskaz o prirodnim brojevima (npr. pokazati da je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka n^2), prvo čega ćemo se sjetiti je korištenje matematičke indukcije. Geometrijski pristup, u kojem se može vizualizirati veza između brojeva kao veza između objekata, često može pružiti i lakše razumijevanje.

Takvi su postupci razvijeni još u Staroj Grčkoj, a osobito su ih njegovali pitagorejci. Jednom tačkicom ili kvadratićem prikazan je broj 1, a slaganjem tačkica ili kvadratića u određene oblike dobijamo ostale prirodne brojeve. Posebnim rasporedom i slaganjem tačkica oblikuju se tzv. figurativni brojevi. Oni omogućuju jasno vizualno predstavljanje algebarskih svojstava i relacija. Trougaoni i kvadratni brojevi sa svojom geometrijskim prikazom su interesantni za učenike.

Pogodna su tema za istraživanje koju je moguće predložiti učenicima 4. razreda za samostalan rad ili ih prezentirati kao dodatni zadatak. Na taj način učenici će sami uvidjeti ljepotu i čar matematike, jasnije će razumjeti gradivo, a razvijat će i sposobnost rješavanja novih, dotada neviđenih problema, što će biti korisno u njihovom daljem obrazovanju i životu.



Slika 2: Trougaoni brojevi.

Ukoliko jednoj tački dodamo dvije tačke dobivamo jednakostraničan trougao. Zatim, dodajući tri tačke prethodnom jednakostraničnom trouglu dobijamo treći po redu trougaoni broj 6. Broj 10, četvrti po redu trougaoni broj, bio je jedan od mističnih simbola Pitagorejaca.
Sa samih slika trougaonih brojeva jasno je na koji se način iz nekog broja u pojedinom nizu obrazuje broj koji mu neposredno slijedi. Proučavanjem trougla moguće je uočiti:

- u svakom koraku trougao ima jedan red više nego u prethodnom koraku,
- svaki sljedeći red ima jednu tačku više nego prethodni red.

Lako ćemo primijetiti da je n-ti po redu trougaoni broj jednak zbiru prvih n članova aritmetičkog niza

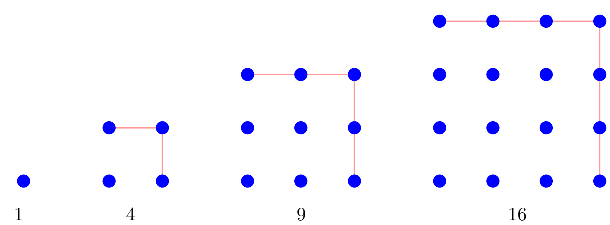
$1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ...$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2}(1 + n) \ . \end{aligned}$$

Dakle, važi $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}(1 + n)$. Tako niz trougaonih brojeva glasi: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
Na osnovu navedenih osobina trougaonih brojeva jednostavno izvodimo rekurzivne formule za iste:

$$T_1 = 1 \ ,$$

$$T_n = T_{n-1} + n \ .$$



Slika 3: Kvadratni brojevi.

Kad jednoj tački dodajemo tri tačke, dobijamo kvadrat. Kad tom kvadratu pridodamo pet tačaka, zatim sedam itd., dobijamo sve kvadratne brojeve, to jest brojeve koje mozemo prikazati tačkama raspoređenim u ravni u obliku kvadrata.
Na osnovu vizuelnog prikaza kvadratnih brojeva jednostavno određujemo rekurzivnu formulu za iste:

$$K_1 = 1 \ ,$$

$$K_n = K_{n-1} + (2n - 1) \ .$$

Niz kvadratnih brojeva glasi: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Lako ćemo primijetiti da je n-ti po redu kvadratni broj jednak zbiru prvih n članova aritmetičkog niza $1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$

$$K_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) \ .$$

Na osnovu formule za sumu prvih n članova aritmetičkog niza, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, dobijamo:

$$K_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \ .$$

Dakle, važi

$$K_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2 \ .$$

Zbir svaka dva uzastopna trougaona broja je kvadratni broj, jer je

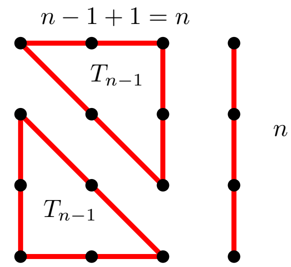
$$T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2 = K_n \ .$$

Do ove jednakosti smo mogli doći i korištenjem figurativnih brojeva. Naime, s obzirom da je

$$T_n + T_{n-1} = (T_{n-1} + n) + T_{n-1} = 2T_{n-1} + n,$$

onda iz vizuelnog prikaza vidimo da je dobijen kvadrat, to jest figurativni broj $K_n = n^2$. Na slici je prikazan slučaj za $n = 4$, a analogno bi složili figurativne brojeve $2T_{n-1}$ i n za bilo koji prirodan broj n. Dakle zaista vrijedi

$$T_n + T_{n-1} = 2T_{n-1} + n = K_n \ .$$



Slika 4: KVADRAT n^2.

3. Anketa

Cilj date ankete je da istraži koliko se u nastavi matematike primjenjuje rješavanje jednog problema (zadatka) na različite načine i kako to utiče na razvoj matematičkih sposobnosti učenika.
U anketiranju su učestvovali učenici iz JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla (33 učenika trećeg razreda, izborna nastava iz matematike i učenici matematičkog smjera), učenici JU Mješovita srednja škola Banovići (9 učenika trećeg razreda, izborna nastava iz matematike) i učenici JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla (24 učenika trećih i četvrtih razreda, izborna nastava iz matematike). Dakle, ukupno 66 učenika od kojih 21 dječak i 45 djevojčica.

Ocjenjivanje u anketi je rađeno prema sljedećoj nivelaciji:
1 "Uopće se ne slažem", **2** "Ne slažem se", **3** "Niti se slažem, niti se ne slažem", **4** "Slažem se", **5** "U potpunosti se slažem".

Tvrdnje	1	2	3	4	5
1. Na nastavi matematike rješavamo jedan zadatak na više različitih načina.	0	1	6	37	22
2. Uspijevam samostalno riješiti neke matematičke zadatke na drugačiji način nego što radimo na nastavi.	0	9	20	25	12
3. Volim kada vježbamo geometriju.	8	23	11	13	11
4. Slike i grafički prikazi mi pomažu da lakše razumijem zadatak, uočim veze i odnose	0	7	12	35	12
5. Volim kada vježbamo algebru.	2	1	13	24	26
6. Zadaci sa više različitih načina rješavanja su mi interesantni.	0	6	13	31	16
7. Raduje me i osjećam zadovoljstvo kad riješim zadatak na svoj način.	0	1	5	22	38
8. Zadaci sa više različitih načina rješavanja razvijaju kritičko i logičko mišljenje.	0	0	3	31	32

Tablica 1: Rezultati ankete.

Broj učenika koji su se istovremeno izjasnili da vole vježbati i algebru i geometriju iznosi 16, to jest $24,24\%$.
Broj učenika koji izjasnili da vole vježbati zadatke iz algebre, a ne vole da rade geometriju iznosi 32, to jest $48,48\%$.

Komentari učenika o primjeni različitih načina rješavanja istog zadatka:

- „Uči nas da budemo otvoreni za drugačiji način razmišljanja, ali da i način na koji mi razmišljamo nije pogrešan“.
- „Smatram da je bitno za razvijanje samostalnog razmišljanja kod učenika.“

- „Zadaci sa više različitih načina su bitni kao priprema za rješavanje raznih životnih problema.“
- „Smatram da zadaci koji se rješavaju na više načina nisu za sve učenike. Ponekad zbunjuju, ponekad pomognu.“
- „Zadaci koji se mogu riješiti na više načina mi se sviđaju jer automatski postoji veća mogućnost da sam dobro riješila zadatak.“
- „Ako bi bilo manje takvih zadataka, učenici ne bi mogli da razmišljaju na svoj način i radili bi sve po šablonu.“

4. Zaključak

"Riješiti jedan problem na dva ili više načina je od veće vrijednosti nego riješiti stotinu problema sve na isti način."

George Pólya (1887 - 1985), mađarski matematičar

- Pored analitičkog tipa učenika imamo geometrijski i harmonijski tip, tako da su vizualna pojašnjenja od velike pomoći učenicima za bolje razumijevanje i usvajanje matematičkih sadržaja.
- Zadavanje istog zadatka unutar različitih nastavnih cjelina pomaže učenicima da lakše usvoje i duže pamte različite nastavne sadržaje.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, doktorska disertacija, Sarajevo, 1998.
[2] B. Dakić: *Figurativni brojevi*, Miš, godina VII, br. 31, 2005.
[3] M. Jurčević: *Poligonalni brojevi*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2018.
[4] Z. Kurnik: *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola, br.10. 2000/2001.
[5] J. Matić: *Vizualizacije u matematici*, diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2018.
[6] https://mis.element.hr/list/16/broj/55/clanak/775/bez-rijeci;

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 16 – 18

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://www.umtk.info`

Jedna zanimljiva primjena Stjuartove teoreme

Šefket Arslanagić

Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu, koristeći dobro poznatu Stjuartovu [1] teoremu, dokazujemo zanimljivu trigonometrijsku nejednakost za trougao kod kojeg težište pripada upisanoj kružnici.

Povod za pisanje ovog rada je bio dokaz jedne trigonometrijske nejednakosti za trougao $\triangle ABC$ koja glasi:

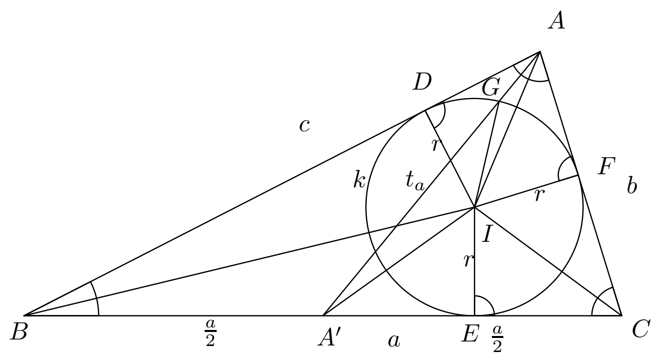
$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)>\frac{27}{5}\ , \tag{1}$$

gdje su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla $\triangle ABC$, a težište tog trougla, tačka G, pripada kružnici k upisanoj tom trouglu čiji je centar tačka I.

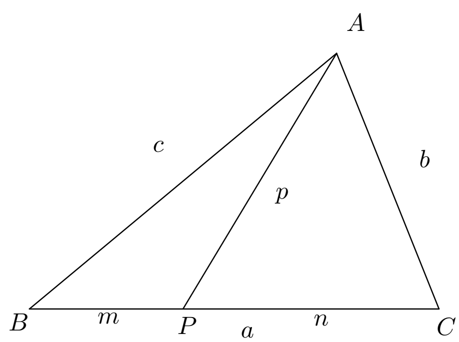
Najprije ćemo iskazati Stjuartovu teoremu. Posmatrajmo trougao $\triangle ABC$ i duž AP pri čemu je P tačka na stranici BC. Neka je $|AP|=p$, $|BP|=m$, $|CP|=n$, odakle je $|BC|=m+n$. Tada vrijedi

$$a(p^2+mn)=b^2m+c^2n\ . \tag{2}$$

Više raznih dokaza ove teoreme se može naći u [1–4]. Pređimo sada na dokaz nejednakosti (1).



Slika 1



Slika 2

Neka su tačke I i G (Slika 1) centar upisane kružnice k i težište trougla $\triangle ABC$ gdje $G\in k$. Primjenjujući Stjuartovu teoremu (2) (Slika 2) na trougao $\triangle IAA'$, dobijamo:

$$|IA|^2\cdot|GA'|+|IA'|^2\cdot|AG|=|IG|^2\cdot|AA'|+|GA|\cdot|GA'|\cdot|AA'|\ . \tag{3}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema, A-G nejednakost, stroga nejedankost
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad

[1]Matthew Stewart (1917.-1785.), škotski matematičar

Pošto težište G dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha trougla), to imamo da je $|GA'| = \frac{1}{3}t_a$, $|AG| = \frac{2}{3}t_a$, $|AA'| = t_a$, pa iz (3) slijedi zbog $|IG| = r$

$$|IA|^2 \cdot \frac{1}{3}t_a + |IA'|^2 \cdot \frac{2}{3}t_a = r^2 \cdot t_a + \frac{2}{9}t_a^3 \ ,$$

što je ekvivalenstno sa

$$\frac{1}{3}|IA|^2 + \frac{2}{3}|IA'|^2 = r^2 + \frac{2}{9}t_a^2 \ , \tag{4}$$

a odavde na osnovu činjenice da je IA' težišnica trougla $\triangle IBC$ te da je $|IA'|^2 = \frac{2|IB|^2+2|IC|^2-|BC|^2}{4}$, dobijamo iz (4)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}|IA|^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2|IB|^2+2|IC|^2-|BC|^2}{4} = r^2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(|IA|^2+|IB|^2+|IC|^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(|AD|^2+r^2+|BE|^2+r^2+|CF|^2+r^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left((s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+3r^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(3s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &-\frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3s^2 = 2(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) = 8(a^2+b^2+c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ac).
\end{aligned} \tag{5}$$

Na osnovu kosinusne teoreme slijedi

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \ , \\
b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\beta \ , \\
c^2 &= a^2+a^2-2ab\cos\gamma \ ,
\end{aligned}$$

a odavdje nakon sabiranja ovih jednakosti:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2-bc\cos\alpha-ac\cos\beta-ab\cos\gamma) \ ,$$

to jest

$$a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos\alpha+ac\cos\beta+ab\cos\gamma) \ . \tag{6}$$

Sada dobijamo iz (5) i (6)

$$5\left(\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\cos\beta}{b}+\frac{\cos\gamma}{c}\right) = 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ ,$$

a odavdje nakon sinusne teoreme

$$5\left(\frac{\cos\alpha}{2R\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{2R\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{2R\sin\gamma}\right) = 3\left(\frac{1}{2R\sin\alpha}+\frac{1}{2R\sin\beta}+\frac{1}{2R\sin\gamma}\right) \ ,$$

što je ekvivalentno sa

$$5(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)=3\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)\ . \tag{7}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine imamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)>\frac{3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\ ,$$

to jest

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}>\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\ . \tag{8}$$

Najzad iz (7) i (8) dobijamo

$$5(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)>\frac{27}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\ ,$$

to jest

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)>\frac{27}{5}\ .$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer u (8) vrijedi stroga nejednakost pošto bi vrijedila jednakost ako je $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, tj. ako je trougao $\triangle ABC$ jednakostranični u kome vrijedi da je $I\equiv G$, što nije slučaj jer tačka G pripada upisanoj kružnici k u trougao $\triangle ABC$ čiji je centar tačka I.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.
[3] A. Marić: *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
[4] E. Specht: *Geometria-sciential atlantis*, Otto van Guericke Universität, Magdeburg, 2001.

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 19 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Parabola - jedna osobina

Jens Carstensen[a], Alija Muminagić[a]

[a] *Frederiksberg, Danska*

Sažetak: U radu se rješava problem određivanja jednadžbe krivulje, odnosno geometrijskog mjesta tačaka, u ravni koje zadovoljava zakon odbijanja svjetlosti.

1. Uvod

Iz optike nam je dobro poznat zakon odbijanja svjetlosti, prema kojem upadni zrak, normala i odbojni zrak leže u istoj ravni i pri tome je ugao između upadnog zraka i normale jednak uglu između normale i odbojnog zraka. Lahko se pokazuje sljedeće: ako u fokus parabole stavimo izvor svjetlosti, onda zraka svjetlosti pada na parabolu i odbija se tako da je paralelna s osom parabole. Obrnuto, ako zraka svjetlosti paralelna s osom parabole pada na parabolu, onda se odbija tako da prolazi kroz fokus parabole (na ovom principu zasnovana je konstrukcija paraboličnog reflektora). Razmotrimo, međutim, sljedeći problem: pretpostavimo da nam nije poznata ova osobina parabole i odredimo jednadžbu krivulje u ravni koja zadovoljava zakon odbijanja svjetlosti, odnosno geometrijsko mjesto tačaka s navedenim svojstvom.

2. Rješenje problema

Neka je $P(x, y)$ proizvoljna tačka na krivulji, $F(a, 0)$ tačka na $Ox-$osi kroz koju prolazi zraka svjetlosti nakon odbijanja zrake paralelne s $Ox-$osom. Označimo sa K presječnu tačku normale na tangentu t u tački P sa $Ox-$osom i $\sphericalangle KPF = \alpha$ (vidi Sliku 1). Jednadžba tražene krivulje neka je $y = f(x)$. Poznato je da je koeficijent smjera tangente y', a koeficijent smjera normale $-\frac{1}{y'}$. Nije teško pokazati da su uglovi upravo kao na Slici 1. Tako imamo da je, zbog $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$,

$$k = -\frac{1}{y'} = \tan(180^\circ - \alpha) \Longleftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{y'} \tag{1}$$

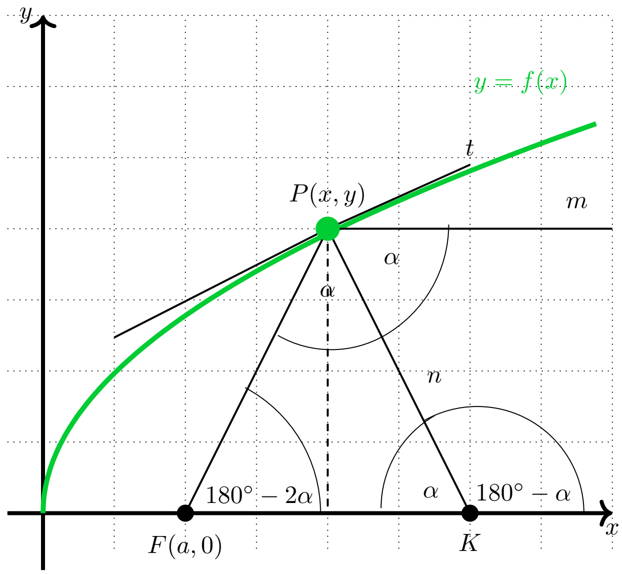
Koeficijent smjera pravca kroz tačke F i P jednak je

$$k = \tan(180^\circ - 2\alpha) = -\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1},$$

a kako je također $k = \frac{y}{x-a}$, imamo

$$k = \frac{y}{x-a} = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1} =^{(1)} \frac{2\frac{1}{y'}}{(\frac{1}{y'})^2 - 1} = \frac{2y'}{1 - y'^2} \Longleftrightarrow y \cdot y'^2 + 2(x-a)y' - y = 0.$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: parabola, diferencijalne jednadžbe, zakona prelamanja svjetlosti
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad



Slika 1: Ilustracija zakona prelamanja svjetlosti

Ovo je diferencijalna jednadžba iz koje slijedi

$$y' = \frac{-2(x-a) \pm \sqrt{4(x-a)^2 + 4y^2}}{2y} = \frac{-(x-a) \pm \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{y}. \tag{2}$$

Definirajmo funkciju r sa $y = r(x-a)$, pa je $y' = r'(x-a) + r$, što uvrštavanjem u (2) daje

$$r'(x-a) + r = \frac{-(x-a) \pm \sqrt{(x-a)^2 + r^2(x-a)^2}}{r(x-a)} \Longleftrightarrow r'(x-a) + r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+r^2}}{r}$$

Ovdje možemo razdvojiti promjenljive

$$\begin{aligned} rdx + (x-a)dr &= \frac{(-1 \pm \sqrt{1+r^2})dx}{r} \Longleftrightarrow r^2dx + r(x-a)dr = (-1 \pm \sqrt{1+r^2})dx \\ &\Longleftrightarrow (r^2 + 1 \pm \sqrt{1+r^2})dx = -r(x-a)dr \\ &\Longleftrightarrow \frac{rdr}{-r^2 - 1 \pm \sqrt{1+r^2}} = \frac{dx}{x-a}. \end{aligned}$$

Uvedimo smjenu $t^2 = 1 + r^2$. Nakon diferenciranja dobijemo

$$2t\frac{dt}{dx} = 2r\frac{dr}{dx} \Longleftrightarrow tdt = rdr. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (2) imamo

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{tdt}{-t^2 \pm t} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x-a} = \frac{dt}{\pm 1 - t},$$

pa je nakon integraljenja

$$\ln|x-a| = -\ln|\pm 1 - t| + C, \ C\text{-konstanta}.$$

Dalje je

$$\ln|(x-a)(\pm 1+t)| = C \iff (x-a)(\pm 1+t) = C_1, C_1 > 0.$$

Smjenom "unatrag" dobijemo

$$(x-a)t = (x-a)\sqrt{1+r^2} = \sqrt{(x-a)^2+(x-a)^2r^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

i time

$$\begin{aligned}\pm(x-a)-\sqrt{(x-a)^2+y^2} = C_1 \quad &\iff \quad \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \pm(x-a)-C_1 \\ &\iff \quad (x-a)^2+y^2 = (x-a)^2+C_1^2 \pm 2C_1(x-a) \\ &\iff \quad y^2 = \pm 2C_1(x-a)+C_1^2 \\ &\iff \quad y^2 = 2C_2(x-a)+C_2^2,\end{aligned}$$

gdje smo $\pm C_1$ zamijenili s C_2.
Posljednja jednadžba predstavlja familiju parabola. Parabolu koja prolazi kroz tačku $(0,0)$ ćemo dobiti određivanjem C_2, to jest

$$0 = -2C_2a + C_2^2 \iff C_2 = 2a,$$

pa tražena kriva ima jednadžbu

$$y^2 = 4a(x-a)+4a^2 \iff y^2 = 4ax.$$

Literatura

[1] J. Carstensen: *Parablen og refleksionsegenskaben*, Matematik Mag, april 2008.
[2] Z. Kadelburg, V. Milić, S. Ognjanović: *Analiza sa algebrom 4*, "Krug" Beograd, 1999.
[3] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2020), 22 – 28

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Tragom jedne algebarske nejednakosti

Dragoljub Milošević

Republika Srbija

Sažetak: U ovom radu biće riječi o jednoj algebarskoj nejednakosti, njenim proširenjima i primjenama.

1. Umjesto uvoda

Tokom pripremanja za matematička takmičenja, Emina i Zaim su rješavali zadatak: Dokaži da, za pozitivne brojeve a, b, x, y vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \ . \tag{1}$$

Eminino rješenje: Na osnovu poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}a^2\frac{x}{y}b^2} = 2ab \ .$$

Dodavanjem objema stranama ove nejednakosti po $a^2 + b^2$ dobijamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \\
\iff &\frac{x+y}{x}a^2 + \frac{y+x}{y}b^2 \geq (a+b)^2 \\
\iff &(x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \geq (a+b)^2 \\
\iff &\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \ ,
\end{aligned}$$

to jest (1).
Zaimovo rješenje: Iz

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2}{xy(x+y)} = \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)} \geq 0 \ ,$$

direktno slijedi nejednakost (1).

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: nejednakosti
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad

2. Primjena nejednakosti (1)

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1).

Primjer 2.1. *Za pozitivne brojeve a i b vrijedi*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \ . \tag{2}$$

Rješenje: Ako u dokazanu nejednakost (1) uvrstimo $x = b$ i $y = a$ dobijamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a+b)^2}{b+a} \ ,$$

a odavdje slijedi tražena nejednakost (2). □

Primjer 2.2. *Ako su a, b dužine kateta i c dužina hipotenuze pravouglog trougla ABC, onda vrijedi*

$$a + b \leq c\sqrt{2} \ . \tag{3}$$

Rješenje: Ako umjesto x i y stavimo broj 1 u nejednakost (1), imamo

$$\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} \geq \frac{(a+b)^2}{1+1} \ ,$$

ili

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \ ,$$

odakle je

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \ .$$

Kako je $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorina teorema !), iz posljednje nejednakosti slijedi željena nejednakost (3). □

Primjer 2.3. *Za pozitivne brojeve a i b je*

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \ . \tag{4}$$

Za ovaj primjer ćemo dati dva rješenja.

Rješenje: Ako u (1) stavimo $x = \dfrac{1}{a}$ i $y = \dfrac{1}{b}$ dobijamo

$$\frac{a^2}{\frac{1}{a}} + \frac{b^2}{\frac{1}{b}} \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \ ,$$

ili

$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{b+a}{ab}} \ .$$

Iz posljednje nejednakosti, nakon skraćivanja sa $a + b$, slijedi nejednakost (4). □

Rješenje: Iz

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab(a+b) &= a^3 - a^2 b - (ab^2 - b^3) = a^2(a-b) - b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)(a-b)(a+b) \\ &= (a-b)^2(a+b) \geq 0 \ , \end{aligned}$$

dobijamo željenu nejednakost (4). □

Primjer 2.4. *Ako su a i b pozitivni brojevi, onda je*

$$\frac{a}{3b+a} + \frac{b}{3a+b} \geq \frac{1}{2} \ . \tag{5}$$

Rješenje: Neka je $\dfrac{a}{3b+a} + \dfrac{b}{3a+b} = L$. Ako prvi razlomak proširimo sa a i druga sa b, pa primijenimo nejednakost (1), dobijamo

$$L = \frac{a^2}{a(3b+a)} + \frac{b^2}{b(3a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{(a^2+2ab+b^2)+4ab} \ ,$$

to jest,

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+4ab} \ . \tag{6}$$

S obzirom da je tačna nejednakost $0 \leq (a-b)^2$ ekvivalentna sa $4ab \leq (a+b)^2$, iz (6) slijedi

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2} \ ,$$

to jest $L \geq \dfrac{1}{2}$. □

3. Neka proširenja nejednakosti (1)

Nameće se pitanje validnosti nejednakosti koja je slična nejednakosti (1):

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \ , \tag{7}$$

gdje su a, b, c, x, y, z pozitivni brojevi.

Rješenje: Dodamo li lijevoj i desnoj strani nejednakosti (1) po $\dfrac{c^2}{z}$, imamo

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \ . \tag{8}$$

Primjenom nejednakosti (1) na desnu stranu nejednakosti (8), dobijamo

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z} \ . \tag{9}$$

Iz nejednakosti (8) i (9) slijedi nejednakost (7). □

Napomena 3.1. *Jednakost u (7) vrijedi za sve realne brojeve a, b, c (dakle, i za nepozitivne brojeve a, b, c).*

Posljedica 3.2. *Za $x = y = z = 1$ imamo*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \ .$$

Ova nejednakost je za $a, b, c > 0$ ekvivalentna sa

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \ ,$$

što predstavlja nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine tri pozitivna broja a, b, c.

Posljedica 3.3. *Za $a = b = c = 1$ dobijamo*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \ ,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3} \ .$$

Ovo je nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine tri pozitivna broja x, y i z.

Idemo korak dalje, ispitajmo tačnost nejednakosti koja, u odnosu na nejednakost (1), umjesto kvadrata brojeva a, b i $a + b$, ima kubove istih elemenata, to jest

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{x+y} \ .$$

Naprimjer, ako u ovu nejednakost stavimo $a = b = 1$ i $x = y = 2$ imamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2^3}{2+2} \ ,$$

to jest $1 \geq 2$, što nije tačno.
Sada, da vidimo šta se dešava ako desnu stranu te nejednakosti smanjimo dva puta, to jest ispitajmo da li je validna sljedeća nejednakost

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)} \ . \tag{10}$$

Za $a = b = 1$ i $x = y = 2$ dobijamo $1 \geq 1$, što je tačno. Pokušajmo dokazati nejednakost (10).
Rješenje: Nejednakost (10) je ekvivalentna sa

$$2(x+y)(a^3y + b^3x) \geq xy(a+b)^3 \ ,$$

to jest sa

$$a^3xy + b^3xy + 2(a^3y^2 + b^3x^2) \geq 3a^2bxy + 3ab^2xy \ . \tag{11}$$

Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za tri pozitivna broja, imamo

$$a^3xy + a^3y^2 + b^3x^2 \geq 3\sqrt[3]{a^3xya^3y^2b^3x^2} = 3a^2bxy$$

i

$$a^3y^2 + b^3x^2 + b^3xy \geq 3ab^2xy \ .$$

Ako saberemo posljednje dvije nejednakosti dobijamo nejednakost (11). Ovim je potvrđena validnost nejednakosti (11), a samim tim i validnost nejednakosti (10). □

Napomena 3.4. *Za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi*

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \ . \tag{12}$$

Ova nejednakost se može dokazati pomoću metode primijenjene za dokaz nejednakosti (10).

4. Primjena nejednakosti (7)

Ukazat ćemo na nekoliko primjera primjene nejednakosti (7).

Primjer 4.1. *Dokažimo da je za pozitivne brojeve x, y, z tačna nejednakost*

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}\ . \tag{13}$$

Rješenje: Neka je

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}=L\ .$$

Tada je

$$L=\frac{x^2}{x(x+2y+3z)}+\frac{y^2}{y(y+2z+3x)}+\frac{z^2}{z(z+2x+3y)}\ ,$$

pa je, na osnovu dokazane nejednakosti (7):

$$L\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)}\ . \tag{14}$$

Poznato je da vrijedi

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \tag{15}$$

i

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\ . \tag{16}$$

($\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ (tačno)). Sabiranjem nejednakosti (15) i (16) dobijamo

$$2(x+y+z)^2\geq x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)\ . \tag{17}$$

Iz nejednakosti (17) i (14) slijedi $L\geq\frac{1}{2}$, što je trebalo i dokazati. □

Primjer 4.2. *Dokažimo da za pozitivne brojeve vrijedi*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2\ . \tag{18}$$

Rješenje: Primjenom nejednakosti (7) dobijamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}\ ,$$

a odavdje, zbog $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$, slijedi nejednakost (18). □
Rješenje: Korištenjem nejednakosti (12) imamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^6}{a^3b}+\frac{b^6}{b^3c}+\frac{c^6}{c^3a}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3b+b^3c+c^3a)}\ . \tag{19}$$

Preostaje nam da dokažemo tačnost sljedeće nejednakosti

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)\ . \tag{20}$$

Naime, ako u nejednakost (16) stavimo

$$x = a^2 + bc - ab,\ y = b^2 + ca - bc,\ z = c^2 + ab - ca\ ,$$

dobijamo željenu nejednakost (20). Konačno, iz nejednakosti (20) i (19) slijedi nejednakost (18). □

Rješenje: Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za dva pozitivna broja dobijamo

$$\frac{a^3}{b} + ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b}ab} = 2a^2, \quad \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2, \quad \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2\ ,$$

pa je

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\ . \tag{21}$$

Iz nejednakosti (21) i $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ slijedi nejednakost (18). □

5. Zadaci za vježbanje

Prva tri zadatka mogu rješavati osnovci, a preostalih pet-srednjoškolci.

Zadatak 5.1. *Ako su x i y pozitivni brojevi, dokaži tačnost nejednakosti:*

a) $\dfrac{x}{2y+x} + \dfrac{y}{2x+y} \geq \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Zadatak 5.2. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi*

a) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c,$

b) $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leq 1$.

Zadatak 5.3. *Dokaži da za dužine kateta a, b i dužinu hipotenuze c pravouglog trougla vrijedi nejednakost*

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}c^4\ .$$

Zadatak 5.4. *Nejednakost (7) dokaži na način različit od prikazanog.*

Zadatak 5.5. *Neka su x, y, z, k pozitivni realni brojevi i $M = \dfrac{x}{kx+y+z} + \dfrac{y}{x+ky+z} + \dfrac{z}{x+y+kz}$. Dokaži da je*

a) $M \geq \dfrac{3}{k+2}$ *za* $0 < k \leq 1,$

b) $M \leq \dfrac{3}{k+2}$ *za* $k \geq 1.$

Zadatak 5.6. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi i $a + b + c = 1$, dokaži da je*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}\ .$$

Zadatak 5.7. *Ako je $k > 1$, onda za dužine stranica a, b, c trougla $\triangle ABC$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{k(b+c)-a} + \frac{b}{k(c+a)-b} + \frac{c}{k(a+b)-c} \geq \frac{3}{2k-1} \ .$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 5.8. *Ako su a, b, c dužine stranica i t_a, t_b, t_c dužine težišnica trougla $\triangle ABC$, onda vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2} \geq 4 \ .$$

Literatura

[1] Z. Cvetovski: *Inequalities (Theorems, Tehniqueus and Selected Problems)*, Berlin/Heidelberg, Springer, 2012.
[2] D. Milošević: *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta, Beograd 55/3, 8-10, 2008/09.
[3] M. Milošević: *Neke primene jedne algebarske nejednakosti*, Matematički list, Beograd XLIX, 4, 1-3, 2014/15.

2

KUTAK ZA ZADATKE

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 30 – 31

Zabavna matematika - Detektivski zadaci

Zadatak 1. *Alisa je starija od Barbare i Tome. Tomo je stariji od Dane. Bakir je mlađi od Barbare, ali je stariji od Dane. Bakir je mlađi od Tome. Alisa je mlađa od Fani. Poredajte ove likove od najmlađeg do najstarijeg!*

Zadatak 2. *Imamo pet kutija: bijela, crna, crvena, plava i zelena i deset kuglica, po dvije u istim bojama kao i kutije. U svaku kutiju su stavljene po dvije kuglice na sljedeći način:*

- *Ni jedna kuglica nije u kutiji iste boje kao i kuglica.*
- *U plavoj kutiji se nalazi jedna crna kuglica.*
- *U crvenoj kutiji nema plavih kuglica.*
- *U jednoj od kutija bijele ili crne boje se nalaze po jedna crvena i jedna zelena kuglica.*
- *U crnoj kutiji su loptice hladnih tonova (hladne boje su zelena i plava).*
- *U jednoj kutiji su zajedno jedna bijela i jedna plava kuglica.*

U kojoj kutiji su koje kuglice?

Zadatak 3. *Tri predavača, Enes, Vedad i Nermin predaju tri različita predmeta, analizu, algebru i geometriju, na tri različite godine studija matematike.*

- *Enes ne predaje na prvoj godini, a Vedad ne predaje na trećoj godini studija.*
- *Onaj koji predaje na prvoj godini, ne predaje geometriju.*
- *Onaj koji predaje na drugoj godini predaje analizu.*
- *Vedad ne predaje algebru.*

Šta i kome predaje Nermin?

Zadatak 4. *Arči, Bos i Vesli su gangsteri i jedan od njih trojice je opljačkao banku u Chikagu. Na saslušanju savki je dao izjavu:*

1. *Arči:*
   - *Ja nisam opljačkao banku.*
   - *Na dan pljačke nisam bio u Chikagu.*
   - *Banku je opljačkao Vesli.*
2. *Bos:*
   - *To je uradio Vesli.*
   - *I da sam je ja opljačkao, ne bih to priznao.*
   - *Što će mi to kad imam dovoljno novca.*
3. *Vesli:*

Ciljna skupina: svi uzrasti

- *Ja nisam to uradio.*
- *Odavno već razmišljam o bankama.*
- *Arči je u pravu kad kaže da toga dana nije bio u Chikagu.*

U daljem ispitivanju svaki od osumnjičenih je priznao da su dvije od tri izjave koje je dao tačne, a jedna je netačna. Ko je opljačkao banku?

Zadatak 5. *Pet ljudi različitih nacija žive u pet različitih kuća, puše pet različitih vrsta cigara, piju pet različitih vrsta pića i imaju pet različitih kućnih ljubimaca. O njima znamo sljedeće:*

- *Englez živi u crvenoj kući.*
- *Španac ima psa.*
- *U zelenoj kući piju kahvu.*
- *Ukrajinac pije čaj.*
- *Zelena kuća je predzadnja, a prije bijele kuće.*
- *U žutoj kući puše cigarete "Kent".*
- *U srednjoj kući piju mlijeko.*
- *Čovjek koji puši "Old gold" uzgaja puževe.*
- *Norvežanin živi u prvoj kući.*
- *Čovjek koji puši "Marlboro" komšija je čovjeku koji ima lisicu.*
- *Cigarete "Kent" puše do kuće u kojoj uzgajaju konje.*
- *Čovjek koji puši "Lucky strike" pije orandžadu.*
- *Japanac puši "Winstton".*
- *Norvežanin živi u susjedstvu plave kuće.*

Ko pije vodu i ko je vlasnik zebre?

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 32 – 33

Nagradni zadatak: Problem desetocifrenog broja

John Horton Conway bio je jedan od najsvestranijih matematičara prošlog vijeka koji je dao veliki doprinos teoriji grupa, analizi, topologiji, teoriji brojeva, geometriji, algebri i teoriji kombinatornih igara. Njegovo duboko, ali dostupno djelo, osobnost veća od života, neobičan smisao za humor i sposobnost razgovora o matematici sa svima koji bi ga slušali, učinili su ga središtem pozornosti i popularnom ikonom svugdje gdje je išao, među matematičarima ali i među amaterima. Njegova predavanja o brojevima, igrama, magiji, čvorovima, dugama, pločicama, slobodnoj volji i još mnogo toga zarobila su maštu javnosti.

Conway, koji je umro u 82. godini od komplikacija povezanih s COVID-19, bio je ljubitelj igara svih vrsta. Proveo je sate u zajedničkim prostorijama Univerziteta Cambridge u Velikoj Britaniji i Univerziteta Princeton u New Jerseyju, igrajući backgammon, Go i druge razbibrige, a neke i od vlastitih kreacija. Nekoliko najpoznatijih Conwayevih doprinosa dobijeno je dok je razmišljao o igrama i njihovim strategijama. Možda je njegovo najveće otkriće bila iznenadujuća korespondencija brojeva i igara koja ga je dovela do uistinu gigantskog sistema, nadrealnih brojeva, koji je zapanjio matematičku zajednicu. Sadržao je ne samo pozitivne i negativne stvarne brojeve koje svi znamo, već i nove beskrajno velike brojeve, beskrajno malene i sve vrste novih brojeva između.

Conwayev rad na nadrealnim brojevima proizašao je iz utjecajnog istraživačkog projekta i knjige *Winning Ways for your Mathematical Plays* (1982), zbirke informacija o teoriji igara, napisane s Elwynom Berlekampom i Richardom Guyem. Ova fascinacija igrama također je Conwaya dovela do razvoja *Igre života*, ćelijskog automata u kojem se obrazac živih ili mrtvih stanica u dvodimenzionalnoj mreži razvija prema skupu pravila za 'rođenje' i 'smrt' svake od njih, bazirano na statusu najbližih susjeda. Jednostavnost i pristupačnost ove igre popularizirao je 1970. naučni američki novinar Martin Gardner. Do sredine 1970-ih procijenjeno je da četvrtina svjetskih računara koristi Conwayevu *Game of Life* kao čuvar zaslona.

Conway, kome je John von Neumann bio profesor matematike na Univerzitetu Princeton prije penzionisanja 2013. godine, rođen je u Liverpoolu u Velikoj Britaniji 1937. Otac mu je zarađivao igranjem karata, a kasnije je radio kao hemijski laboratorijski tehničar u lokalnoj visokoj školi, školi koju su pohađali George Harrison i Paul McCartney. Conway je, poput svoje majke, bio strastveni čitalac. Pokazao je rano zanimanje za matematiku; do 11. godine želio je biti matematičar na Cambridgeu. Doktorirao je na Univerzitetu u Cambridgeu 1964. godine pod mentorstvom Harolda Davenporta, a zatim i radi u Cambridgeu kao predavač. 1983. postao je profesor. 1987. godine preselio se u Princeton.

Conway je slavu prvi put stekao 1968. godine utvrdivši svih 8.315.553.613.086.720.000 simetrija Leech rešetke - izvanredno pravilnog rasporeda tačaka u 24-dimenzionalnom prostoru koji je John Leech otkrio 1967. To je dovelo do njegovog otkrića Conwayevih jednostavnih grupa, koje su bile temeljne u klasifikaciji konačnih jednostavnih grupa - jedno od glavnih dostignuća matematike dvadesetog vijeka.

Conway je imao primarnu ulogu u istraživanju i sastavljanju ikonične knjige o simetriji *ATLAS konacnih grupa* (1985). Njegovo duboko poznavanje simetrija dovelo ga je do toga da sa svojim koautorom ATLAS-a Simonom Nortonom predloži monstruozne mjesečine. Ove su, po prvi put, ozbiljno povezale grupe konačnih simetrija s analizom - a time i diskretnu matematiku s nediskretnom matematikom. Danas nagađanja o Moonshineu igraju ključnu ulogu u fizici - uključujući razumijevanje crnih rupa u teoriji struna - nadahnjujući val daljnjih takvih otkrića koja povezuju algebru, analizu, fiziku i šire.

Conwayevo otkriće novog invarijantnog čvora - koji se koristi za razdvajanje različitih čvorova - nazvanog Conwayev polinom, postalo je važna tema istraživanja u topologiji. U geometriji je otkrio ključna otkrića u proučavanju simetrija, naboja kuglica, rešetki, poliedara i popločavanja, uključujući osobine kvaziperiodičnih popločavanja kako ih je razvio Roger Penrose. U algebri je Conway sa svojim dugogodišnjim saradnikom Neilom Sloaneom otkrio još jedan važan sistem brojeva, ikozijanaca. U teoriji brojeva, Conway je pokazao da je svaki cijeli broj zbir najviše 37 petih potencijala. Također je razvio 15-teorem (sa svojim studentom Williamom Schneebergerom) i 290-konjukturu; to su bile velike generalizacije teorema o četiri kvadrata, koje je dokazao matematičar Joseph-Louis Lagrange u osamnaestom vijeku, koji kaže da je svaki pozitivan cijeli broj zbir četiri kvadratna broja (na primjer, 21 je zbir 16, 4, 1 i 0).

Conway je bio nezaboravni učitelj i govornik, a brojni trikovi koje je izvodio za ilustraciju matematičkih pojmova uključuju: odmah navođenje dana u sedmici za bilo koji datum u povijesti, vrćenje vješalice s novčićem uravnoteženim na unutrašnjem rubu, savijanje jezika u jezik raznih oblika, uravnotežujući predmete na bradi i održavajući čitava predavanja u kojima je svaka riječ koju je izgovorio imala samo jedan slog.

Volio je razgovarati o matematici i igrama, kao i o historiji, etimologiji i filozofiji. Njegov doprinos kulturi, kroz njegov rad i dostignuća, imat će trajni utjecaj. Zbog izvanredne dubine njegovih matematičkih otkrića - i zaigranog i velikodušnog načina na koji ih je dijelio s drugima - jako će nam nedostajati.

(Preuzeto iz Nature 582, 27 (2020))

Ciljna skupina: svi uzrasti

Jedan od problema koje pripisujemo Johnu Conwayu je i naš nagradni zadatak.

Zadatak 1. *Odrediti desetocifreni broj* ***abcdefghij*** *čije su sve cifre različite, takav da vrijedi*

a *je djeljiv sa 1.*
ab *je djeljiv sa 2.*
abc *je djeljiv sa 3.*
abcd *je djeljiv sa 4.*
abcde *je djeljiv sa 5.*
abcdef *je djeljiv sa 6.*
abcdefg *je djeljiv sa 7.*
abcdefgh *je djeljiv sa 8.*
abcdefghi *je djeljiv sa 9.*
abcdefghij *je djeljiv sa 10.*

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom) Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 34–35

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 31. *Sam lav može da pojede ovcu za dva sata, vuk za tri sata, a pas za šest sati. Za koje vrijeme bi oni zajedno pojeli ovcu?*

Zadatak 32. *Redari Damir i Ema mjerili su učionicu koracima. Damir jednim korakom izmjeri 80 cm. Emin korak je za 30 cm kraći i zato je, mjereći dužinu učionice, napravila 9 koraka više nego Damir, a mjereći širinu, napravila je 6 koraka više nego Damir. Koliko iznosi dužina i širina učionice?*
(Riješiti bez upotrebe jednačina!)

Zadatak 33. *Zbir kućnih brojeva jedne strane ulice (između dvije raskrsnice) iznosi 333. Koji su to brojevi? (Brojevi na različitim stranama ulice su različite parnosti.)*

Zadatak 34. *Ako bi se spoljašnji ugao kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ povećao za 35°, a spoljašnji ugao kod tjemena B umanjio za 20°, onda bi se unutrašnji ugao kod tjemena C povećao za svoju četvrtinu. Koliki je unutrašnji ugao kod tjemena C?*

Zadatak 35. *Svakom od brojeva 164 i 100 dodati jedan te isti cijeli broj tako da oba dobijena zbira budu kvadrati cijelih brojeva. Koji broj treba dodati?*

Zadatak 36. *Trojica ljudi, Mujo, Haso i Huso su na vašaru sa svojim suprugama. Imena supruga su Fata, Hana i Lamija. Utvrditi ko je s kim oženjen, ako je poznato sljedeće:*

- *Svako od ovih šest lica platio je svaku kupljenu stvar onoliko KM koliko je stvari kupilo.*
- *Svaki muškarac potrošio je 63 KM više od svoje žene.*
- *Mujo je kupio 23 stvari više od Hane, a Haso 11 više od Fate.*

Zadatak 37. *Od svih dvocifrenih brojeva odrediti onaj koji podijeljen zbirom svojih cifara daje najveću vrijednost.*

Zadatak 38. *Riješiti jednačinu u skupu cijelih brojeva:* $x^3 - 10x^2 + xy - y = 0$.

Zadatak 39. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ s osnovicom BC nalazi se tačka M takva da je* $\measuredangle MBC = 30^\circ$ *i* $\measuredangle MCB = 10^\circ$. *Odrediti* $\measuredangle AMC$ *ako je* $\measuredangle BAC = 80^\circ$.

Zadatak 40. *Postoji li među 2020 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva dva čija je razlika djeljiva sa 2019?*

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola
Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 15.04.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 31. *Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 4, njegov unutrašnji ugao se poveća za* $15°$. *Za koliko se poveća broj dijagonala?*

Zadatak 32. *Odrediti najveći prirodni broj* n *takav da je broj* $n^2 + 2020$ *djeljiv sa* $n + 20$.

Zadatak 33. *Definišimo funkciju* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *na sljedeći način*

$$f(1) = 3\ ,\ \ f(n) = \begin{cases} f(n-1)+1 & ; \quad \text{za } n \text{ parno} \\ f(n-1)+2 & ; \quad \text{za } n \text{ neparno} \end{cases}$$

Izračunati $f(2021)$*!*

Zadatak 34. *Dokazati jednakost*

$$(4+\sqrt{15})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} = 2\ .$$

Zadatak 35. *Riješiti jednačinu:*

$$8\cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}\ .$$

Zadatak 36. *Odrediti najmanju vrijednost polinoma*

$$P(x,y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45\ .$$

Zadatak 37. *Dvije prave paralelne sa osnovicom trapeza dijele njegove krakove na tri jednaka dijela i dati trapez na tri trapeza. Izračunati površinu "srednjeg" trapeza, ako su površine "krajnjih" trapeza respektivno* P_1 *i* P_2.

Zadatak 38. *Dokazati da za ma koji prirodan broj* n *veći od 1 važi nejednakost*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}\ .$$

Zadatak 39. *Odrediti sve vrijednosti ugla* α *u segmentu* $0 \le \alpha \le 2\pi$, *za koje je nejednakost*

$$\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - (2\sin\alpha - 3)x + 1 > 0\ ,$$

ispunjena za svako $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 40. *Zbir tri broja je 114. Oni se mogu posmatrati kao tri uzastopna člana geometrijskog niza ili kao prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Odrediti ove brojeve!*

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 36–45

Rješenja konkursnih zadataka 21 – 30

Osnovna škola

Zadatak 21. *Neka je*

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}\,, \;\; A \backslash B = \{2, 6\} \;\; i \; B \backslash A = \{0, 8\}\,.$$

Odrediti $A \cap B$.

Rješenje: Iz $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$ i $A \backslash B = \{2, 6\}$ zaključujemo da je

$$B = \{0, 1, 3, 8\}\ .$$

Iz $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$ i $B \backslash A = \{0, 8\}$ zaključujemo da je

$$A = \{1, 2, 3, 6\}\ .$$

Sada koristeći se definicijom presjeka skupova imamo da je $A \cap B = \{1, 3\}$. □

Zadatak 22. *Koliko brojeva sadrži niz:* $3, 8, 13, 18, ..., 118, 123$.

Rješenje: Ako svaki član ovog niza umanjimo za 3, dobijamo niz $0, 5, 10, 15, \ldots, 120$. Ovo su svi nenegativni cijeli brojevi djeljivi sa 5, a koji su manji ili jednaki 120. Bez 0 takvih ima $\dfrac{120}{5} = 24$. Dakle, naš niz ima 25 članova. □

Zadatak 23. *Učenici koji na svojim majicama nose brojeve 1,2,3,4 osvojili su na krosu prva četiri mjesta. Odrediti redoslijed učenika na cilju ako se zna:*

a) brojevi mjesta koje su učenici osvojili na krosu ne poklapaju se s brojevima koje učenici nose na majicama;

b) učenik s brojem 3 na majici nije osvojio prvo mjesto;

c) broj na majici učenika koji je osvojio četvrto mjesto poklapa se s brojem mjesta koji je osvojio onaj učenik, čiji je broj na majici ujedno broj mjesta koji je osvojio učenik s brojem 2 na majici.

Rješenje: Napravimo tabelu u kojoj vrste predstavljaju redni broj učenika, a kolone zauzeto mjesto u utrci. Upisivanjem 0 u presjeku i-te vrste i j-te kolone naglašavamo da i-ti učenik nije zauzeo j-to mjesto. U suprotnom upisujemo 1. Unošenjem podataka iz uslova a) i b) imamo stanje prikazano tabelom (a).

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0			
	2		0		
	3	0		0	
	4				0

(a)

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0			
	2	0	0		
	3	0		0	
	4	1	0	0	0

(b)

Prvo mjesto zauzeo je učenik sa rednim brojem ili 2. ili 4.
Pretpostavimo da je učenik sa rednim brojem 4. bio prvi. Stanje sada izgleda kao u tabeli (b).

Ciljna skupina: Osnovna škola, Srednja škola

Sada vidimo da učenik sa rednim brojem 2. ne može biti IV jer bi u tom slučaju učenik 1. morao biti III, a to ne može zbog uslova c) (tabela (c)). Dakle, ova varijanta otpada, to jest I mjesto je zauzeo učenik sa rednim brojem 2. Stanje je prikazano tabelom (d).

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0

(c)

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0			
2	1	0	0	0
3	0		0	
4	0			0

(d)

Saglasno uslovu c) četvrto mjesto je osvojio učenik sa rednim brojem koji se poklapa sa osvojenom mjestom učenika 2. Dakle, IV mjesto je osvojio učenik sa rednim brojem 1 (tabela (e)).

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0	0	0	1
2	1	0	0	0
3	0		0	
4	0			0

(e)

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0	0	0	**1**
2	**1**	0	0	0
3	0	**1**	0	0
4	0	0	**1**	0

(f)

Vidimo sada da da je II mjesto osvojio učenik sa rednim brojem 2., a time ostaje da je III mjesto osvojio učenik sa rednim brojem 4. (tabela (f)). □

Zadatak 24. *Debljina jednog lista hartije iznosi jednu četvrtinu mm. Ako se taj list savije napola i tako se nastavi s presavijanjem prethodno dobivenog uvijek napola, kolika će biti debljina ako se izvrši 12 presavijanja?*

Rješenje: Prilikom svakog presavijanja debljina sloja hartije se udvostruči. Zbog toga debljina sloja hartije mora biti

$$D = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{12} = 2^{10} = 1024\ mm.$$

□

Amel Halilović IXb, JU OS "Hasan Kikić" Gradačac

Zadatak 25. *Dati su razlomci $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$. Naći najmanji broj takav da količnik tog broja sa svakim od datih razlomaka bude prirodan broj.*

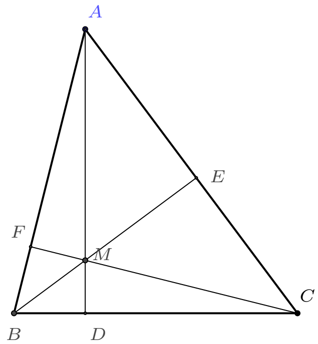
Rješenje:

$$A \cdot \frac{35}{396} = k \Longleftrightarrow A \cdot \frac{396}{35} = k \quad k \in \mathbb{N}$$
$$A \cdot \frac{28}{297} = l \Longleftrightarrow A \cdot \frac{297}{28} = l \quad l \in \mathbb{N}\ .$$

Sada imamo da je $A = NZS\{28, 35\}$, a to je broj $A = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$. □

Zadatak 26. *Visine trougla $\triangle ABC$ sijeku se u tački M. Ako je $|AM| = |BC|$, izračunati veličinu unutarnjeg ugla trougla kod tjemena A.*

Rješenje:

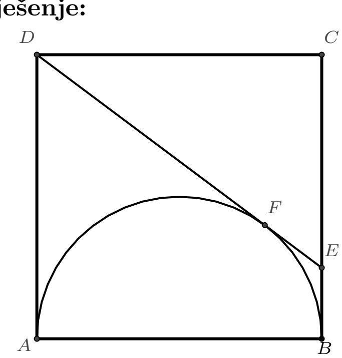


Po pretpostavci je $\overline{AM} = \overline{BC}$. Tada je $\triangle BCE \simeq \triangle AME$ ($\measuredangle BEC = \measuredangle AEM = 90°$, $\overline{AM} = \overline{BC}$, $\measuredangle EBC = \measuredangle EAM$ kao uglovi sa okomitim kracima). Odavde zaključujemo da vrijedi $\overline{AE} = \overline{BE}$. Dakle, $\triangle ABE$ je pravougli, jednakokraki trougao, a to znači da je $\measuredangle EAM + \measuredangle EBC = 90°$. Kako smo već ranije zaključili da su ova dva ugla podudarna, imamo da je ugao kod tjemena A, to jest $\measuredangle BAE$ je $45°$.

□

Zadatak 27. *Dat je kvadrat $\square ABCD$ čija je stranica dužine 1. Nad stranicom AB kao nad prečnikom konstruiran je polukrug. Iz tačke D povuč ena je tangenta na polukrug koja stranicu BC siječe u tački E. Odrediti obim i površinu trougla $\triangle DCE$.*

Rješenje:



Neka je F tačka dodira tangente DE sa polukružnicom. Tada je $\overline{DA} = \overline{DF} = 1$ i $\overline{FE} = \overline{EB} = x$. Onda je $\overline{CE} = 1 - x$ i $\overline{DE} = 1 + x$. Trougao $\triangle CDE$ je pravougli, pa po Pitagorinoj teoremi imamo da je $\overline{DE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CE}^2 0$. Dakle,

$$\begin{aligned}(1+x)^2 = 1^2 + (1-x)^2 &\iff 1 + 2x + x^2 = 1 + 1 - 2x + x^2 \\ &\iff 4x = 1 \ .\end{aligned}$$

Imamo da je $x = \dfrac{1}{4}$, a onda je $\overline{DC} = 1$, $\overline{DE} = \dfrac{5}{4}$ i $\overline{CE} = \dfrac{3}{4}$.

Na osnovu svega ovoga sada imamo,

$$O = \overline{DE} + \overline{EC} + \overline{DC} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 3 \ ,$$

i

$$P = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{CE}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} \ .$$

□

Zadatak 28. *Broj a je kvadrat prirodnog broja. Dokazati da je a ili djeljiv s 4 ili pri dijeljenu s 8 daje ostatak 1.*

Rješenje: Neka je $a = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Broj k može biti ili paran ili neparan.

a) Neka je k paran prirodan broj, to jest $k = 2n$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Sada je $a = k^2 = (2n)^2 = 4n^2$, te vidimo da je a djeljivo sa 4.

b) Neka je k neparan prirodan broj. to jest $k = 2n - 1$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Sada je $a = k^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$. Brojevi n i $n - 1$ su dva uzastopna prirodna broja pa je jedan od njih paran. Iz ovoga onda vidimo da je $4n(n-1)$ djeljivo i sa 4 i sa 2, dakle i sa 8. Dakle, $a = 4n(n-1) + 1$ u dijeljenju sa 8 daje ostatak 1, što je i trebalo pokazati. □

Zadatak 29. *Dokazati da za pozitivne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$(1+x)\,(1+xy)\,(1+y) \geq 8xy.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje: Neka su x i y pozitivni brojevi. Primjenjujući A-G nejednakost na parove brojeva 1 i x, 1 i y i 1 i xy imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{2} &\geq \sqrt{1\cdot x} \Longrightarrow 1+x \geq 2\sqrt{x}\\
\frac{1+xy}{2} &\geq \sqrt{1\cdot xy} \Longrightarrow 1+xy \geq 2\sqrt{xy}\\
\frac{1+y}{2} &\geq \sqrt{1\cdot y} \Longrightarrow 1+y \geq 2\sqrt{y}\ .
\end{aligned}$$

Množeći ove tri nejednakosti dobijamo

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8\sqrt{x^2y^2}\ ,$$

odnosno

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8\sqrt{xy}\ ,$$

što je i trebalo dokazati.
Jednakost će vrijediti ako je $x=y=1$. □

Zadatak 30. *Izračunati:* $\sqrt{\underbrace{1111...11}_{200\ jedinica} - \underbrace{222...22}_{100\ dvojki}}$.

Rješenje: Primjetimo sljedeće,

$$\underbrace{1111...11}_{\text{200 jedinica}} = \frac{\overbrace{1000...00}^{\text{200 nula}}-1}{9} \quad \text{i} \quad \underbrace{222...22}_{\text{100 dvojki}} = 2\cdot\frac{\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}-1}{9}\ .$$

Sada imamo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\underbrace{1111...11}_{\text{200 jedinica}} - \underbrace{222...22}_{\text{100 dvojki}}} &= \sqrt{\frac{\overbrace{1000...00}^{\text{200 nula}}-1}{9} - 2\cdot\frac{\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}-1}{9}} = \sqrt{\frac{\overbrace{1000...00}^{\text{200 nula}}-1-2(\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}-1)}{9}}\\
&= \sqrt{\frac{\overbrace{1000...00}^{\text{200 nula}}-2\cdot\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}+1}{9}} = \sqrt{\frac{\left(\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}\right)^2-2\cdot\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}+1}{9}}\\
&= \sqrt{\frac{\left(\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}-1\right)^2}{9}} = \frac{\overbrace{1000...00}^{\text{100 nula}}-1}{3} = \underbrace{333...33}_{\text{100 trojki}}\ .
\end{aligned}$$

□

Srednja škola

Zadatak 21. *Ako su a, b i c pozitivni racionalni brojevi, dokazati da je i broj*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}$$

racionalan.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)(ab+ac+bc)^2+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)^2+2abc(a+b+c)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2))+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{((b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)+abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)+abc(a+b+c)}{abc(ab+ac+bc)}\in\mathbb{Q}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 22. *Ako su $a,b,c>0$ i $abc=3$, dokazati da vrijedi*

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\geq 72\ .$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=(a+b+c-a)((a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2)-(b^3+c^3)\\
&=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+ab+ac+a^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)\\
&=(b+c)(3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc-b^2+bc-c^2)\\
&=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)\\
&=3(b+c)(a(a+b)+c(a+b))\\
&=3(a+b)(a+c)(b+c) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Koristeći A-G nejednakost ($A\geq G$) za svaki par od brojeva a,b i c imamo

$$\begin{aligned}
a+b&\geq 2\sqrt{ab}\\
a+c&\geq 2\sqrt{ac}\\
b+c&\geq 2\sqrt{bc}
\end{aligned}$$

Množenjem ovih nejednakosti dobijamo

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc \qquad (2)$$

Sada iz (1), (2) i polazne pretpostavke $abc \geq 3$ imamo

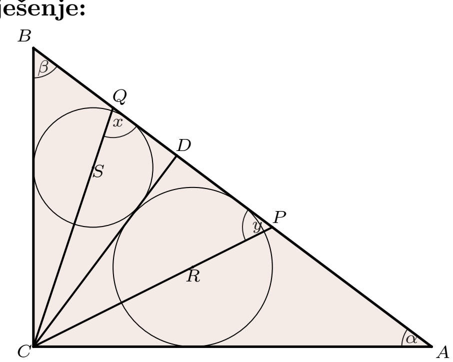
$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c) \geq 24abc \geq 72\ .$$

Komentar: Jednakost će vrijediti ako je $a = b = c = \sqrt[3]{3}$. □

Imširović Amir, 2r, Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 23. *Neka je CD visina pravouglog trougla $\triangle ABC$. Neka su R i S središta upisanih kružnica u pravouglim trouglovima $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. Ako prave CR i CS sijeku stranicu AB u tačkama P i Q, dokazati da je $\overline{AC} = \overline{AQ}$ i $\overline{BC} = \overline{BP}$.*

Rješenje:



Neka je $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, zaključujemo da vrijedi $\measuredangle ACD = \beta$ i $\measuredangle BCD = \alpha$. Centar upisane kružnice se nalazi u presjeku simetrala uglova, pa iz toga imamo da je $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD = \dfrac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BCQ = \measuredangle QCD = \dfrac{\alpha}{2}$.
Označimo sa $x = \measuredangle CQA$ i $y = \measuredangle CPB$. Iz $\triangle CDQ$ imamo da je $x = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Kako je $\measuredangle ACQ = \beta + \dfrac{\alpha}{2} = 90° - \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, zaključujemo da je $\measuredangle ACQ = \measuredangle AQC$. Dakle, trougao $\triangle AQC$ je jednakokraki trougao, to jest $\overline{AC} = \overline{AQ}$.

Slično ovome, posmatrajmo sada trougao $\triangle BCP$. Iz trougla $\triangle CPD$ imamo da je $y = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. Kako je $\measuredangle BCP = \alpha + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \beta + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, zaključujemo da je $\measuredangle CPB = \measuredangle BCP$, te je trougao $\triangle BCP$ jednakokrak, odnosno vrijedi $\overline{BC} = \overline{BP}$.

□

Zadatak 24. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz*

$$A = \frac{4x^2 + 28x + 11}{9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 12}$$

ima najmanju vrijednost i odrediti $A_{\min}$.

Rješenje: Izvršimo transformaciju polaznog izraza.

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x^2 + 28x + 11}{9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 12} = \frac{4x^2 + 28x + 49 - 49 + 11}{(3x-y)^2 + 2(3x-y) + 1 + 11} \\ &= \frac{(2x+7)^2 - 38}{(3x-y+1)^2 + 11} = -\frac{38 - (2x+7)^2}{(3x-y+1)^2 + 11} \end{aligned}$$

Izraz A će imati minimalnu vrijednost ako i samo ako izraz $-A$ ima maksimalnu vrijednost,

$$-A = \frac{38 - (2x+7)^2}{(3x-y+1)^2 + 11}\ .$$

Razlomak je veći što mu je brojnik veći, a imenilac manji. Tako će izraz $-A$ imati najveću vrijednost ako mu je brojnik najveći, to jest $2x + 7 = 0$ i ako mu je imenilac najmanji, to jest $3x - y + 1 = 0$. Dakle, treba riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= 0 \\ 3x - y + 1 &= 0\ . \end{aligned}$$

Iz prve jednačine direktno dobijamo da je $x = -\dfrac{7}{2}$, a ubacujući tu vrijednost u drugu jednačinu dobijamo $y = -\dfrac{19}{2}$. Dakle, za $x = -\dfrac{7}{2}$ i $y = -\dfrac{19}{2}$ imamo da je $A_{\min} = -\dfrac{38}{11}$. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 25. *Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo, njihov proizvod je tačno deset puta veći od njihovog zbira. Ima li još takvih parova prirodnih brojeva?*

Rješenje: Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $x \cdot y = 10(x+y)$.

$$\begin{aligned} x \cdot y = 10(x+y) &\iff xy = 10x + 10y \\ &\iff xy - 10x - 10y = 0 \\ &\iff x(y-10) - 10y + 100 - 100 = 0 \\ &\iff x(y-10) - 10(y-10) = 100 \\ &\iff (y-10)(x-10) = 100 \ , \end{aligned}$$

pri čemu očigledno mora biti $x > 10$ i $y > 10$. Kako je broj 100 djeljiv sa 1, 2, 4, 5, 10, 25, 50 i 100, razmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. $y-10 = 1$. Tada mora biti $x-10 = 100$ (Naravno da smo mogli posmatrati i obrat, to jest $y-100 = 100$ i $x-10 = 1$, što zbog očigledne simetrije bi dalo isti par rješenja). Odgovarajući par brojeva bi bio $y = 11$ i $x = 110$ (simetrično, $y = 110$ i $x = 11$).
2. $y-10 = 2$. Tada je $X - 10 = 50$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 60$ i $y = 12$, što je poznato nam rješenje.
3. $y-10 = 4$. Tada je $x-10 = 25$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 35$ i $y = 14$.
4. $y-10 = 5$. Tada je $x-10 = 20$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 30$ i $y = 15$.
5. $y-10 = 10$. Tada je $x-10 = 10$. Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 20$ i $y = 20$.

Dakle, mogući su parovi $(11,110)$, $(12,60)$, $(14,35)$, $(15,30)$ i $(20,20)$. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 26. *Naći vrijednost parametra p za kojeg jednačina*

$$x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0,$$

ima četiri realna rješenja koja obrazuju aritmetički niz.

Rješenje: Koeficijenti date jednačine četvrtog stepena su $a = 1$, $b = 0$, $c = -(3p+2)$, $d = 0$ i $e = p^2$. Prema Vietovim formulama imamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -(3p+2) \tag{4}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \tag{5}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = p^2 \tag{6}$$

Kako rješenja čine aritmetički niz, stavimo da je $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d$ i $x_4 = x_1 + 3d$. Uvrštavanjem u (3) dobijamo $4x_1 + 6d = 0$, to jest $x_1 = -\dfrac{3d}{2}$. Tada je $x_2 = -\dfrac{d}{2}$, $x_3 = \dfrac{d}{2}$ i $x_4 = \dfrac{3d}{2}$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti za x_1, x_2, x_3 i x_4 u (4) dobijamo vezu

$$5d^2 = 6p + 4 \ ,$$

a uvrštavanjem u (6) imamo

$$\frac{9d^4}{16} = p^2 \iff p = \pm\frac{3d^2}{4} \ .$$

Sada razlikujemo dva slučaja:
Slučaj I: Neka je $p = \frac{3d^2}{4}$. Iz jednakosti $5d^2 = 6p + 4$ dobijamo da je $p = 6$.
Slučaj II: Neka je $p = -\frac{3d^2}{4}$. Iz jednakosti $5d^2 = 6p + 4$ dobijamo da je $p = -\frac{6}{19}$. $\square$

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 27. *Riješiti jednačinu* $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

Rješenje: Zbog definicije logaritma mora biti $\sin x > 0$ i $\sin x \neq 1$. Ovo nam daje definiciono područje,

$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Prelaskom na bazu 2 i sređivanjem polazne jednačine imamo,

$$\begin{aligned}
\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4 &\iff \frac{\log_2 4}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \sin^2 x} = 4 \\
&\iff \frac{2}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{1}{2\log_2 \sin x} = 4 \\
&\iff \frac{1}{(\log_2 \sin x)^2} = 4 \\
&\iff (\log_2 \sin x)^2 = \frac{1}{4} \\
&\iff \log_2 \sin x = \pm\frac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Slučaj I : $\log_2 \sin x = \frac{1}{2}$.
Ovo je ekvivalentno sa $\sin x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$, pa u ovom slučaju nemamo rješenje.
Slučaj I : $\log_2 \sin x = -\frac{1}{2}$.
Sada je $\sin x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, iz čega zaključujemo da su rješenja

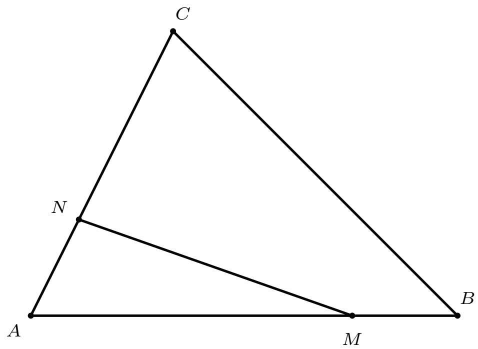
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \text{ i } \ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 28. *Na stranici AB trougla $\triangle ABC$ uzeta je tačka M tako da je $\overline{AM} = 3\overline{MB}$, a na stranici AC tačka N, tako da vrijedi $2\overline{AN} = \overline{NC}$. Površina trougla je m. Izračunati površinu četverougla $\square MBCN$.*

Rješenje:



$\overline{AM} = 3\overline{MB}$
$2\overline{AN} = \overline{NC}$
$P_{\triangle ABC} = m$
$P_{\square MBCN} = ?$

Neka je $\overline{AB} = c$. tada je $\overline{AM} + \overline{MB} = 3\overline{MB} + \overline{MB} = c$, to jest $\overline{MB} = \dfrac{c}{4}$ i $\overline{AM} = \dfrac{3c}{4}$.
Stavljajući da je $\overline{AC} = b$, imamo $\overline{AN} + \overline{NC} = \overline{AN} + 2\overline{AN} = b$, iz čega je $\overline{AN} = \dfrac{b}{3}$ i $\overline{NC} = \dfrac{2b}{3}$.
Sada imamo,

$$P_{\triangle AMN} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \sin\measuredangle MAN}{2} = \frac{\frac{3}{4}c \cdot \frac{1}{3}b \cdot \sin\measuredangle MAN}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\measuredangle BAC}{2} .$$

Dakle, $P_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{4}P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}m$. Sada imamo,

$$P_{\square MBCN} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle AMN} = m - \frac{1}{4}m = \frac{3}{4}m .$$

□

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 29. *Ako za uglove trougla vrijedi jednakost*

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2} ,$$

tada je trougao jednakostranični. Dokazati!

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 - \cos(\alpha+\beta) + 1 - \frac{3}{2} = 0\\
&\Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (1+\cos(\alpha+\beta)) - \frac{1}{2} = 0\\
&\Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0 \ / \cdot (-2)\\
&\Longleftrightarrow 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 .
\end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da mora vrijediti

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \tag{7}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 . \tag{8}$$

Iz (7) onda imamo da je $\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, to jest $\alpha=\beta$. Međutim, ako jednakost uglova α i β iskoristimo u (8) onda dobijamo

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha-\cos 0=0\\
&\iff 2\cos\alpha=1\\
&\iff \cos\alpha=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vidimo da je $\alpha=60^\circ$, a time je i $\beta=60^\circ$. Dakle, mora biti $\gamma=60^\circ$, te je trougao jednakostraničan. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 30. *Odrediti x-ti član geometrijskog niza čija su prva tri člana: $11-x^{\log x}$, $x^{\log x}-5$ i $35-x^{\log x}$.*

Rješenje: Radi lakšeg zapisa stavimo da je $x^{\log x}=t$, $x>0$. Tada su članovi našeg niza: $a_1=11-t$, $a_2=t-5$ i $a_3=35-t$. Kako je $a_2^2=a_1\cdot a_3$, to jest

$$\begin{aligned}
&(t-5)^2=(11-t)(35-t)\\
&\iff t^2-10t+25=385-46t+t^2\\
&\iff 36t=360\ ,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $t=10$. Dakle, $x^{\log x}=10$, iz čega nakon logaritmovanja dobijamo jednačinu $\log^2 x=1$, to jest $\log x=\pm 1$.
Slučaj I : $\log x=1$. Tada je $x=10$, te te su članovi našeg niza $a_1=1$, $a_2=5$ i $a_3=25$. Iz ovoga vidimo da je $q=5$. Sada imamo

$$a_x=a_{10}=a_1\cdot q^9=1\cdot 5^9=5^9\ .$$

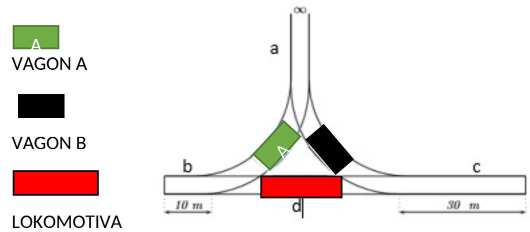
Slučaj II : $\log x=-1$. Tada je $x=10^{-1}=\frac{1}{10}$, a to nije prirodan broj, te u ovom slučaju nemamo rješenja. □

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 46–47

Rješenje nagradnog zadatka – Problem kretanja

Vol. 1 No. 2 (2018): Evolventa

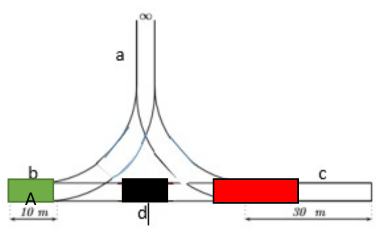


Označimo pruge sledećim slovnim oznakama :

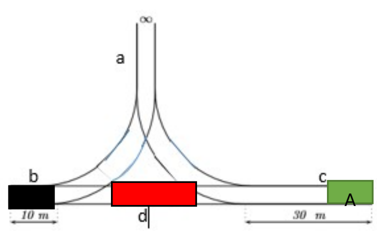
a- Pruga beskonačne dužine
b- Pruga dužine 10 m
c- Pruga dužine 30 m
d- Pruga gdje se nalazi lokomotiva u početnom položaju

Rješenje zadatka :

1) Lokomotiva ide u put c , a zatim gura vagon B u put a i okača ga
2) Lokomotiva gura vagon A u put b i otkača ga
3) Vraća se u put a i zakača vagon B i vuče ga u put c, a zatim ga gura u put d i otkača ga.
   Položaj bi bio kao na slici :

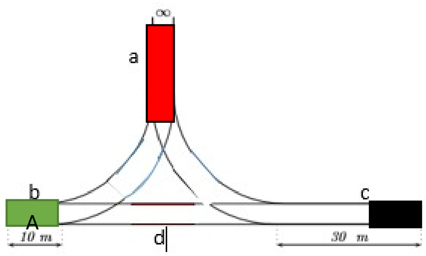


4) Lokomotiva ide u put b i zakača vagon A pa ga vuče u put a, a zatim ga gura u put c i otkača ga.
5) Gura vagon B u put b i otkača ga.
   Položaj bi bio kao na slici :

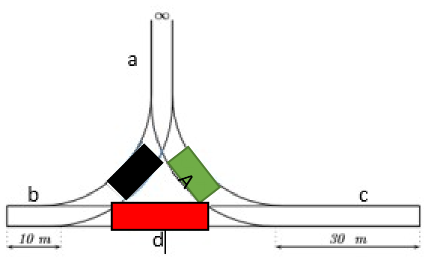


6) Lokomotiva zakača vagon A i vuče ga u put a, a zatim ga gura u put b
7) Zakača i vagon B (sada imamo kompoziciju LAB) i vuče ih u put a

8) Gura oba vagona u put c i otkača vagon B
9) Vuče vagon A u put a , a zatima ga gura u put b i otkača ga
   Položaj bi bio kao na slici :



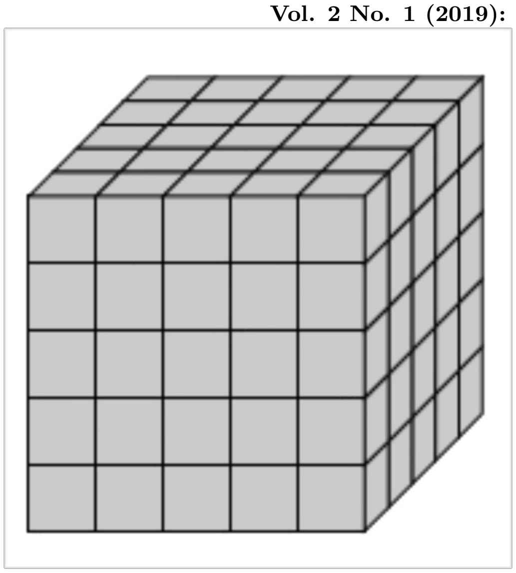
10) Lokomotiva zakača vagon B i vuče ga u put a , a zatim gura na početno mjesto vagona A i otkača ga .
11) Lokomotiva ide preko puteva a-c-d do vagona A i zakača ga, a zatima ga vuče u put c i onda gura na početno mjesto vagona B i otkača ga .
12) Lokomotiva se preko puta c vraća na početni položaj.
   Položaj bi bio kao na slici :



Učenik : Mahir Suljkanović 8 b OŠ '' Rainci Gornji ''

Rješenje nagradnog zadatka – Problem sječenja

Vol. 2 No. 1 (2019): Evolventa



Početna kocka 5x5x5 = 125 kocki 1x1x1

Manje kocke su zapremina :

1x1x1=1^3=1

2x2x2=2^3=8

3x3x3=3^3=27

4x4x4=4^3=64

Označimo sa a,b,c,d varijable gdje je po uslovu zadatka $\{a, b, c, d\} \in$ N tako da vrijedi

ax64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 (Zbir zapremina svih kocki je 125).

Ujedno je i a+b+c+d rješenje zadatka i mi tražimo min(a+b+c+d).

Teoretski imamo pet slučajeva (Izdvajamo maksimalne kocke zapremine 1,8,27,64 i 125)

Zapremine 1 i 125 nećemo razmatrati jer je u prvom slučaju to maksimalan broj kocki , a u drugom kocka ostaje cijela tj nema sječenja.

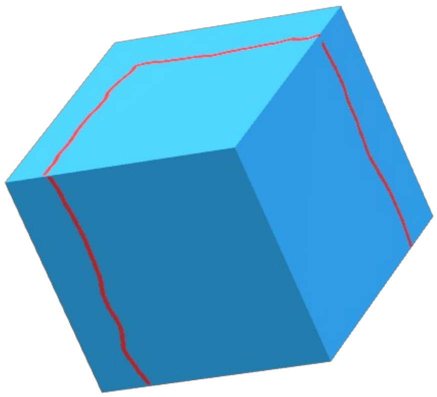
1 slučaj (max kocka 4x4x4)

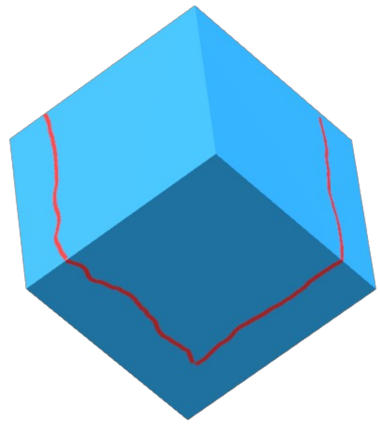
Zbog koeficijenata sa kojim se množi varijabla **a** može biti samo 1 (iz kocke 5x5x5 možemo izdvojiti samo 1 kocku 4x4x4) pa slijedi :

1x64+bx27+cx8+dx1=125

bx27+cx8+dx1=125-64=61

Kada izdvojimo kocku 4x4x4 ostaje nam samo po 1 red od kocke 5x5x5 tako da ne možemo izrezati nijednu kocku ni veličine 2x2x2 ni 3x3x3. Prikaz je na grafiku ispod :





Odatle slijedi da je b=0 i c=0 pa je :

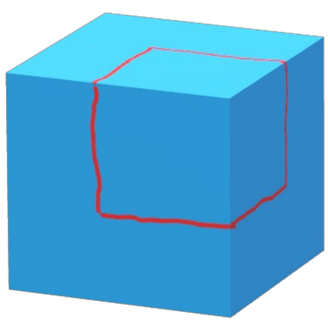
dx1=61

Znači ukupan broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 1+0+0+61=62

2 slučaj (max kocka 3x3x3)

Znači sada je a=0 i b=1 (jer iz kocke 5x5x5 možemo izdvojiti samo jednu kocku 3x3x3)

Slika za ovaj slučaj :



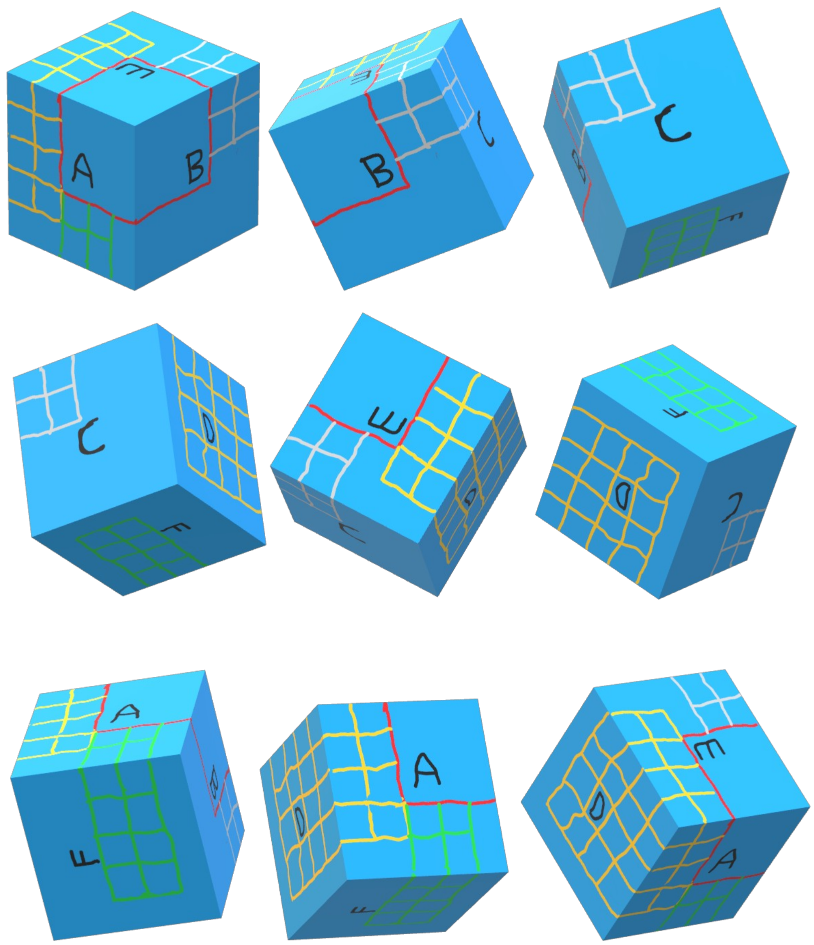
Iz početnog uslova **a**x64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 za ovaj slučaj vrijedi :

1x27+**c**x8+**d**x1=125

cx8+**d**x1=125-27=98

Sada treba izdvojiti max broj kocki 2x2x2 jer tako smanjujemo ukupan broj kocki .

Grafički ćemo prikazati tu situaciju (program Paint 3D) , a radi jasnije slike stranice kocke su označene sa A,B,C,D u horizontali u smjeru suprotnom od kazaljke na satu dok je gornja strana E , a donja F.



Iz grafičkog prikaza vidimo da maksimalan broj kocki 2x2 iznosi 7 (4 žute+2 zelene +1 siva)

Iz toga slijedi da je c=7 pa je gornja jednačina :

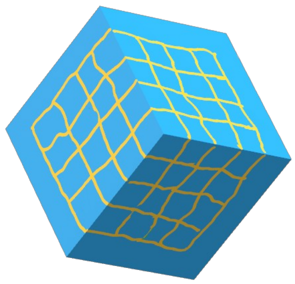
7x8+**d**x1=98 tj **d**=98-56=42 (ostalo je 42 kocki 1x1)

Broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 0+1+7+42=50

3 slučaj (max kocka 2x2x2)

Iz početnog uslova **a**x64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 za ovaj slučaj vrijedi :

cx8+**d**x1=125



Maksimalan broj kocki 2x2x2 je 8 , a isto kao i u prvom slučaju ostaje samo po jedan red tako da su sve preostale kocke 1x1x1.

8x8+dx1=125

d=125-64=61

Broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 0+0+8+61=69

Znači minimalan broj kocki za postavljene uslove u zadatku je 50.

Učenik : Mahir Suljkanović 8 b OŠ '' Rainci Gornji ''

Rješavatelji zadataka 21 – 30 i nagradnih zadataka

Osnovna škola

OŠ "Sveti Franjo" Tuzla, *Žepić Lana* (6a): 21,22;
OŠ "Hasan Kikić" Gradačac, *Halilović Amel* (9b): 24;

Srednja škola

Gimanzija ""Mustafa Novalić" Gradačac - sljedeći učenici: *Imširović Amir* (2r): 22.; *Ahmetović Ernesa* (2r): 25.;
Gimanzija ""Ismet Mujezinović" Tuzla - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (3d): 22., 24., 25., 27., 28., 29.; *Fazlić Amina* (4d): 22., 24., 26., 27., 28., 30.;

Nagradni zadatak: Problem kretanja

Mahir Suljkanović 8b OŠ "Rainci Gornji"
Kao prvo tačno pristiglo rješenje nagrađeno je sa 50 KM.

Nagradni zadatak: Problem sječenja

Mahir Suljkanović 8b OŠ "Rainci Gornji"
Kao prvo tačno pristiglo rješenje nagrađeno je sa 50 KM.