ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 4, No. 2, TUZLA 2021.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 4, No. 2 , 2021

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info.
Članovi UM TK imaju besplatan pristup elektronskom časopisu za tu godinu.
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, 30. decembar 2021. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 2 – 11

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima

Mirsad Trumić[a]

[a]*JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se ispituju konvergencije nekih nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima. Koristi se metod invarijanti pri rješavanju odgovarajućih diferentnih jednadžbi višeg reda s varijabilnim koeficijentima, kao i neautonomnih sistema diferentnih jednadžbi.

1. Uvod

Invarijanta kod diferentnih jednadžbi ima istu ulogu kao prvi integral kod diferencijalnih jednadžbi. Ono što je prvi integral kod diferencijalnih jednadžbi, to je invarijanta kod diferentnih jedadžbi. Izraz koji ostaje konstantan (invarijantan) duž rješenja diferentne jednadžbe i koji ukazuje na ponašanje rješenja diferentne jednadžbe naziva se invarijantom ili prvim integralom diferentne jednadžbe. Naziv prvi integral, se koristi zbog analogije sa diferencijalnim jednadžbama [2].

Definicija 1.1. *Neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Tada se jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots, \tag{1}$$

naziva linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda.

Primjenom matematičke indukcije može se pokazati da je opće rješenje linearne diferentne jednadžbe prvog reda (1) oblika

$$x_n = x_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} a_i + \sum_{k=n_0}^{n-1} b_k \prod_{i=k+1}^{n-1} a_i, \tag{2}$$

za sve $n \geq n_0 \geq 0$.

U tom slučaju naš zadatak je samo izračunati određene proizvode i sume, što s metodičkog aspekta nije beznačajno. Naravno, valja napomenuti da i izračunavanje suma ponekad zna biti otežano. Nadalje, koristeći se invarijantom možemo nelinearnu diferentnu jednadžbu određenog reda transformirati u linearnu istog reda. Slična je situacija i sa sistemima diferentnih jednadžbi, kada se primjenom metoda invarijante rješavanje sistema određenog reda svodi na rješavanje linearne ili pak nelinearne diferentne jednadžbe istog reda koju znamo riješiti. Nakon navedenih mogućnosti primjene, sada možemo i definirati invarijantu (v. [2]).

Ciljna skupina: fakultet, srednja škola
Ključne riječi: niz, rekurentna formula, monotonost, diferentne jednadžbe, invarijanta
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: septembar 2021.

Definicija 1.2. *Posmatrajmo jednadžbu*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

gdje je $x_n \in \mathbb{R}^k$ *i* $f : D \to D$ *neprekidno preslikavanje, gdje je* $D \subset \mathbb{R}^k$. *Nekonstantno, neprekidno preslikavanje* $I : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *zovemo invarijantom jednadžbe (3) ako je*

$$I(x_{n+1}) = I(f(x_n)) = I(x_n), \qquad za \ \ svako \ \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ovaj se metod može vrlo efikasno primijeniti u nekim situacijama ispitivanja konvergencije niza zadanog rekurentnom formulom. Tako će ovdje upravo i biti riječi o tome, s tim što će rekurentne formule biti s varijabilnim koeficijentima. Time se ovaj rad nadovezuje na rad [6] u kome je bilo riječi o ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s konstantnim koeficijentima i gdje su korišteni neki drugi metodi.

2. Primjena rješavanja diferentnih jednadžbi metodom invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova

U ovoj sekciji bit će navedeni primjeri ispitivanja konvergencije nizova zadanih linearnim rekurentim formulama višeg reda s varijabilnim koeficijentima. Kako je svaka rekurentna formula ekvivalentna odgovarajućoj diferentnoj jednadžbi, zadatak će se svesti na rješavanje te diferentne jednadžbe s ciljem dobijanja općeg člana promatranog niza, na osnovu čega će se moći ispitati konvergencija niza. Svaka diferentna jednadžba bit će riješena korištenjem neke njene invarijante. Isto vrijedi i za sisteme diferentnih jednadžbi.

2.1. Linearne diferentne jednadžbe

Primjer 2.1. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$a_{n+1} - \frac{2n-1}{n}a_n + \frac{n-1}{n}a_{n-1} = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

gdje su $a_1 = 0$ *i* $a_2 = 1$ *početni uvjeti.*

Rješenje: Jednadžba (4) ima invarijantu $I\left(a_{n+2}, a_{n+1}\right) = (n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, a_{n+1}$, jer je

$$\begin{aligned} I\left(a_{n+2}, a_{n+1}\right) &= (n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, a_{n+1} = (2n+1)\, a_{n+1} - n a_n - (n+1)\, a_{n+1} \\ &= n a_{n+1} - n a_n = I\left(a_{n+1}, a_n\right) = \ldots = I\left(a_2, a_1\right) = a_2 - a_1 = 1. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$n a_{n+1} - n a_n = 1 \Longrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda čije rješenje, prema (2), uz date početne uvjete, je oblika

$$a_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1\right) a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right) \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Opći član niza predstavlja $(n-1)$-vu parcijalnu sumu *harmonijskog reda*, za koji znamo da je divergentan. Dakle, dati niz je divergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty.$$

□

Primjedba 2.2. *U ovom slučaju smo rješavanje homogene linearne diferentne jednadžbe drugog reda s varijabilnim koeficijentima, uz pomoć invarijante, sveli na rješavanje nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda.*

Primjer 2.3. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2} - (1+e^n)\, x_{n+1} + e^n x_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots, \tag{5}$$

gdje su $x_0 = 1$ i $x_1 = 4$ početni uvjeti.

Rješenje: Jednadžba (5) ima invarijantu oblika$I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[x_{n+2} - x_{n+1}]$. Zaista,

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[x_{n+2} - x_{n+1}] = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[(1+e^n)\, x_{n+1} - e^n x_n - x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n-1)}}[x_{n+1} - x_n] = I(x_{n+1}, x_n) = \ldots = I(x_1, x_0) = x_1 - x_0 = 3. \end{aligned}$$

Na taj način dobijamo da vrijedi

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n-1)}}[x_{n+1} - x_n] = 3 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n + 3e^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Dobili smo diferentnu jednadžbu prvog reda čije rješenje je, uz date početne uvjete, oblika

$$x_n \;=\; \left(\prod_{i=0}^{n-1} 1\right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right) 3e^{\frac{1}{2}k(k-1)} = x_0 + 3\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}k(k-1)} = 1 + 3\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Niz x_n očito divergira i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

$\square$

Primjer 2.4. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$(n+1)x_{n+2} + (2n-1)x_{n+1} - 3nx_n = 0, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{6}$$

gdje su $x_1 = -1$ i $x_2 = -7$ početni uvjeti.

Rješenje: Jednadžba (6) ima invarijantu $I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}[x_{n+2} - x_{n+1}]$, jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}[x_{n+2} - x_{n+1}] = \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}\left[-\frac{2n-1}{n+1}x_{n+1} + \frac{3n}{n+1}x_n - x_{n+1}\right] \\ &= \frac{n}{(-3)^n}[x_{n+1} - x_n] = I(x_{n+1}, x_n) = \ldots = I(x_2, x_1) = \frac{1}{-3}[x_2 - x_1] = 2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\frac{n}{(-3)^n}[x_{n+1} - x_n] = 2 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n + 2\frac{(-3)^n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Dobili smo nehomogenu linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda, čije je rješenje

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1\right) x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right) 2\frac{(-3)^k}{k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{3^k}{k}, \quad n \geq 1,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{3^k}{k}.$$

Pošto opći član alternirajuceg reda $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^k}{k}$ ne teži ka 0, zaključujemo da je red divergentan. Dakle, niz x_n oscilirajući divergira. □

Primjer 2.5. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$2(n+1)x_{n+2} - (2n+1)x_{n+1} - x_n = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{7}$$

gdje su $x_1 = \frac{1}{2}$ *i* $x_2 = 1$ *početni uvjeti.*

Rješenje: Jednadžba (7) ima invarijantu

$$I(x_{n+2}, x_{n+1}) = (-2)^{n+1}\,(n+1)!\,(x_{n+2} - x_{n+1})$$

jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= (-2)^{n+1}\,(n+1)!\,(x_{n+2} - x_{n+1}) \\ &= (-2)^{n+1}\,(n+1)!\left[\frac{(1+2n)}{2\,(n+1)}x_{n+1} + \frac{1}{2\,(n+1)}x_n - x_{n+1}\right] \\ &= (-2)^n\, n![x_{n+1} - x_n] = \ldots = I(x_2, x_1) = (-2)\,[x_2 - x_1] = -1. \end{aligned}$$

Odavde se dobije

$$(-2)^n\, n!\,(x_{n+1} - x_n) = -1 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{(-2)^n\, n!}, \quad n \geq 1.$$

Dobili smo diferentnu jednadžbu prvog reda, čime smo snizili red jednadžbe (7) za jedan. Njeno rješenje u odnosu na početne uvjete je

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1\right)x_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right)\frac{1}{(-2)^k\, k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(-2)^k\, k!},$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{2^k k!}.$$

Primjenom *Leibnizovog kriterija* vidimo da je gornji red konvergentan, pa je i niz x_n konvergentan. □

Primjer 2.6. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2} + x_{n+1} - n^2 x_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

gdje su $x_1 = -\frac{2}{3}$ *i* $x_2 = 1$ *početni uvjeti.*

Rješenje: Jednadžba (8) ima invarijantu $I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{1}{n!}[x_{n+2} + (n+1)\,x_{n+1}]$, jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{1}{n!}[x_{n+2} + (n+1)\,x_{n+1}] = \frac{1}{n!}[-x_{n+1} + n^2 x_n + (n+1)\,x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}[x_{n+1} + n x_n] = \ldots = I(x_2, x_1) = \frac{1}{(1-1)!}[x_2 + x_1] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dobijanjem invarijante jednadžbe (8), snizili smo red jednadžbe za jedan. Tako imamo

$$\frac{1}{(n-1)!}[x_{n+1}+nx_n]=\frac{1}{3}\Longrightarrow x_{n+1}=-nx_n+\frac{1}{3}\,(n-1)!,$$

što je diferentna jednadžba prvog reda, čije je rješenje, uzimajući u obzir početne uvjete, dato u obliku

$$\begin{aligned}x_n&=\left(\prod_{i=1}^{n-1}(-i)\right)x_1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}(-i)\right)(k-1)!\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3}\left[-2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right].\end{aligned}$$

Kako je niz x_n proizvod neograničenog i ograničenog niza, očito je da on divergira ka beskonačnosti. □

Primjer 2.7. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2}-\frac{(3n-2)}{n-1}x_{n+1}+\frac{2n}{(n-1)}x_n=n2^n,\quad n=2,3,\dots,\tag{9}$$

gdje su $x_2=2$ i $x_3=9$ početni uvjeti.

Rješenje: Data jednadžba ima invarijantu $I(x_{n+2},x_{n+1})=\frac{1}{n}[x_{n+2}-2x_{n+1}]-2^{n+1}$, jer je

$$\begin{aligned}I(x_{n+2},x_{n+1})&=\frac{1}{n}[x_{n+2}-2x_{n+1}]-2^{n+1}=\frac{1}{n}\left[\frac{(3n-2)}{n-1}x_{n+1}-\frac{2n}{(n-1)}x_n+n2^n-2x_{n+1}\right]-2^{n+1}\\&=\frac{1}{n-1}[x_{n+1}-2x_n]-2^n=\ldots=I(x_3,x_2)=[x_3-2x_2]-2^2=1.\end{aligned}$$

Koristeći invarijantu uspjeli smo sniziti red date jednadžbe te tako dobiti jednadžbu prvog reda

$$\frac{1}{n-1}[x_{n+1}-2x_n]-2^n=1\Longleftrightarrow x_{n+1}=2x_n+2^n\,(n-1)+(n-1)\,,n\geq 2.\tag{10}$$

Dalje imamo

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{x_n}{2^n}=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{n-1}{2^{n+1}}\Longleftrightarrow\triangle\left(\frac{x_n}{2^n}\right)=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{n-1}{2^{n+1}}$$

odnosno,

$$x_n=2^n\left[\frac{1}{2}\triangle^{-1}(n-1)+\triangle^{-1}\left(\frac{n-1}{2^{n+1}}\right)+C\right].\tag{11}$$

Izračunajmo sada $\triangle^{-1}(n-1)$ i $\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}}$, koristeći formule $\triangle^{-1}a^t=\frac{a^t}{a-1}, a\neq 1$ i $\triangle^{-1}n^{(k)}=\frac{n^{(k+1)}}{k+1}$, gdje je $n^{(k)}=n(n-1)...(n-k+1)$, n,k prirodni brojevi. Naime,

$$\triangle^{-1}(n-1)=\triangle^{-1}(n)-\triangle^{-1}(1)=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2},$$

$$\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\triangle^{-1}n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Kako za antidiferentni operator vrijedi

$$\triangle^{-1}(x(n)\triangle y(n)) = x(n)y(n) - \triangle^{-1}(Ey(n)\triangle x(n))$$

to će biti

$$\begin{aligned}\triangle^{-1} n\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left\| \begin{array}{cc} x(n)=n & \triangle x(n)=1 \\ \triangle y(n)=(\frac{1}{2})^n & y(n)=-2(\frac{1}{2})^n \end{array} \right\| \\ &= -2n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \triangle^{-1}\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot 1\right] \\ &= -2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}} = -\frac{n}{2^n}.$$

Sada, uvrštavanjem traženih vrijednosti u (11) dobijamo rješenje diferentne jednadžbe (opći član niza)

$$x_n = -n + C2^n - \frac{3}{4}n2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n.$$

Odredimo konstantu C iz početnih uvjeta

$$2 = x_2 = -2 + C2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot 2^2 \Longrightarrow C = \frac{3}{2},$$

pa je $x_n = -n + 3\cdot 2^{n-1} - \frac{3}{4}n2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n$. Tako dobijemo da je niz x_n divergentan, odnosno vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

Primjedba 2.8. *Za razliku od prethodnih slučajeva gdje su diferentne jednadžbe bile homogene, ovog puta smo imali nehomogenu jednadžbu. Ali smo i ovdje zahvaljujući invarijanti uspjeli sniziti red diferentne jednadžbe.*

Primjer 2.9. *Ispitati konvergenciju niza koji je dat relacijom*

$$x_{n+3} - (n+5)\,x_{n+2} + (3n+5)\,x_{n+1} - 2nx_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

gdje su $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ početni uvjeti.

Rješenje: Jednadžba (12) je trećeg reda čija je invarijanta

$$I(x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}) = x_{n+3} - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1}$$

jer je

$$\begin{aligned}I(x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}) &= x_{n+3} - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1} \\ &= (n+5)\,x_{n+2} - (3n+5)\,x_{n+1} + 2nx_n - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1} \\ &= x_{n+2} - (n+3)\,x_{n+1} + 2nx_n = \ldots = I(x_3, x_2, x_1) = x_3 - 4x_2 + 2x_1 = 0.\end{aligned}$$

Na taj način dobili smo sljedeću diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+2} - (n+3)\,x_{n+1} + 2nx_n = 0, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

čime smo snizili red date jednadžbe s tri na dva. Međutim, jednadžba (13) također ima invarijantu oblika

$$I(x_{n+2},x_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}[x_{n+2} - (n+1)\,x_{n+1}]$$

jer vrijedi

$$\begin{aligned} I(x_{n+2},x_{n+1}) &= \frac{1}{2^{n+1}}[x_{n+2} - (n+1)\,x_{n+1}] = \frac{1}{2^{n+1}}[(n+3)\,x_{n+1} - 2nx_n - (n+1)\,x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{2^n}[x_{n+1} - nx_n] = \ldots = I(x_2,x_1) = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\frac{1}{2^n}[x_{n+1} - nx_n] = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_{n+1} = nx_n + 2^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

što je diferentna jednadžba prvog reda, tj. snizili smo i red jednadžbe (13) za jedan. Njeno je rješenje, s obzirom na početne uvjete, oblika

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} i\right) 2^{k-1} = (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k-1}}{k!}.$$

Iz ovog se vidi da niz x_n očito divergira, budući da je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2}e^2,$$

te vrijedi vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

Primjedba 2.10. *Koristeći se metodom invarijante, rješavanje homogene linearne diferentne jednadžbe trećeg reda sveli smo na rješavanje nehomogene linearne jednadžbe prvog reda. Na ovaj način snizili smo red diferentne jednadžbe za dva. Naravno nije to uvijek moguće, ali ako možemo red jednadžbe smanjiti makar za jedan i to je uspjeh, s obzirom na činjenicu da što je jednadžba višeg reda, to je njeno rješavanje zahtjevnije.*

2.2. Sistemi diferentnih jednadžbi

Primjer 2.11. *Neka su dati nizovi realnih brojeva*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{n}{n+2}x_n - \frac{3n}{n+2}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{-1}{n+2}x_n + \frac{1-2n}{n+2}y_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots\,, \end{aligned}$$

gdje su $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$ početni uvjeti. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$.

Rješenje: Invarijanta datog sistema je $I(x_{n+1},y_{n+1}) = (n+2)\,(x_{n+1} - y_{n+1})$, jer vrijedi

$$\begin{aligned} I(x_{n+1},y_{n+1}) &= (n+2)\,(x_{n+1} - y_{n+1}) = (n+2)\left(\frac{n}{n+2}x_n - \frac{3n}{n+2}y_n + \frac{1}{n+2}x_n - \frac{1-2n}{n+2}y_n\right) \\ &= I(x_n,y_n) = (n+1)\,(x_n - y_n) = \ldots = I(x_0,y_0) = (x_0 - y_0) = 1. \end{aligned}$$

S obzirom na invarijantu, onda vrijedi $(n+1)(x_n - y_n) = 1, \quad n \geq 0$. Odavde je

$$y_n = x_n - \frac{1}{n+1}, \tag{14}$$

pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu datog sistema dobija se linearna diferentna jednadžba prvog reda

$$x_{n+1} = \frac{-2n}{n+2} x_n + \frac{3n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

čije je rješenje

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{-2i}{i+2} \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{-2i}{i+2} \right) \frac{3k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{n-k-1} \frac{(n-1)!\,(k+2)!}{k!\,(n+1)!} \frac{3k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{3(-2)^{n-1}}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \left(-\frac{1}{2} \right)^k, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Izračunajmo sumu u posljednjem izrazu, koristeći tzv. metod parcijalnog sumiranja (v. [4, 5])

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k \left(-\frac{1}{2} \right)^k &= \triangle^{-1} \left[k \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n = \left\| \begin{matrix} x(k) = k & \triangle x(k) = 1 \\ \triangle y(k) = (-\frac{1}{2})^k & y(k) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{matrix} \right\| \\ &= \left[\left(-\frac{2}{3} \right) k \left(-\frac{1}{2} \right)^k - \triangle^{-1} \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{k+1} \right\} \right]_1^n \\ &= \left[\left(-\frac{2}{3} \right) k \left(-\frac{1}{2} \right)^k - \frac{1}{3} \triangle^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n \\ &= \left[\left(-\frac{2}{3} \right) k \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n \\ &= \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right) n \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} - \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \left(-\frac{2}{3} \right) \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{3n-1}{3} + \frac{1}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Tako dobijemo da je

$$x_n = \frac{3(-2)^{n-1}}{n(n+1)} \left(-\frac{2}{3} \right) \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{3n-1}{3} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{(-2)^n + 3n - 1}{3n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Iz (14) se dobije

$$y_n = \frac{(-2)^n - 1}{3n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Konačno je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3n - 1}{(-2)^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^n}{(-2)^n} + 3\frac{n}{(-2)^n} - \frac{1}{(-2)^n}}{\frac{(-2)^n}{(-2)^n} - \frac{1}{(-2)^n}} = 1.$$

$\square$

Primjer 2.12. *Nizovi x_n i y_n, definirani su sistemom diferentnih jednadžbi*

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n - y_n\right)}{2^n}, y_{n+1} = \frac{y_n\left(x_n - y_n\right)}{2^n}, \quad n = 0, 1, ...,$$

gdje su $x_0 = a > 0$ i $y_0 = b > 0$ početni uvjeti. Ispitati konvergenciju tih nizova u slucaju kad je $a > b$.

Rješenje: Invarijanta datog sistema je $I\left(x_{n+1}, \quad y_{n+1}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$, jer vrijedi

$$I\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{\frac{x_n(x_n - y_n)}{2^n}}{\frac{y_n(x_n - y_n)}{2^n}} = \frac{x_n}{y_n} = I\left(x_n, y_n\right) = \ldots = I\left(x_0, y_0\right) = \frac{a}{b}.$$

Stavljajući

$$y_n = \frac{b}{a} x_n, \tag{15}$$

u prvu jednadžbu datog sistema imamo

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n - \frac{b}{a} x_n\right)}{2^n} = \frac{a-b}{a 2^n} x_n^2.$$

Dobili smo jednadžbu koja nije linearna, ali koja se pogodnim transformacijama može svesti na linearnu. Tako se logaritmiranjem dobije

$$\ln x_{n+1} = 2 \ln x_n + \ln \frac{a-b}{a 2^n}.$$

Uvođenjem smjene $u_n = \ln x_n \quad (u_0 = \ln a)$, posljednja jednadžba postaje

$$u_{n+1} = 2 u_n + \ln \frac{a-b}{a 2^n},$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda čije je rješenje

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} 2\right) u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\right) \ln \frac{a-b}{a 2^k} \\
&= 2^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \ln \frac{a-b}{a 2^k} = 2^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \left(ln \frac{a-b}{a} + \ln 2^{-k} \right) \\
&= 2^n u_0 + 2^{n-1} \ln \frac{a-b}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2^{n-1} \ln 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2^n u_0 + \left(2^n - 1\right) \ln \frac{a-b}{a} - 2^{n-1} \ln 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left[\triangle^{-1}\left(k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right]_1^n = \left\| \begin{matrix} x(k) = k & \triangle x(k) = 1 \\ \triangle y(k) = (\frac{1}{2})^k & y(k) = -2(\frac{1}{2})^k \end{matrix} \right\| \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \triangle^{-1}\left\{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot 1\right\}\right]_1^n \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]_1^n \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]_1^n \\
&= -\frac{1}{2^{n-1}}\left(n+1\right) + 2,
\end{aligned}$$

imamo da je

$$u_n = 2^n \ln a + (2^n - 1) \ln \frac{a-b}{a} + (n + 1 - 2^n) \ln 2 = \ln 2^n a \left(\frac{a-b}{2} \right)^{2^n - 1}.$$

Vraćanjem smjene dobije se

$$x_n = 2^n a \left(\frac{a-b}{2} \right)^{2^n - 1},$$

a iz (15) slijedi da je

$$y_n = 2^n b \left(\frac{a-b}{2} \right)^{2^n - 1}.$$

Očigledno da oba niza, x_n i y_n divergiraju i teže ka $+\infty$ kad je $a - b \geq 2$. U slučaju kad je $0 < a - b < 2$ oba niza su konvergentna i teže ka 0, jer nakon smjena $m = 2^n$ i $k = \frac{2}{a-b} > 1$ imamo

$$\lim_{m \to \infty} k \frac{m}{k^m} = 0.$$

□

Zahvalnost

Zahvaljujem se Profesoru Mehmedu Nurkanoviću na ideji za pisanje ovog rada, kao i za niz sugestija koje su omogućile da rad dobije kvalitetniji izgled.

Zadaci za samostalan rad

Ispitati konvergencije nizova datih sljedećim rekurentnim formulama:

1. $(n+3)\, x_{n+2} - (2n+1)\, x_{n+1} + (n-2)\, x_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \ x_3 = \frac{1}{5}, \, x_4 = \frac{3}{5}$;

2. $nx_{n+2} + 2\,(n-3)\, x_{n+1} - 3\,(n-2)\, x_n = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots), \ x_1 = -1, \, x_2 = \frac{2}{5}$;

3. $x_{n+3} - (n+1)\, x_{n+2} - (n+7)\, x_{n+1} + 6n x_n = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots), \ x_1 = 0, \, x_2 = 3, \, x_3 = 7.$

4. Dati nizovi realnih brojeva

$$x_{n+1} = \frac{3n-2}{n-1} x_n - \frac{3n+7}{n-1} y_n,$$
$$y_{n+1} = \frac{-2n}{n-1} x_n + \frac{4n+5}{n-1} y_n,$$

za $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdje su $x_0 = \frac{1}{2}$ i $y_0 = 1$ početni uvjeti. Ispitati konvergenciju datih nizova.

Literatura

[1] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.), Springer, New York, 2005.
[2] M.R.S. Kulenović, O. Merino: *Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, NewYork, Washington, D.C., 2002.
[3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, 1(1), 2-5, 2018.
[4] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.
[6] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama, *Evolventa*, 4(1), 25-37, 2021.

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 12 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Osvrt na jedan zadatak sa više načina rješavanja

Reuf Ibrahimefendić[a]

[a] *Penzioner, Tuzla*

Sažetak: U ovom radu se daju još tri načina (sedmi, osmi i deveti) rješavanja zadatka 1.1 iz objavljenog članka: *Jedan zadatak sa više načina rješavanja* i na osnovu toga nekoliko zadataka sa rješenjima. Zajedno sa već objavljenim ovaj rad čini jedinstvcnu cjelinu.

1. Uvod

U časopisu EVOLVENTA Vol.2, No.l, Tuzla 2019. (elektronska publikacija) objavljen je članak: JEDAN ZADATAK SA VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA (autor Alija Muminagić) str. br. 2-10. U sekciji 2. PRVI NAČIN je prikazano kako učenici 8. i 9. razreda osnovne škole mogu dokazati jednakost (1), to jest

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \tag{1}$$

gdje su r_a, r_b i r_c poluprečnici trouglu pripisanih kružnica uz odgovarajuće stranice, a R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice tog trougla.

2. Različiti načini dokazivanja jrdnskosti (1)

Učenicima osnovne škole možemo pokazati i ovo RJEŠENjE:
Način I:
U svakom trouglu vrijedi

$$r_a = \frac{P}{s-a}\ ,\ r_b = \frac{P}{s-b}\ ,\ r_c = \frac{P}{s-c}, \tag{2}$$

gdje je P površina trougla, a s poluobim. Koristeći veze (2) imamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c &= P \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) \\ &= P \cdot \frac{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= P \cdot \frac{s^2 - sb - sc + bc + s^2 - sc - sa + ac + s^2 - sb - sa + ab}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= P \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trougao, opisana i upisana kružnica, pripisane kružnice, poluprečnik, Heronov obrazac
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: juli 2021.

Kako je $a+b+c=2s$ i na osnovu Heronovog obrasca, $s(s-a)(s-b)(s-c)=P^2$, izraženog sa

$$(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{P^2}{s},$$

dalje imamo

$$P\cdot\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{(s-a)(s-b)(s-c)}=P\cdot\frac{3s^2-2s\cdot 2s+ab+bc+ca}{\frac{P^2}{s}}=\frac{s}{P}\cdot(-s^2+ab+bc+ca).$$

Dakle, vrijedi

$$r_a+r_b+r_c=\frac{s}{P}\cdot(-s^2+ab+bc+ca) \tag{3}$$

Pokažimo da vrijedi veza $ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr$. Kako je $r^2=\left(\frac{P}{s}\right)^2$ i $abc=4RP$ tada je $4R=\frac{abc}{P}=\frac{abc}{r\cdot s}$ i $4Rr=\frac{abc}{P}\cdot r=\frac{abc}{s}$. Na osnovu ovoga imamo

$$\begin{aligned}
r^2+s^2+4Rr &= \left(\frac{P}{s}\right)^2+s^2+\frac{abc}{s}=\frac{P^2}{s^2}+s^2+\frac{abc}{s}\\
&=\frac{P^2+s^4+abc\cdot s}{s^2}=(\text{zbog } P^2=s(s-a)(s-b)(s-c))\\
&=\frac{s[(s-a)(s-b)(s-c)+s^3+abc]}{s^2}=\frac{(s^2-sb-sa+ab)(s-c)+s^3+abc}{s}\\
&=\frac{s^3-s^2b-s^2c+sbc-s^2a+sac+sab-abc+s^3+abc}{s}\\
&=\frac{2s^3-s^2(a+b+c)+s(ab+bc+ca)}{s}=\frac{2s^3-s^2\cdot 2s+s(ab+bc+ca)}{s}\\
&=ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ove veze u (3) imamo

$$r_a+r_b+r_c=\frac{s}{P}\left(-s^2+r^2+s^2+4Rr\right)=\frac{s\cdot r(r+4R)}{r\cdot s}=4R+r.$$

Način II:
Na stranici br. 4 u [2], u okviru drugog načina dokaza jednakosti (1) stoji: "Predlažemo da srednjoškolci daju planimetrijski dokaz za "

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_c} \quad \text{i} \quad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_c}. \tag{4}$$

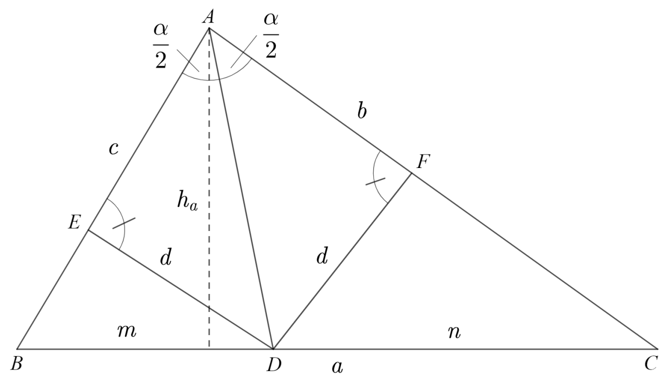
Ovdje ćemo izložiti taj planimetrijski dokaz, ali prethodno ćemo dokazati dva teorema.

Teorem 2.1. *Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli naspramnu stranicu na dva odreska, čije se duljine odnose kao duljine drugih dviju stranica trougla, koje s tim odrescima imaju zajedničku tačku.*

Dokaz: Postoji mnogo dokaza ove tvrdnje od kojih je ovdje izložen jedan, a čitaocima preporučujemo da teorem pokušaju dokazati i na druge načine.

Neka je AD simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$. Uz oznake kao na Slici 1. treba dokazati da vrijedi:

$$|BD|:|CD|=|AB|:|AC| \quad \text{ili} \quad m:n=c:b$$



Slika 1.

Označimo podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC sa E i F. Tada je $|DE| = |DF| = d$ (zašto?). Neka $[XYZ]$ označava površinu trougla XYZ. Sada imamo

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2}m \cdot h_a : \frac{1}{2}n \cdot h_a = m : n$$

S druge strane je

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2}c \cdot d : \frac{1}{2}b \cdot d = c : b$$

Zato je

$$m : n = c : b = BD : CD \tag{5}$$

□

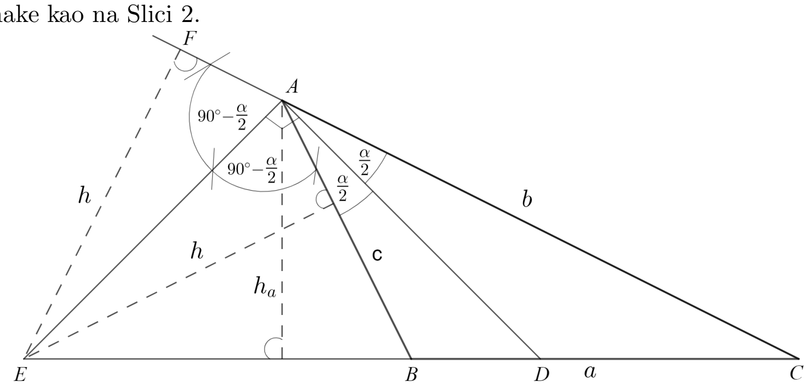
Formulišite obrat ove teoreme i dajte dokaz.

Teorem 2.2. *Ako simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a simetrala pripadnog spoljašnjeg ugla produžetak stranice CB, preko tačke B, u tački E, vrijedi da je*

$$|BE| : |CE| = |BD| : |CD| = c : b \tag{6}$$

Dokaz: (Primjetite da simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A i simetrala odgovarajućeg unutrašnjeg ugla dijele naspramnu stranicu jednakom omjeru i to jedna u spoljašnjem, a druga u unutrašnjem omjeru.)

Uvedimo oznake kao na Slici 2.



Slika 2.

Trouglovi $\triangle AEB$ i $\triangle AEC$ imaju jednake visine (h) iz zajedničkog vrha E. Tako je

$$[AEB] = \frac{1}{2}c \cdot h \iff 2 \cdot [AEB] = c \cdot h \;\text{ i }\; [AEC] = \frac{1}{2}b \cdot h \iff 2 \cdot [AEC] = b \cdot h,$$

pa vrijedi $[AEB] : [AEC] = c : b$. S druge strane ti trouglovi imaju zajedničku visinu h_a iz vrha A. Zato je

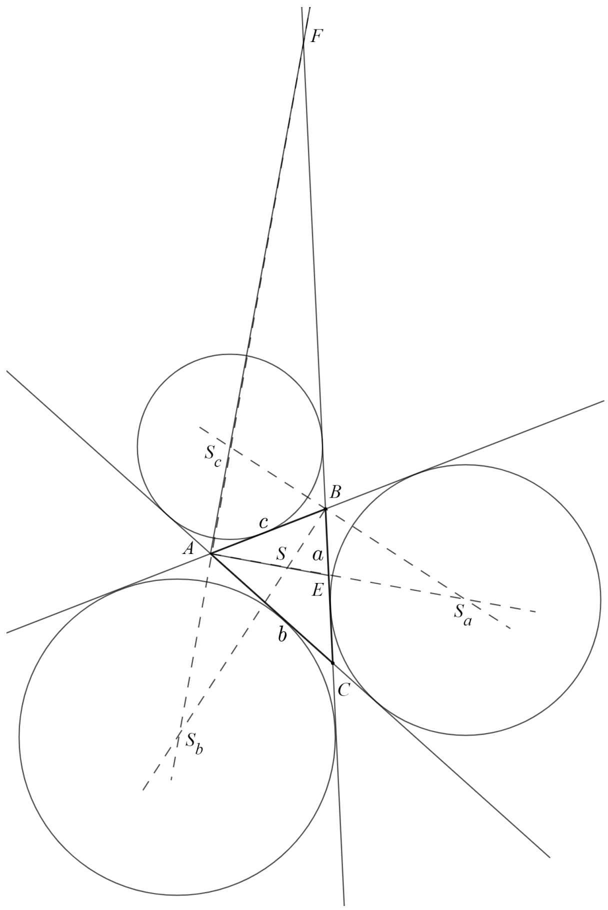
$$2 \cdot [AEB] = BE \cdot h_a \text{ i } 2 \cdot [AEC] = CE \cdot h_a,$$

odakle slijedi $[AEB] : [AEC] = |BE| : |CE| = c : b \overset{(3)}{=} BD : CD$. □

Primjer 2.3. *Ako je S središte upisane kružnice $\triangle ABC$ i S_a, S_b i S_c središta pripisanih kružnica koja odgovaraju trouglovim stranicama BC, CA i AB i ako su E i F tačke u kojima simetrala unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod vrha A sijeku pravac BC dokazati da je*

a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$,

b) $|AS_b| : |S_bF| = |AS_c| : |S_cF|$.



Slika 3.

Primjenjujući Teoreme 2.1. i 2.2. na trouglove $\triangle ABE$ i $\triangle ABF$, dobijamo da je (Slika 3):

a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$.
Primjetite da je u $\triangle ABE$, BS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B, a BS_a simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABE$.

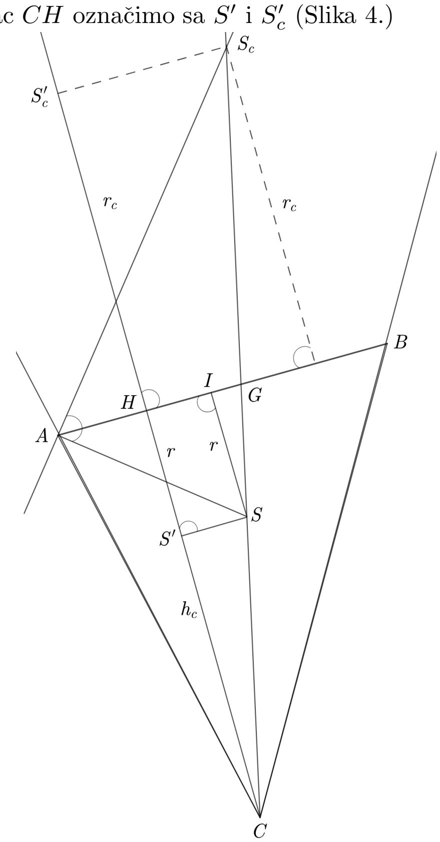
b) $|AS_c| : |S_cF| = |AS_b| : |S_bF|$.
Ovdje je BS_c simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$, a BS_b simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$.

Dokazujemo sada da je $\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{2}{h_c}$.

Dokaz: U $\triangle ACG$ je AS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha A, a AS_c je simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A. Prema rješenju zadatka 1. vrijedi da je:

$$|CS| : |SG| = |CS_c| : |S_cG|. \tag{7}$$

Neka je $|CH| = h_c$ visina iz vrha C na stranicu $|AB| = c$. Produžimo $h_c = CH$, preko tačke H i projekcije tačaka S i S_c na pravac CH označimo sa S' i S'_c (Slika 4.)



Slika 4.

Sada vrijedi

$$|CS'| : |S'H| = |CS| : |SG| \overset{(5)}{=} |CS_c| : |S_cG| = |CS'_c| : |S'_cH|.$$

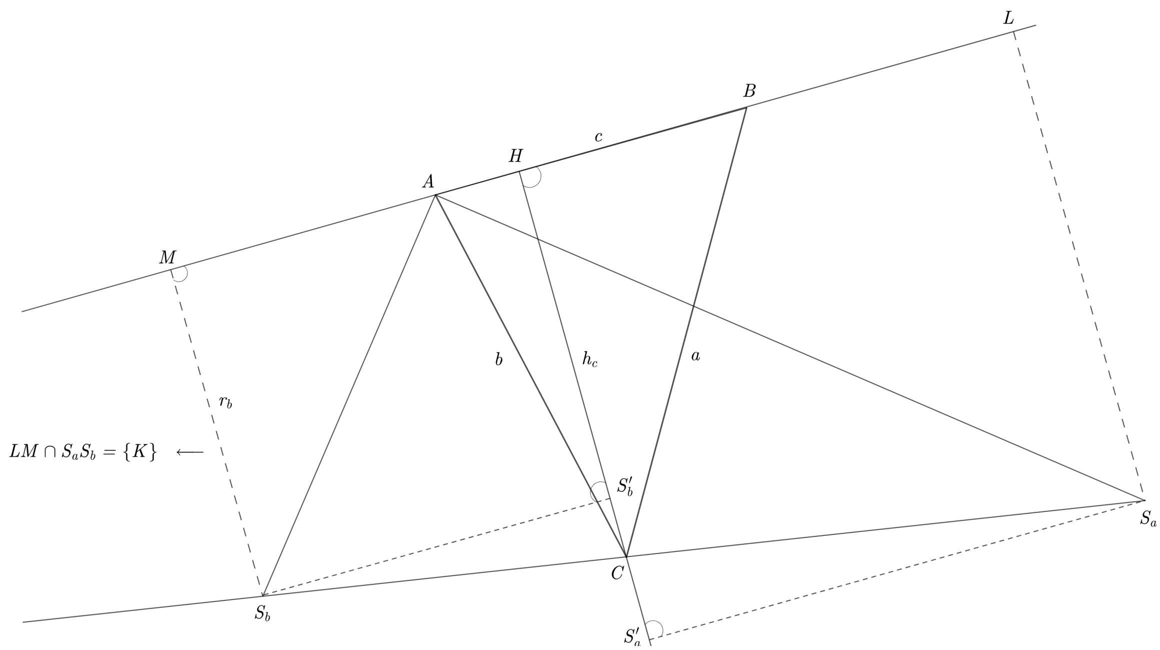
Dakle, $|CS'| : |S'H| = |CS'_c| : |S'_cH|$, a zbog $|CS'| = |CH| - |HS'| = h_c - r$ i $|CS'_c| = h_c + r_c$ dobijamo

$$(h_c - r) : r = (h_c + r_c) : r_c \iff \frac{h_c}{r} - 1 = \frac{h_c}{r_c} + 1 \iff h_c\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\Big) = 2$$
$$\iff \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}.$$

□

Dokazujemo sada da vrijedi $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}=\dfrac{2}{h_c}$.

Dokaz: Neka su S_a i S_b središta pripisanih kružnica koje odgovaraju stranicama a i b $\triangle ABC$, a K tačka u kojoj pravac S_aS_b siječe stranicu $AB = c$ istog trougla.



Slika 5.

Prema zadatku 1 u trouglu $\triangle ACK$ vrijedi (Slika 5.)

$$|CS_b| : |S_bK| = |CS_a| : |S_aK|.$$

Označimo sa S_a' i S_b' projekcije tačaka S_a i S_b na visinu $|CH| = h_c$ i njezin produžetak (preko tačke C). Sada imamo da je

$$\begin{aligned} |CS_b'| : |S_b'H| = |S_a'C| : |S_a'H| &\iff (h_c - r_b) : r_b = (r_a - h_c) : r_a \\ &\iff \frac{h_c}{r_b} - 1 = 1 - \frac{h_c}{r_a} \\ &\iff h_c\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right) = 1 + 1 \\ &\iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}. \end{aligned}$$

Dokaz jednakosti (1) dalje ide kao u objavljenom članku [2] , (sekcija 3. drugi način, str. 4) □

Način II:

Prethodno ćemo dokazati da vrijedi:

a) $r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $r_b = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $r_c = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Vidi sliku 4 u [2]. Imamo da je:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{AP} \iff AP \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r_a \iff (\text{zbog } AP = s, \text{ v. str.br.5 u [2]}) \iff r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Na sličan način dokazujemo druge dvije formule. □

b) $r = 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Dokazaćemo da je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \ \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \ \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Iz kosinusne teoreme, to jest jednakosti $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ imamo

$$-2bc \cdot \cos\alpha = a^2 - b^2 - c^2. \tag{8}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{2bc - 2bc\cdot\cos\alpha}{2\cdot 2bc} = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{4bc} \qquad \text{(na osnovu (8))}\\ &= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\\ &= \frac{2\cdot(s-b)\cdot 2\cdot(s-c)}{4bc},\end{aligned}$$

to jest $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. Druge dvije formule se dokazuju na isti način.

Sada dokazujemo b).

Vrijedi (vidi iznad):

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{(s-c)(s-a)}{ac}\cdot\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\\ &= \left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2.\end{aligned}$$

Odavde je onda

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}{s\cdot abc}\\ &= \frac{P^2}{sP4R} = \frac{P}{4Rs} = \frac{rs}{4Rs} = \frac{r}{4R}.\end{aligned}$$

Dakle, $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$. □

c) $s = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}s &= \frac{a+b+c}{2} \qquad \left(\text{prema sinusnoj teoremi } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\right)\\ &= 2R\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2} \qquad \left(\text{zbog } \sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \text{ i } \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\\ &= R\cdot\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\\ &\left\{\begin{array}{l}\text{zbog } \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \cos\dfrac{\gamma}{2} \quad \text{i}\\ \sin\dfrac{\gamma}{2} = \left[90^\circ - \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)\right] = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{array}\right\}\\ &= 2R\cdot\left(\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= 2R\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \left(\text{zbog } \cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)\\ &= 4R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

to jest

$$s = 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
r_a + r_b &= s \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)\\
&= 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\\
&= 4R \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\\
&= 4R \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} \qquad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_c - r &= s \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\
&= 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right) - 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\
&= 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
&= 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 4R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\\
&= 4R \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Sabiranjem jednakosti $(*)$ i $(**)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r = 4R \cdot \underbrace{\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}_{=1} = 4R\\
\iff r_a + r_b + r_c = 4R + r.
\end{aligned}$$

□

U gornjem smo se služili adicionim formulama:
$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,\ \cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$
$\sin(90^\circ - x) = \cos x$ i $\cos(90^\circ - x) = \sin x$
kao i vezom
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$

3. Zadaci

Zadatak 3.1. *Dokazati da u svakom truglu vrijedi:*
a) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ *b)* $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ *c)* $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}$

Rješenje: *a)* Iz prethodno dokazanih jednakosti $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ i $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$, dobijamo

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

b) Dokazali smo već da vrijedi $\frac{2}{h_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}$, a analogno se dokazuje da je $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}$ i $\frac{2}{h_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}$. Nakon sabiranja ovih jednakosti imamo

$$\left(\frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \iff 2 \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{3}{r} - \underbrace{\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)}_{=\frac{1}{r}} = \frac{2}{r}.$$

Dakle, vrijedi tvrđenje *b)*.

c) Imamo da je $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \iff \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right)$, a analogno je

$$\frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right) \text{ i } \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right)$$

Sada imamo

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r_a} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r_b} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_c} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right)$$

zbog $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}$, vrijedi

$$\frac{1}{2r} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_c}\right) = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_c} + \frac{1}{2r_c} = \frac{1}{r_c}.$$

□

Zadatak 3.2. *Dokazati da u svakom trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $P = r \cdot r_a \cdot \sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}}$.]*

Rješenje: Iz $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ slijedi $4R - r_a + r = r_b + r_c$, pa je

$$P = r \cdot r_a \cdot \sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}} \iff P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \frac{4R - r_a + r}{r_a - r}$$
$$\iff P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r}$$

Gore smo dokazali jednakost $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$ i analogno se dokazuje da je

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a} \iff \frac{r_b + r_c}{r_b \cdot r_c} = \frac{2}{h_a} \iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot r_b \cdot r_c$$
$$\iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot \frac{P}{(s+b)(s-c)} \iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}$$
$$\iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot s(s-a)$$

Slično dokazujemo da je

$$r_a - r = \frac{2}{h_a} \cdot (s-b)(s-c) \left(\text{ovdje smo primijenili } r_b = \frac{P}{s-b},\ r_c = \frac{P}{s-c},\ P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\right)$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \Longleftrightarrow (\text{zbog } P = r \cdot s)\ r^2 \cdot s^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \\
&\Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{\frac{2}{h_a} s(s-a)}{\frac{2}{h_a} s(s-b)(s-c)} \Longleftrightarrow s^2 = r_a^2 \cdot \frac{s \cdot (s-a)}{(s-b)(s-c)} \\
&\Longleftrightarrow s(s-b)(s-c) = r_a^2(s-a) \Longleftrightarrow s(s-a)(s-b)(s-c) = r_a^2 \cdot (s-a)^2 \Longleftrightarrow P^2 = P^2
\end{aligned}$$

što je tačno. □

Zadatak 3.3. *Dokazati da u svakom truglu vrijedi jednakost*

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = 2\frac{R}{r} - 1.$$

Rješenje: Kako je $r_a = \frac{P}{s-a}, r_b = \frac{P}{s-b}, r_c = \frac{P}{s-c}$, te $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$, imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = \frac{\frac{P}{s-a}}{\frac{2P}{a}} + \frac{\frac{P}{s-b}}{\frac{2P}{b}} + \frac{\frac{P}{s-c}}{\frac{2P}{c}} = \frac{a}{2 \cdot (s-a)} + \frac{b}{2 \cdot (s-b)} + \frac{c}{2 \cdot (s-c)} = \cdots \\
&\cdots = \frac{(a+b+c) \cdot s^2 + 3abc - 2s \cdot (bc + ca + ab)}{2 \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} \\
&\left\{ \begin{array}{c} \text{zbog } \ a+b+c = 2s,\ abc = 4RP,\ (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{r^2 s^2}{s} = r^2 s \ \text{ i} \\ ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr \end{array} \right\} \\
&= \cdots = \frac{2s^2(s^2 + 6Rr - r^2 - s^2 - 4Rr)}{2 \cdot r^2 s^2} = \frac{r(2R - r)}{r^2} = 2 \cdot \frac{R}{r} - 1
\end{aligned}$$

□

Literatura

[1] A. Marić: *TROKUT definicije, poučci, formule, problemi, jdnakosti, nejednakosti*, Element, Zagreb, 2007.
[2] A. Muminagić: *Jedan zadatak s više načina rješavanja*, EVOLVENTA, Vol.2, No.1, str. 2-10.
[3] Pavković – Veljan: *MATEMATIKA 1, Zbirka zadataka s uputama i rješenjima za prvi razred srednjih škola*, Deseto izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 22 – 33

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti

Nevzeta Karać[a], Alma Šehanović[a]

[a]*JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla*

Sažetak: U ovom radu razmatramo neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti. Ove metode su ponekad složenije, ali ukazuju na raznovrsnost matematičkog mišljenja kao i na bogatstvo matematike i njene primjene.

1. Uvod

Živimo u vremenu kada često čujemo riječ optimizacija. Optimizacija ima vrlo značajnu ulogu u svijetu u kojem živimo. Mnoge stvari koje radimo pokušavamo napraviti na optimalan način, maksimizirati korisnost ili minimizirati trošak. Matematički gledano, optimizacijski problemi sastoje se u određivanju ekstrema (maksimuma ili minimuma) neke funkcije. Nalaženje ekstrema zadane funkcije u zadacima kako teorijskog tako i praktičnog karaktera spada u grupu veoma značajnih zadataka matematike i njenih primjena.

Metode nalaženja ekstrema zavise od osobina posmatrane funkcije, od oblasti u kojoj se traže ekstremi i od matematičkog aparata koji se koristi. Poznato je da za nalaženje ekstremnih vrijednosti postoji opšta metoda zasnovana na pojmovima i teoriji diferencijalnog računa. S druge strane, postoji velika potreba za metodama nalaženja ekstremnih vrijednosti funkcija koje ne pretpostavljaju poznavanje i mogućnost primjene diferencijalnog računa. Takve metode zovemo elementarnim metodama. Za mladog matematičara srednjoškolca korisnije je da pomenute probleme rješava elementarnim metodama, jer mu one proširuju pogled na matematičku metodologiju.

Zadaci, koji su ilustrovani u ovom radu, često se pojavljuju na takmičenjima i predstavljaju veoma dobru pripremu za učenike osnovnih škola.

2. Ekstremne vrijednosti

2.1. Osnovni pojmovi o minimumu i maksimumu

Definicija 2.1. *Neka je data realna funkcija $y = f(x)$ na nekom skupu D_f. Minimum (maksimum) funkcije $y = f(x)$ je takav broj m (odnosno M), za koji je ispunjeno sljedeće*

$$f(x) \geq m,\ \forall x \in D_f \ \text{(odnosno } f(x) \leq M, \forall x \in D_f).$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: ekstremi, funkcija troškova, funkcija prihoda, funkcija dobiti
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: juli 2021.

Minimum funkcije $y = f(x)$ označavamo sa $\min f(x)$, a maksimum sa $\max f(x)$.

Polazeći od navedene definicije za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija, vrlo često se koristi sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.2. *Za svaki realan broj t je $t^2 \geq 0$, pa je najmanja (najveća) vrijednost funkcije $f(t) = t^2$ $\left(f(t) = -t^2\right)$ nula i ona se dostiže za $t = 0$.*

Koristeći ovu jednostavnu lemu lahko uočavamo sljedeće:

- Za funkciju $f_1(x) = x^2 + 1$ je $\min f_1(x) = 1$ za $x = 0$.
- Za funkciju $f_2(x) = (x-2)^2 + 3$ je $\min f_2(x) = 3$ za $x = 2$.
- Za funkciju $f_3(x) = -x^2 - 2$ je $\max f_3(x) = -2$ za $x = 0$.

Za nalaženje ekstremnih vrijednosti složenijih funkcija koriste se sljedeće jednostavne tvrdnje.

1. Ako postoji $\min f(x)$ ili $\max f(x)$ i ako je $q > 0$, onda je
$$\min\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \min f(x), \;\; \max\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \max f(x).$$
2. Ako postoji $\min f(x)$ ili $\max f(x)$ i ako je $q < 0$, onda je
$$\min\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \max f(x), \;\; \max\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \min f(x).$$
3. Ako je $f(x) > 0$ za sve x iz domena funkcije f, onda je
$$\max\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\min f(x)}, \;\; \min\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\max f(x)}.$$
4. Ako postoji maksimum, odnosno minimum, funkcije $f(x)$ i ako je $f(x) \geq 0$ za sve x iz domena funkcije f, tada je
$$\max\sqrt{f(x)} = \sqrt{\max f(x)}, \;\; \min\sqrt{f(x)} = \sqrt{\min f(x)}.$$

Primjer 2.3. *Odrediti ekstremnu vrijednost funkcije* $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$.

Rješenje: Neka je
$$f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$
Funkcija $f_1(x)$ ima minimum, $\min f_1(x) = \frac{2}{3}$, za $x = -\frac{1}{3}$, pa je
$$\frac{1}{\min\sqrt{f_1(x)}} \overset{3.}{=} \max\left(\frac{1}{\sqrt{f_1(x)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
Dakle,
$$-3 \cdot \max\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}\right) \overset{2.}{=} \min\left(\frac{-3}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}\right),$$
odnosno
$$\min f(x) = -\frac{3\sqrt{6}}{2}, \;\text{ za } x = -\frac{1}{3}.$$
□

Pored navedenih postupaka, vrlo često se ekstremne vrijednosti funkcija i algebarskih izraza mogu odrediti i direktno korištenjem jedne od sljedećih elementarnih algebarskih transformacija:

1. $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy,$
2. $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy,$
3. $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2+y^2\right).$

2.2. Zadaci iz oblasti minimuma i maksimuma

Primjer 2.4. *Proizvod dva pozitivna broja, čiji je zbir dat, ima najveću vrijednost kada su ti brojevi jednaki. Dokazati.*

Rješenje: Neka je dat zbir brojeva $x+y=a$. Tada iz identiteta $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ slijedi,

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, to je

$$\max(xy) = \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}a^2,$$

za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x=y$. □

Primjer 2.5. *Dokazati da proizvod dva pozitivna broja, čiji je zbir kvadrata stalan, ima najveću vrijednost kada su ta dva broja jednaka.*

Rješenje: Neka je $x^2+y^2=a$. Iz već spomenutog identiteta $x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ slijedi,

$$xy = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, imamo da je $\max(xy) = \frac{1}{2}a$, za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x=y$. □

Primjer 2.6. *Dokazati da zbir kvadrata dva broja, čiji je zbir dat, ima najmanju vrijednost kada su ti brojevi jednaki.*

Rješenje: Neka je $x+y=a$. Koristeći identitet $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2+y^2\right)$ dobijamo,

$$x^2+y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, to je $\min\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}a^2$, za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x=y$. □

Primjer 2.7. *Odrediti pravougaonik maksimalne površine ako je njegov obim* $8cm$. *Kolike su stranice tog pravougaonika?*

Rješenje 1: Poznato je da za površinu P i obim O pravougaonika vrijede formule: $P=ab$ i $O=2a+2b$. Primjenom identiteta $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ imamo,

$$ab = 4 - \frac{1}{4}(a-b)^2.$$

Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, vrijedit će $\max(ab) = 4$, za $a=b=2$. □

Rješenje 2: Iz činjenice da je $O = 2(a+b) = 8$ slijedi $a+b=4$, odakle je $b=4-a$. Dalje imamo

$$(a+b)^2 = 16 \iff a^2+2ab+b^2=16 \iff 2ab = 16-a^2-b^2 \iff 2ab = 16-a^2-(4-a)^2$$
$$\iff 2ab = -2a^2+8a \iff ab = -a^2+4a \iff ab = -(a-2)^2+4,$$

iz čega slijedi

$$\max(ab) = 4, \text{ za } a = 2 \text{ i } b = 2.$$

□

Primjer 2.8. *Odrediti pravougaonik najmanjeg obima ako je njegova površina $P = 100cm^2$.*

Rješenje: Kako je površina pravougaonika $P = ab = 100$, primjenom identiteta $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ imamo,

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 400.$$

Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, to je $\min\left((a+b)^2\right) = 400$, i postiže se za $a = b$, a odatle imamo da je najmanji obim $O_{\min} = 40cm$, za $a = b = 10cm$. □

Primjer 2.9. *Koji od svih pravougaonika dijagonale $d = 4cm$ ima najveći obim?*

Rješenje: Kako za dijagonalu d pravougaonika vrijedi $d^2 = a^2 + b^2$, imamo da je $a^2 + b^2 = 16$. Primjenom identiteta $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$ imamo,

$$(a+b)^2 = 32 - (a-b)^2.$$

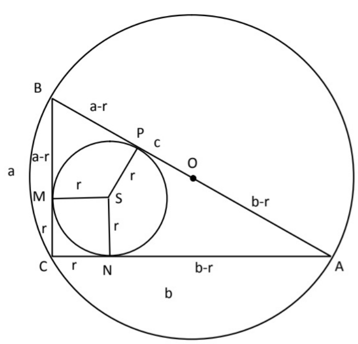
Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, vrijedit će $\max\left((a+b)^2\right) = 32$, za $a = b$, odnosno

$$\max(a+b) = 4\sqrt{2}.$$

Stoga je $O_{\max} = 8\sqrt{2}cm$, za $a = b = 2\sqrt{2}cm$. □

Primjer 2.10. *Od svih pravouglih trouglova datog poluprečnika opisane kružnice R naći onaj s najvećim poluprečnikom upisane kružnice.*

Rješenje:



Neka je dat pravougli trougao ABC kao na slici. Neka je r poluprečnik upisane, a R zadani poluprečnik opisane kružnice. Poznato je da je poluprečnik opisane kružnice pravouglog trougla jednak polovini hipotenuze, to jest $R = \frac{c}{2}$. Neka je S centar kružnice upisane u trougao ABC i neka su M, N i P redom projekcije tačke S na stranice trougla a, b i c. Tada je $|SM| = |SN| = |SP| = r$. Četverougao $CMNS$ je očigledno kvadrat stranice r, pa vrijedi $|BM| = a - r$ i $|AN| = b - r$. Kako je

$$\left.\begin{array}{c} |AS| = |AS| \\ |SN| = |SP| = r \\ \angle ANS = \angle APS = 90^\circ \end{array}\right\} \overset{SSU}{\Longrightarrow} \triangle ANS \cong \triangle APS \implies |AN| = |AP|,$$

pa je

$$|AP| = b - r. \tag{1}$$

Analogno se dokazuje da je $\triangle BMS \cong \triangle BPS$, odakle slijedi $|BM| = |BP|$, pa je

$$|BP| = a - r. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$c = |AB| = |AP| + |BP| = b - r + a - r = a + b - 2r,$$

odakle je

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2} - R.$$

Kako je R konstanta

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \max\left(\frac{a+b}{2}\right) - R = \frac{1}{2}\max(a+b) - R \\ &= \frac{1}{2}\left[\max\left(\sqrt{(a+b)^2}\right)\right] - R = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\max\left((a+b)^2\right)}\right] - R. \end{aligned}$$

Odredimo $\max\left((a+b)^2\right)$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

te je

$$2ab = (a+b)^2 - c^2. \tag{3}$$

S druge strane,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2ab,$$

odakle je

$$2ab = c^2 - (a-b)^2. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2c^2 - (a-b)^2,$$

pa je

$$\max\left((a+b)^2\right) = 2c^2, \text{ za } a = b.$$

Dakle,

$$r_{\max} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\max\left((a+b)^2\right)}\right] - R = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2} - R = \sqrt{2}R - R = \left(\sqrt{2} - 1\right)R,$$

za $a = b = \sqrt{2}R$. □

Primjer 2.11. *Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$.

Rješenje: Funkciju $f(x)$ možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} = \frac{x^2+3-4}{x^2+3} = 1 - \frac{4}{x^2+3}.$$

Kako je $\frac{4}{x^2+3} \leq \frac{4}{0^2+3} = \frac{4}{3}$, to je $\max\left(\frac{4}{x^2+3}\right) = \frac{4}{3}$, odnosno

$$\min f(x) = 1 - \max\left(\frac{4}{x^2+3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}, \text{ za } x = 0.$$

□

Primjer 2.12. *Ako je $2x + y = 8$, naći najveću vrijednost koju može imati proizvod xy.*

Rješenje 1: Neka je $2x = t$, onda je $t + y = 8$. Primjenom identiteta $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ imamo,

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \iff xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

Zamjenom x sa t dobijamo

$$ty = \frac{1}{4}\left[(t+y)^2 - (t-y)^2\right].$$

Kako je $t + y = 8$, vrijedit će

$$ty = \frac{1}{4}\left[64 - (t-y)^2\right] \iff ty = 16 - \frac{1}{4}(t-y)^2.$$

Dakle, izraz ty ima maksimalnu vrijednost za $t - y = 0$, to jest za $t = y$, pa je

$$\max(ty) = 16 \implies \max(2xy) = 16 \implies \max(xy) = 8, \text{ za } y = 4 \text{ i } x = 2.$$

□

Rješenje 2: Pomnožimo li uslov zadatka $2x + y = 8$ sa y, dobijamo $2xy + y^2 = 8y$, odakle je

$$2xy = -y^2 + 8y \iff 2xy = -(y-4)^2 + 16 \iff xy = 8 - \frac{1}{2}(y-4)^2,$$

pa je $\max(xy) = 8$, za $y = 4$ i $x = 2$. □

Primjer 2.13. *Za koju vrijednost x funkcija $f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$ ima najmanju vrijednost?*

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(x) &= [x+(a+b)]\cdot[x-(a+b)]\cdot[x+(a-b)]\cdot[x-(a-b)] = \left[x^2-(a+b)^2\right]\cdot\left[x^2-(a-b)^2\right] \\ &= x^4 - x^2(a-b)^2 - x^2(a+b)^2 + (a+b)^2(a-b)^2 = x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + \left(a^2-b^2\right)^2 \\ &= x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \\ &= x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + \left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2 \\ &= \left[x^2 - \left(a^2+b^2\right)\right]^2 - 4a^2b^2 \geq -4a^2b^2, \text{ jer je } \left[x^2-\left(a^2+b^2\right)\right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sada je

$$\min(f(x)) = -4a^2b^2, \text{ za } x^2 - \left(a^2+b^2\right) = 0, \text{ to jest za } x = \pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

□

Primjer 2.14. *Za koje vrijednosti x i y izraz* $A = \dfrac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ *ima najveću, a za koje najmanju vrijednost?*

Rješenje: Za $x \neq 0$ i $y \neq 0$ izraz A možemo napisati u obliku

$$A = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x - 2y)^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{(x - 2y)^2}{x^2 + y^2} - 1 \geq -1.$$

Dakle,

$$\min\left(\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}\right) = -1, \text{ za } \frac{(x - 2y)^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ to jest za } x = 2y.$$

Izraz A možemo transformisati i na drugi način.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{4x^2 + 4y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{4\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2 - 4xy - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4\left(x^2 + y^2\right) - \left(4x^2 + 4xy + y^2\right)}{x^2 + y^2} \\ &= 4 - \frac{(2x + y)^2}{x^2 + y^2} \leq 4. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\max\left(\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}\right) = 4, \text{ za } \frac{(2x + y)^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ to jest za } y = -2x.$$

□

Primjer 2.15. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y razlomak* $R = \dfrac{4xy - 4x^2 - y^2 + 1}{9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y + 11}$ *ima najveću vrijednost?*

Rješenje: Dati razlomak možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} R &= \frac{4xy - 4x^2 - y^2 + 1}{9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y + 11} = \frac{1 - \left(4x^2 - 4xy + y^2\right)}{9x^2 - 6xy + y^2 - 2(3x - y) + 11} \\ &= \frac{1 - (2x - y)^2}{(3x - y)^2 - 2(3x - y) + 1 + 10} = \frac{1 - (2x - y)^2}{(3x - y - 1)^2 + 10}. \end{aligned}$$

Razlomak ima najveću vrijednost ako je brojnik maksimalan i nazivnik minimalan, to jest za $2x - y = 0$ i $3x - y = 1$. Dakle, za $x = 1$ i $y = 2$, $R_{\max} = \frac{1}{10}$. □

Primjer 2.16. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz* $A = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y + 2}{2x^2 + 2y^2 - 4y + 7}$ *ima najmanju vrijednost?*

Rješenje: Dati izraz možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + y^2 - 2y + 2}{2x^2 + 2y^2 - 4y + 7} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2x^2 + 2(y - 1)^2 - 2 + 7} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1 - 1\right] + 5} \\ &= \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1\right] + 3} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1 + \frac{3}{2}\right]} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + \frac{5}{2}\right]} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4\left[x^2 + (y - 1)^2 + \frac{5}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Vrijednost izraza A će imati minimalnu vrijednost kada je razlomak $\frac{1}{x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}}$ maksimalan, to jest kada je izraz $x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}$ minimalan. Dakle,

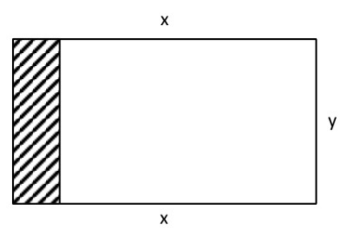
$$\min\left(\frac{x^2+y^2-2y+2}{2x^2+2y^2-4y+7}\right)=\frac{1}{5}, \text{ za } x=0 \text{ i } y=1.$$

□

2.3. Praktični optimizacijski problemi

Matematičke zadatke, kad god je to moguće, treba vezivati za konkretne situacije iz svakodnevnog života. Na taj način dolazi do izražaja povezanost matematike sa stvarnošću, što svakako povećava interes za rješavanje problema. U nastavku navodimo nekoliko takvih primjera.

Primjer 2.17. *Treba sa 400m žice ograditi dio dvorišta tako da se dobije ograđeni pravougaoni prostor najveće moguće površine, pri čemu ograda ima 4 struke, a zid zgrade služi kao jedna strana ograde. Odrediti stranice ograđenog prostora.*



Slika 1

Rješenje: Označimo sa x dvije strane ograde, a sa y onu stranu koja ima dužinu zida (Slika 1). Kako ograda ima 4 struke vrijedi

$$4(2x+y)=400 \iff 2x+y=100 \iff y=100-2x.$$

Površina pravougaonika je

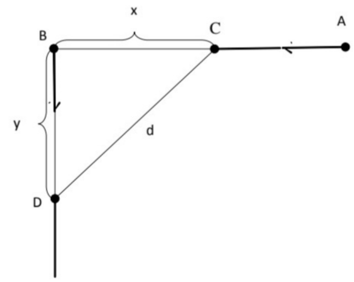
$$\begin{aligned}P&=xy=x(100-2x)=-2x^2+100x=-2\left(x^2-50x+625-625\right)=-2\left[(x-25)^2-625\right]\\&=-2(x-25)^2+1250.\end{aligned}$$

Dakle, maksimalna površina ograđenog prostora je $P_{\max}=1250m^2$, za $x=25m$ i $y=50m$. □

Primjer 2.18. *Iz tačaka A i B, prema Slici 2, polaze istovremeno dva voza u naznačenim smjerovima brzinom od $40\frac{km}{h}$, odnosno $30\frac{km}{h}$. Poslije koliko će vremena rastojanje između vozova biti najmanje, ako je $|AB|=80km$ i koliko je to rastojanje?*

Rješenje: Sa Slike 2 vidimo da je $y=|BD|=30t$, gdje je t vrijeme za koje voz pređe dato rastojanje, te $x=|BC|=|AB|-|AC|=80-40t$. Dalje je,

$$\begin{aligned}d^2&=x^2+y^2=(80-40t)^2+(30t)^2=40^2(2-t)^2+30^2t^2\\&=10^2\left[16(2-t)^2+9t^2\right],\end{aligned}$$



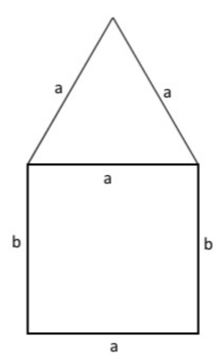
Slika 2

pa je

$$
\begin{aligned}
d =&10\sqrt{16\left(4-4t+t^2\right)+9t^2}=10\sqrt{25t^2-64t+64}\\
=&10\sqrt{25\left(t^2-\frac{64}{25}t+\left(\frac{32}{25}\right)^2-\left(\frac{32}{25}\right)^2\right)+64}\\
=&10\sqrt{25\left(t-\frac{32}{25}\right)^2-25\cdot\frac{1024}{625}+64}=10\sqrt{25\left(t-\frac{32}{25}\right)^2+\frac{576}{25}}\\
&\le 10\sqrt{\frac{576}{25}}=48,
\end{aligned}
$$

a znak jednakosti se postiže za $t=\frac{32}{25}h$. Dakle, $d_{\min}=48km$, za $t=\frac{32}{25}h=1^h16^{'}32^{''}$. □

Primjer 2.19. *Prozor ima oblik pravougaonika koji se na vrhu završava jednakostraničnim trouglom čija se osnovica poklapa sa gornjom osnovicom pravougaonika. Obim prozora iznosi* $4\,m$*. Kolika mora biti osnovica pravougaonika da bi prozor imao najveću površinu?*



Slika 3

Rješenje: Neka je O obim prozora prikazanog na Slici 3. Tada je $O=3a+2b=4$, odakle je

$$b=2-\frac{3}{2}a. \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
P &= ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \overset{(5)}{=} a\left(2 - \frac{3}{2}a\right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a - \frac{3}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = -\frac{6-\sqrt{3}}{4}a^2 + 2a \\
&= -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left[a^2 - 2\cdot\frac{4}{6-\sqrt{3}}a + \left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2\right] \\
&= -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left(a - \frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{6-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{\left(6-\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left(a - \frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{6-\sqrt{3}} \\
&\le \frac{4}{6-\sqrt{3}},
\end{aligned}
$$

a jednakost se postiže za $a = \frac{4}{6-\sqrt{3}}$, pa je

$$P_{\max} = \frac{4}{6-\sqrt{3}}m^2, \text{ za } a = \frac{4}{6-\sqrt{3}}m \text{ i } b = \frac{10-2\sqrt{3}}{11}m.$$

□

2.4. Primjena u ekonomiji

Funkcija troškova

Ako je Q obim proizvodnje (količina proizvoda), onda je funkcija $T(Q)$ funkcija ukupnih troškova u funkcionalnoj zavisnosti o obimu proizvodnje. Funkcija ukupnih troškova mora zadovoljavati određene uvjete (da bi uopće imala ekonomskog smisla).

1. $Q \geq 0$, odnosno obim proizvodnje ne može biti negativna vrijednost.
2. $T(Q) > 0$, to jest troškovi su uvijek pozitivni.
3. Porast obima proizvodnje uvijek dovodi do rasta ukupnih troškova.

Vrlo važnu ulogu u praksi igraju tzv. prosječni troškovi, koji predstavljaju iznos ukupnih troškova po jedinici proizvoda. Ako funkciju prosječnih troškova označimo sa $\overline{T}(Q)$. Tada je

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}.$$

Oblast definiranosti prosječnih troškova je ista kao i oblast definiranosti ukupnih troškova.

Funkcija prihoda i dobiti

Ukupni prihod predstavlja proizvod količine određene robe prodate na tržištu u određenom vremenskom periodu i cijene po kojoj je ta roba prodata. Ako za cijenu uvedemo oznaku p, a za prihod P, onda je

$$P = Q \cdot p.$$

Uočimo da je količina prodate robe na tržištu ustvari funkcija potražnje za tom robom. Poznato je da se potražnja izražava kao funkcija cijene proizvoda, to jest $Q = Q(p)$, pa je u tom slučaju ukupni prihod funkcija cijene p,

$$P(p) = Q(p) \cdot p.$$

Međutim i cijena robe se može posmatrati kao funkcija potražnje, to jest $p = p(Q)$ i tada je ukupni prihod funkcija potražnje Q

$$P(Q) = Q \cdot p(Q).$$

Pri tome su $p(Q)$ i $Q(p)$ međusobno inverzne funkcije.

Ukupna dobit ostvarena u proizvodnji jednog artikla definira se kao razlika ukupnog prihoda prodate količine artikla na tržištu u određenom vremenskom periodu i ukupnih troškova proizvodnje te prodate količine artikla. Uvedemo li oznaku D za ukupnu dobit, tada je

$$D = P - T.$$

Ukoliko su nam poznate funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda kao funkcije potražnje Q, tada je i ukupna dobit funkcija potražnje

$$D(Q) = P(Q) - T(Q).$$

Za proizvodnju nekog artikla vrlo je značajan *interval rentabilnosti* (Q_1, Q_2). Pod tim pojmom podrazumijevamo interval nezavisne varijable u funkciji ukupne dobiti gdje je ukupna dobit pozitivna. Nivo proizvodnje $Q^* \in (Q_1, Q_2)$ za koji se ostvaruje maksimalna dobit naziva se *optimalnom proizvodnjom*, a cijena $p = p(Q^*)$ se naziva optimalnom prodajnom cijenom.

Primjer 2.20. *Data je funkcija ukupnih troškova $T(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 5Q$, gdje Q označava količinu proizvoda. Odrediti minimalne prosječne troškove i na kojem nivou proizvodnje se dostižu.*

Rješenje: Prosječni troškovi se definiraju kao $\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$, pa imamo

$$\begin{aligned}\overline{T}(Q) &= 2Q^2 - 6Q + 5 = 2\left(Q^2 - 3Q + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5\\ &= 2\left(Q - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

a jednakost vrijedi kada je $Q = \frac{3}{2}$. Zbog toga je $\min\left(\overline{T}(Q)\right) = \frac{1}{2}$, za $Q = \frac{3}{2}$. □

Primjer 2.21. *Data je funkcija potražnje $Q(p) = 20 - 0,5p$, gdje je p cijena proizvoda i prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = Q + 30 + \frac{3}{Q}$, gdje je Q količina proizvoda. Odrediti funkciju ukupne dobiti i maksimalne dobiti.*

Rješenje: Neka je $P(Q)$ – ukupan prihod, $T(Q)$ – ukupni trošak, $\overline{T}(Q)$ – prosječni trošak, p – cijena, Q – potražnja. Ukupan prihod je jednak proizvodu prodate količine proizvoda i cijene proizvoda, to jest

$$P(Q) = Q \cdot p.$$

Cijena mora biti izražena kao funkcija količine, to jest $p = p(Q)$, pa je $P(Q) = Q \cdot p(Q)$. Zbog toga iz potražnje $Q(p)$ odredimo cijenu preko količine Q.

$$Q = 20 - \frac{1}{2}p \iff 2Q = 40 - p \iff p = 40 - 2Q.$$

Dakle,

$$P(Q) = Q \cdot (40 - 2Q) = -2Q^2 + 40Q.$$

S druge strane, ukupni trošak je iz formule $\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$ dat sa

$$T(Q) = Q \cdot \overline{T}(Q) = Q^2 + 30Q + 3.$$

Ukupna dobit (ukupni profit) je razlika ukupnih prihoda i ukupnih troškova. Dakle,

$$\begin{aligned}D(Q) &= P(Q) - T(Q) = -2Q^2 + 40Q - Q^2 - 30Q - 3 = -3Q^2 + 10Q - 3 = -3\left(Q^2 - \frac{10}{3}Q + 1\right)\\ &= -3\left(Q - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3},\end{aligned}$$

a jednakost vrijedi kada je $Q = \frac{5}{3}$. Prema tome, $D_{\max} = \frac{16}{3}$ za $Q = \frac{5}{3}$. □

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti najmanju vrijednost izraza $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ako su x i y pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y = 5$.
2. Između svih kvadrata upisanih u kvadrat stranice a, odrediti onaj koji ima najmanju površinu.
3. Koji od svih pravougaonika obima $2s$ ima najkraću dijagonalu?
4. U deltoid datih dijagonala d_1 i d_2 upisati pravougaonik tako da su mu stranice paralelne sa dijagonalom deltoida. Koji od upisanih pravougaonika ima najveću moguću površinu?
5. Koji uspravni valjak datog obima osnog presjeka $s = 100cm$ ima najveću bočnu površinu?
6. Normandijski prozor ima oblik pravougaonika koji se gore završava polukrugom. Kolika mora biti osnovica u pravougaoniku da pri obimu od $2m$ prostorija dobije najviše svjetlosti?
7. Dat je polinom $P(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 2y + 2$. Naći najmanju vrijednost ovog polinoma i odgovarajuće vrijednosti promjenljivih x i y.
8. Koji uslov moraju zadovoljavati promjenljive $a, b, c,$ i d da bi vrijednost polinoma $P = a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d)$ bila minimalna.
9. Za koje vrijednosti promjenljivih izraz
$$B = 5 + \frac{a^2 + 4ab + 4b^2 - 1}{4a^2 + 12ab + 9b^2 + 4a + 6b + 3}$$
ima najmanju vrijednost?

Zahvalnost

Posebnu zahvalnost upućujemo profesoru Mehmedu Nurkanoviću kao i profesorici Zehri Nurkanović, koji su pored profesionalne podrške pružili srdačan i ljubazan odnos i na ovaj način učinili na šu saradnju posebnom i vrlo korisnom za buduće generacije.

Literatura

[1] V. Mihajlović, *Zbirka rešenih zadataka iz algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
[2] S. Mintaković, *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1980.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika*, Printcom Tuzla, 2009.
[4] M. Nurkanović, O. Kurtanović, *Matematika za ekonomiste*, Printcom Tuzla, 2013.
[5] V. Stojanović, *Mathematiskop 2*, Beograd, 1999.
[6] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar, *Zbirka zadataka iz matematike,* Svjetlost, Sarajevo, 1987.

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 34 – 38

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Različiti načini izračunavanja $tg\frac{7\pi}{24}$

Dragoljub Milošević

Republika Srbija

Sažetak: U radu je dato šest različitih načina izračunavanja vrijednosti tangensa ugla od $\dfrac{7\pi}{24}$ (ili $52°30'$).

1. Uvod

Postoje određeni zadaci koji mogu da se riješe na jedan jedini način. Oni podsjećaju na planinski vrh koji može da se "osvoji" samo s jedne strane. Za razliku od njih, postoje i zadaci koji omogućavaju "osvajanje s više strana", to jest postoji više puteva koji vode do rješenja. Takvi zadaci omogućavaju da iskažemo svo naše bogatstvo ideja, dosjetki, domišljatosti i inventivnosti.

Matematičko iskustvo učenika bilo bi nekompletno ako mu ne bismo pružali šanse da pokuša da riješi pojedine zadatke na više načina. Time stiče samopouzdanje, razvija istraživački duh i svoju matematičku zrelost.

2. Izračunavanje vrijednosti $tg\frac{7\pi}{24}$

Sada ćemo dati više raznih načina izračunavanja tangensa ugla $\dfrac{7\pi}{24}$ (ili $52°30'$), to jest $tg\dfrac{7\pi}{24}$. Pri tome ćemo koristiti razne činjenice iz algebre, geometrije i trigonometrije.

Način I:

Korištenjem formule za tangens zbira, $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ i činjenice da je $\dfrac{7\pi}{24}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{8}$, dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24}=\frac{tg\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\frac{\pi}{6}tg\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+tg\frac{\pi}{8}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{3}+3tg\frac{\pi}{8}}{3-\sqrt{3}tg\frac{\pi}{8}}. \tag{1}$$

Budući da je

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}},$$

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: formule za tangens zbira i razlike, kosinusna teorema, Pitagorina teorema, pretvaranje razlike sinusa u proizvod, svojstva jednakostraničnog i jednakokrakog trougla, romba i deltoida

Kategorizacija: Stručni rad

Rad preuzet: mart 2021.

koristeći se identitetima sinusa i cosinusa dvostrukog ugla dobijamo

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}. \tag{2}$$

Iz (2) onda imamo

$$tg\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (1) konačno imamo

$$\begin{aligned} tg\frac{7\pi}{24} &= \frac{\sqrt{3}+3tg\frac{\pi}{8}}{3-\sqrt{3}tg\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{3}+3(\sqrt{2}-1)}{3-\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3}{3-(\sqrt{6}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3}{3-(\sqrt{6}-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+(\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3+(\sqrt{6}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-3\sqrt{6}-9-3\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{9-(9-6\sqrt{2})} \\ &= \frac{-12-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}(-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+4). \end{aligned}$$

Dakle,

$$tg\frac{7\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2.$$

Način II:

Korištenjem formule za tangens razlike, $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ i činjenice da je $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}$, dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24} = \frac{tg\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{24}}{1+tg\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{24}} = \frac{\sqrt{3}+tg\frac{\pi}{24}}{1+\sqrt{3}tg\frac{\pi}{24}}. \tag{4}$$

Na osnovu jednakosti (2) imamo

$$tg\frac{\pi}{24} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}. \tag{5}$$

Kako je

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

i

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

iz (5) dobijamo

$$tg\frac{\pi}{24} = \frac{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})},$$

odakle nakon proširivanja razlomka sa $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ imamo

$$tg\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2. \tag{6}$$

Iz (4) i (6) konačno dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Način III:
Korištenjem formule za tangens zbira, činjenice da je $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$ i relacije (6) imamo

$$\begin{aligned}
tg\frac{7\pi}{24} &= tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{24}}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{24}} \\
&= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{1-(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{-\sqrt{6}+\sqrt{3}+-+\sqrt{2}-3)} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.
\end{aligned}$$

Način IV:
Iz osnovne formule za tangens i relacije $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ imamo

$$tg\frac{7\pi}{24} = \frac{\sin\frac{7\pi}{24}}{\cos\frac{7\pi}{24}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{24}\right)}{\cos\frac{7\pi}{24}} = \frac{\cos\frac{5\pi}{24}}{\cos\frac{7\pi}{24}}.$$

Proširivanjem posljednjeg razlomka sa $2\sin\frac{\pi}{24}$ i korištenjem formule $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ dobijamo

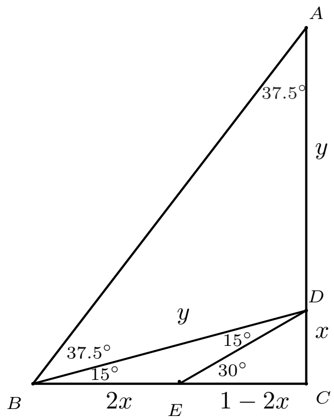
$$\begin{aligned}
tg\frac{7\pi}{24} &= \frac{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Racionalizacijom posljednjeg razlomka dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Način V:

Nacrtajmo $\triangle ABC$ kod koga je $|BC| = 1$, $\angle ABC = 52,5^\circ$ i $\angle BCA = 90^\circ$. Tada je $\angle CAB = 90^\circ - 52,5^\circ = 37,5^\circ$.



Na stranici AC odredimo tačku D tako da je $\angle DBC = 15^\circ$, a time je $\angle ABD = 37,5^\circ$. Trougao $\triangle ABD$ je jednakokraki pri čemu je $|AD| = |BD| = y$.

Na stranici BC odredimo tačku E tako da je $\angle BDE = 15^\circ$. Time je $\triangle BED$ jednakokraki i stavimo $|BE| = |ED| = 2x$. Kako je $|BC| = 1$, onda je $|EC| = 1 - 2x$. Iz pravouglog trougla $\triangle DEC$, u kome je $\angle DEC = 30^\circ$, imamo $\sin 30^\circ = \dfrac{DC}{2x} = \dfrac{1}{2}$, iz čega zaključujemo da je $|DC| = x$.

Primjenom pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle CDE$ imamo $(2x)^2 = x^2 + (1-2x)^2$, odakle dobijamo da je $x = 2 - \sqrt{3}$ (jer je $x < 1$). Kako je i $\triangle BCD$ pravougli opet imamo $y^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2$, te je $y = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Najzad, iz $\triangle ABC$ (koji je pravougli trougao) slijedi

$$tg\, 52,5^\circ = tg\frac{7\pi}{24} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{x+y}{1} = (2-\sqrt{3}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2.$$

Način VI:

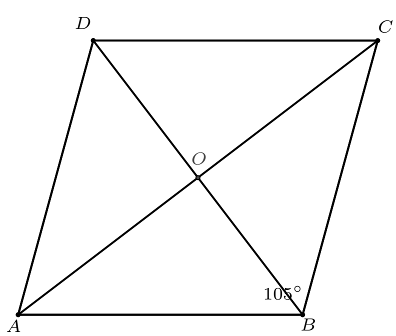
U rombu $ABCD$ stranice 1 u ugla $\angle ABC = 105^\circ$, dijagonale AC i BD obilježimo redom sa $2x$ i $2y$ i njihov presjek je tačka O. Primjenom kosinusne teoreme na jednakokraki trougao $\triangle ABC$ imamo

$$(2x)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 75^\circ.$$

Kako je

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

zaključujemo da je $x^2 = \dfrac{1}{8}(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2})$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle ABO$ imamo da je $y^2 = 1 - x^2 = \dfrac{1}{8}(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2})$. Koristeći ove dvije relacije za x^2 i y^2 sada imamo



$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2} &= \frac{\frac{1}{8}(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\frac{1}{8}(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \cdot \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{6-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \left(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)^2\end{aligned}$$

Kako iz parvouglog trougla $\triangle ABO$ imamo $tg\angle ABO = tg\, 52,5^\circ$, vrijedi

$$tg\frac{7\pi}{24} = \frac{x}{y} = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2.$$

3. Umjesto zaključka

Uočavamo da se za prva četiri rješenja koriste uobičajene formule za tangens zbira i razlike, adicione formule za sinus i kosinus, pretvaranje razlike sinusa u proizvod, te formula za sinus polovičnog ugla. U peostala dva rješenja koristi se znanje iz geometrije (Pitagorina teorema, svojstva jednakokrakog trougla i romba) i trigonometrije. Nadamo se da će ovaj rad inspirisati buduće čitaoce da daju još koje rješenje ovog zadatka ili ,pak, neki drugi zadatak riješe na više raznih načina.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene)*, Bosanska rijweč, Sarajevo, 2004.
[2] Z. Kumik: *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 39 – 46

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Analiza eksterne mature u općim gimnazijama Tuzlanskog kantona sa fokusom na maturski ispit iz matematike

Hariz Agić[a]

[a] *Stručni savjetnik za prirodno-matematičko područje, Pedagoški zavod Tuzlanskog kantona*

Sažetak: U radu se prezentuje razvoj eksterne mature u srednjim školama TK sa fokusom na matematiku. Pokazuje se da su ishodi maturskog ispita u uskoj vezi sa kvalitetom rezultata i uslova polaganja maturskog ispita iz matematike. Predstavljeni su rezultati iz maturskog ispita matematike u općim gimnazijama TK, od 2006. do 2019. godine. Na kraju se na osnovu toga i istraživanja među učesnicima mature, preporučuju neka poboljšanja eksterne mature.

1. Uvod

Eksterna matura na području Tuzlanskog Kantona (TK) se počela izvoditi još 2006. godine u općim gimnazijama jer je bila utemeljena Nastavnim planom i programom za opće gimnazije TK, donesenim 2003. godine. U proteklih 15 godina su stvorena respektabilna iskustva u planiranju i izvođenju eksternih matura, koja su, na osnovu egzaktnih podataka i rezultata istraživanja među neposrednim akterima ovog procesa, služila da se svake godine poboljšavaju svi segmenti mature. Na dizajn mature su imali najveći utjecaj rezultati projekata na nivou države Bosne i Hercegovine (BiH), finanisranih od strane Europske Komisije.

Krajem nastavne 2016./2017. godine, završen je jedan od tih projekata Europske unije, vezan za definiranje koncepta eksterne mature za gimnazije na nivou BiH. Projekat nije rezultirao očekivanim ishodima, kako je najavljivano, a to je planiranje i organizacije jedinstvene eksterne mature na nivou BiH. Iako rezultat nije očekivan, pokazalo se da su iskustva dobivena u tom projektu značajna za poboljšanja naše mature u TK, naročito u segmentima kreiranja predmetnih kataloga i izradi ispitnih materijala, koristeći veći asortiman tipova zadataka i okvirnu matricu za testove koji uključuju predmetne oblasti, zadatke po nivoima i kompetencije cjeloživotnog učenja.

Iskustva iz eksterne mature u općim gimnazijama su poslužila kao osnova za planiranje i uvođenje ”male mature” za učenike završnih razreda svih osnovnih škola TK, koja je izvedena kao pilot projekat 2013. i 2014., a od 2015. do 2019. i 2021. godine, kao završno testiranje za sve učenike završnih razreda osnovnih škola. (*www.malamatura.pztz.ba*)

Donošenjem Pravilnika o polaganju maturskog ispita u gimnaziji, tehničkoj i umjetničkoj srednjoj školi na području Tuzlanskog kantona (”Službene novine TK”, br.:2/19), definisana je matura na kraju završnog razreda u svim srednjim školama, to jest gimnazijama, tehničkim i umjetničkim srednjim školama na području Tuzlanskog kantona. Pokrenute su inicijative i aktivnosti oko vrednovanja rezultata mature prilikom upisa na fakultete Univerziteta u Tuzli, shodno odredbama iz člana 98. stav 2. alineja (9) Zakona o visokom obrazovanju TK (u: ”Službenim novinama” broj 7/16).

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: eksterna matura, maturski test iz matematike
Kategorizacija: stručni rad
Rad preuzet: decembar 2021.

Prošle godine je trebalo organizirati provođenje eksterne mature za sve srednje škole (osim KŠC i Behram-begove medrese). To se desilo samo djelimično zbog pandemije Covid 19. Tom prilikom su eksternu maturu, u skladu sa važećim Pravilnikom, polagali u potpunosti samo učenici koji su to željeli (njih 59), uglavnom zbog nastavka školovanja u inostranstvu. Ostali učenici su polagali interni dio mature u tehničkim školama, dok je učenicima gimnazija izdata diploma o završetku školovanja bez polaganja eksterne mature.

Konačno, 2021. godine je izvedena prva matura po osnovu donesenog Pravilnika iz 2019. godine u kojoj su učestvovali svi maturanti srednjih tehničkih i umjetničkih škola i gimnazija, osim dvije, gore navedene škole. Iskustva stečena u realizaciji ove mature su dragocjena. Strahovalo se od rezultata te mature iz mnogo razloga jer je nastava bila izvođena kombinovano, online i po skraćenom režimu.

U radu ćemo se baviti rezultatima sa mature iz predmeta matematika za period kada je ona bila prisutna samo za maturante općih gimnazija TK, a to je period od 2006. do 2019. godine. To je normalno jer je nakon 2019. godine uvedena eksterna matura za sve srednje škole sa novim parametrima koji do 2019. godine nisu vrijedili.

2. Interes za polaganje matematike kao maturskog predmeta

U Tabeli 1.[1)] je prikazan pregled podataka o tome kako su se učenici opredjeljivali za izborne predmete od početka izvođenja mature. Učenici su se mogli opredijeliti za jedan od pet parova izbornih predmeta koji su se proučavali po tri sata sedmično, dok je treći izborni predmet, u trajanju od 2 sata, bio iz reda ostalih predmeta.

Godina	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Broj ucenika	921	959	1029	944	989	966	753	871	1181	1181	880	620	447	502
Predmeti														
Biologija i Hemija	16	23	17	20	19	21	26	27	32	31	33	34	32	32
BHS jezik/ prvi strani jezik	16	19	22	22	14	17	20	13	11	16	13	17	14	11
Filozofija i Sociologija	10	7	11	15	17	13	12	13	11	9	9	6	6	14
Matematika i Fizika	14	14	13	20	21	19	25	23	24	23	22	23	27	28
Historija i Geografija	23	26	37	23	29	30	17	24	22	21	23	20	21	15

Tabela 1: Pregled izabranih predmeta na eksternim maturama od strane maturanata u procentima

Podaci govore da je interes za prirodno-matematičkom grupom predmeta rastao iz godine u godinu na uštrb predmeta iz jezičke i društvene grupe predmeta (matematika: od 14% na prvoj maturi 2006. godine do 28% na maturi 2019. godine). To pokazuje da su se učenici opredjeljivali za izborne predmete u skladu sa svojom prefesionalnom orijentacijom, što je i bio jedan od ciljeva izborne nastave. Na početku su učenici birali "lakše" predmete, da bi u zadnjih osam godina interes učenika više išao prema prirodno-matematičkim disciplinama, jer je na tržištu rada bio pojačan interes i potreba za stručnjacima iz medicinskih i tehničkih nauka.

Nećemo se baviti dubljom analizom i razlozima, niti posljedicama ovakvog stanja. Za nas je bitno da pratimo rezultate na maturskim ispitima iz matematike. Vidjeće se da su rezultati iz matematike u uskoj vezi sa prosječnom ocjenom mature.

Obrazovni aktivisti, okupljeni oko projekta eksterne mature, su godinama poboljšavali procedure od planiranja, organizacije do vrednovanja, rješavanja prigovora i objavljivanja rezultata mature. Maturom je rukovodila Glavna maturalna komisija od 7 članova na čelu sa osobom sa Univerziteta u Tuzli. Za svaki izborni predmet su formirane Predmetne komisije od 3 člana od kojih su u načelu dva univerzitetska profesora i jedan predstavnik Pedagoškog zavoda.

[1)] U Tabeli 1. nisu prikazani procenti izbornih predmeta: Psihologija, Informatika, Menadžment i poduzetništvo.

3. Ispitni materijali

Pravila, način, te bliža uputstva oko sadržaja koji se uzimaju u obzir pri polaganju maturskog testa iz matematike se sadrže u Ispitnim katalozima (*www.ematura.pztz.ba*). Ispitni katalog za predmet matematika u srednjim školama TK je temeljni dokument ispita kojim se jasno opisuje što će se i kako ispitivati na eksternoj maturi iz ovoga predmeta na višem i osnovnom nivou. Matematika kao općeobrazovni predmet se polaže u školama gdje se matematika intenzivno proučava kroz redovne i izborne programe.

Eksterna matura egzistira na TK od 2006. godine i jedina je u državi BiH sa takvim kontinuitetom i pravnim okvirom. Ona je nastala kao pokušaj da se naše obrazovanje u dijelu vrednovanja učeničkih ishoda na kraju srednješkolskog obrazovanja, uskladi sa obrazovnom praksom u zemljama EU. Ti projekti su imali za cilj uvođenje eksterne mature u srednjim školama BiH, u saradnji obrazovnih vlasti u TK i nevladinog sektora (Otvoreno društvo BiH, Breatish Council itd). Realizator te promjene je bio Pedagoški zavod TK koji je okupio timove stručnjaka sa fakulteta Univerziteta u Tuzli, srednjih škola, Pedagoškog zavoda i nadležnog ministarstva.

U periodu od 2006. do 2018. godine eksternu maturu su imali maturanti općih gimnazija TK. Sastojala se iz 3 ispita: Test općeg znanja, prvi i drugi izborni predmet. Matematiku su polagali u dva dijela. Prvo u okviru Testa općeg znanja [2)]. Druga dva ispita su iz prvog i drugog izbornog predmeta, koji su definisani NPP-om za opće gimnazije iz 2003. godine. Jedino se u našem Kantonu, matematika izučava u zadnje 2 godine u gimnazijama i to 3 redovna i 3 izborna časa sedmično. Ispitni materijali su se formirali iz sljedećih nastavnih sadržaja:

1. Matematička logika, skupovi i realni brojevi.
2. Geometrija u ravni, homotetija i sličnost. Površina geometrijskih figura u ravni, geometrijske figure u prostoru (stereometrija).
3. Linearne, kvadratne, iracionalne, eksponencijalne, logaritamske jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih i kvadratnih jednačina.
4. Trigonometrija, trigonometrijske jednačine. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Analitička geometrija u ravni.
5. Matematička indukcija. Kombinatorika i vjerovatnoća. Nizovi i redovi. Realna funkcija jedne realne promjenljive. Diferencijalni račun.

(Katalog za matematiku, *www.pztz.ba*).

U pravilu, svake godine su maturanti imali 10 zadataka, koji su nosili po 10 bodova[3)]. Vrednovanje i ocjenjivanje radova su radile ispitne komisije, sastavljene uglavnom od osoblja sa Odsjeka matematika, Prirodno-matematičkog fakulteta u Tuzli, profesora, asistenata i studenata završnih godina. Nakon svake mature su analizirani rezultati mature i pojedinih maturskih ispita, te ukazivali na dalje pravce u poboljšanju testova, priprema i samog procesa polaganja mature.

Takav model se koristio sve do 2017. godine. Te godine je na nivou države bio prisutan projekat Eksterne mature u BiH, po drugi put, koji nije donio rezultat na nivou države jer nije uspostavljena eksterna matura na nivou BiH. Mi smo iskoristili iskustva iz realizacije projektnih aktivnosti i unijeli promjene u našu maturu već 2018. godine, kada smo umjesto dosadašnjih 10 u testu za matematiku imali 15 zadataka, da bi već iduće 2019. godine, imali 20 zadataka, kreiranih na osnovu unaprijed poznate strukture testa. Te godine je matura proširena na sve srednje škole u TK. Trebalo je napraviti nove kataloge koji sadrže samo one sadržaje (Tabela 2.) iz matematike koji se izučavaju u svim srednjim školama i to za niži nivo samo gradivo u prva dva razreda (14 zadataka) i viši nivo za škole u kojima se matematika izučava sve četiri godine.

[2)] Test općeg znanja je sadržavao 100 zadataka iz svih predmeta i njihovih sadržaja koji učenici općih gimnazija zajedno proučavaju kroz gimnazijsko obrazovanje srazmjerno ukupnom broju časova u toku gimnazijskog školovanja. Matematika je zastupljena sa 13 zadataka. Polagali su ga svi učenici. On je eliminatoran u postupku polaganja mature.

[3)] Pogledati primjerke maturskih testova iz matematike u svim provedenim maturama od 2006. godine do danas na *www.ematura.pztz.ba*

Područja	Tematske cjeline
I Područje	Skupovi brojeva **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**. Stepeni sa cjelobrojnim eksponentom. Cijeli algebarski izrazi (polinomi). Racionalni algebarski izrazi. Procentni račun, omjer, proporcija.
II Područje	Linearna funkcija. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina.
III Područje	Korijeni i operacije sa korijenima. Kompleksni brojevi.
IV Područje	Kvadratna funkcija i kvadratna nejednačina. Kvadratna jednačina (diskriminanta, Vieteova pravila).
V Područje	Eksponencijalna funkcija, eksponencijalne jednačine. Pojam logaritma. Logaritamska funkcija. Logaritamske jednačine. Primjena logaritma.
VI Područje	Planimetrija. Stereometrija. Trignometrija. Analitička geometrija u ravni.
VII Područje	Binomni obrazac. Aritmetički i geometrijski niz. Realna funkcija: Osobine realne funkcije.

Tabela 2: Spisak tematskih područja (Katalog maturskog ispita iz matematike za srednje škole, *www.ematura.pztz.ba*).

Na osnovu toga je kreirana ispitna tabela sa svim područjima, nivoima zahtjeva, udjelima u broju zadataka i bodova.

Područja/Tematske cjeline	Znanje i razumijevanje	Primjena	Rješavanje problema	Procenat	Bodovi	Broj zadataka
I Područje	2	2		20	20	4
II Područje	1		1	10	10	2
III Područje	1	1		10	10	2
IV Područje		1	1	10	10	2
V Područje	1	1		10	10	2
VI Područje	2	1	1	20	20	4
VII Područje	1	2	1	20	20	4
	40%	**40%**	**20%**	**100%**	**100%**	**20%**

Tabela 3: Struktura testa iz Matematike na višem nivou (Katalog maturskog ispita iz matematike za srednje škole, *www.ematura.pztz.ba*).

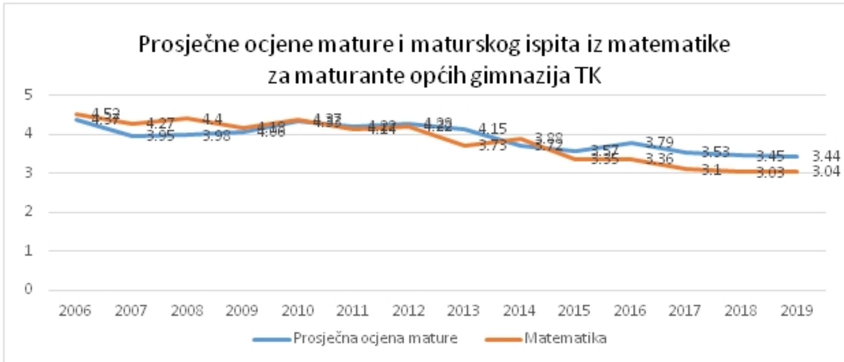
Primjena inovirane metodologije za kreiranje maturskog testa iz matematike je imala za cilj da se postignu sljedeći efekti: bolja osjetljivost testa (više zadataka sa manjim brojem bodova), veća zastupljenost nastavnih sadržaja, kredibilnost i validnost rezultata mature.

4. Rezultati sa polaganja maturskih ispita iz matematike

Na Slici 4. su predstavljeni rezultati, prosječna ocjena sa cjelokupne mature i prosječna ocjena iz matematike za maturante općih gimnazija TK. Sa slike je vidljivo da su kod matematike prosječne ocjene u periodu od 2006. do 2019. godine u blagom padu, jer se svake godine radilo na poboljšanju testova, sistema praćenja rada učenika itd.

Matematika	Prijavljenih	Pristupili	Prosječna ocjena	nedovoljan (1)	dovoljan (2)	dobar (3)	vrlo dobar (4)	odličan (5)
2013	197	197	3.73	13	27	31	56	70
2014	280	279	3.88	15	37	41	59	127
2015	267	266	3.35	34	50	52	49	81
2016	192	190	3.36	29	23	40	46	52
2017	145	143	3.10	17	31	39	33	23
2018	121	119	3.03	26	28	15	17	33
2019	139	139	3.04	29	25	25	32	28

Tabela 4: Pregled uspjeha iz matematike sa raspodjelom ocjena na maturama, 2013.-2019.



Slika 1: Pregled prosječnih ocjena iz matematike i mature 2006.-20019.

Ako pogledmo raspodjelu ocjena u Tabeli 4. u periodu od 2013. do 2019. godine, može se zaključiti da je raspodjela po ocjenama promjenjiva. Naime, primjećujemo da je raspodjela uspjeha po ocjenama, u prve četiri godine, nedovoljno pravilna, dok je u zadnje tri godine, prilično pravilna, što je rezultat mjera koje su provođene, a tiču se kvaliteta testova (ispitna tablica), dežuranja od strane eksternih dežurnih za vrijeme ispita, te ispravljanja radova od strane ocjenjivačkih timova.

MATEMATIKA	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
MSŠ Banovici	-	-	-	3.33	3.84	**5.00**	3.06	4.33	3.71	-	2.25	2.67	2.88	-
MSŠ Doboj-Istok	3.46	-	-	-	-	-	-	-	-	2.79	**4.30**	-	-	2.43
Gimnazija "Mustafa Kamaric" Gracanica	3,63	**4,64**	4,00	**4,44**	4,25	**4,53**	4,15	3,56	3,86	**3,91**	**3,80**	4,23	**4,67**	2,37
Gimnazija "Mustafa Novalic" Gradacac	**4,59**	**4,48**	4,08	**4,42**	4,29	4,07	**4,68**	2,87	3,83	**4,00**	**3,56**	2,94	**4,80**	**4,14**
MSŠ "Musa Cazim Catic" Kladanj	3,88	**4,75**	**4,77**	**4,63**	**4,40**	-	**4,53**	3,50	3,53	3,25	3,25	3,25	1,82	2,82
Gimnazija Lukavac	-	**4,61**	**4,46**	-	4,32	**4,20**	4,00	**4,82**	**4,26**	3,04	**3,43**	3,83	2,60	-
MSŠ Sapna	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,45	-	-	-	-
MSŠ Kalesija	3,84	-	-	4,14	3,98	3,67	-	-	-	-	-	-	-	-
MSŠ Srebrenik	-	-	**4,79**	2,59	**4,47**	**4,23**	**4,36**	**4,79**	**4,53**	3,33	**4,00**	3,40	-	**4,09**
Gimnazija "Ismet Mujezinovic" Tuzla	**4,62**	4,12	-	**4,43**	3,93	3,56	4,07	3,50	**4,14**	**3,82**	**3,43**	3,17	2,53	3,00
Gimnazija "Meša Selimovic" Tuzla	4,42	4,11	**4,41**	**4,82**	**4,57**	**4,59**	4,14	3,23	**4,12**	**3,95**	**3,79**	2,84	**3,03**	**3,56**
Gimnazija Živinice	3,63	3,23	4,23	4,17	4,00	3,50	**4,58**	**4,24**	3,14	2,81	2,44	2,26	2,00	2,27
Prosjecna ocjena-Matematika	**4,52**	**4,27**	**4,40**	**4,18**	**4,37**	**4,14**	**4,22**	**3,73**	**3,88**	**3,35**	**3,36**	**3,1**	**3,03**	**3,04**

Tabela 5: Pregled prosječnih ocjena iz matematike po školama i predmetima, 2006 - 2019.

U Tabeli 5. su predstavljeni podaci o prosječnim ocjenama iz matematike po školama u periodu od 2006. do 2019. godine. Prosječna ocjena iz matematike na nivou kantona se dobija kao prosjek ocjena svih učenika koji su radili matematiku, a ne kao prosjek ocjena iz matematike na nivou škola. Iz pregleda prosječnih ocjena se vidi trend laganog pada prosječnih ocjena u skladu sa sličnim trendom prosječnih maturskih ocjena iz matematike. Boldirane vrijednosti su iznad prosječne vrijednosti. Nakon sabiranja boldiranih vrijednosti za svaku školu pojedinačno, mogu se proglasiti najuspješnije škole iz matematike. Svakako da su to škole: Gimnazija "Meša Selimović" iz Tuzle, odjeljenja gimnazije u Srebreniku, gimnazija u Gradačcu itd. Ovo može biti indikator kvaliteta rada nastavnika matematike. Nakon svake izvedene mature je izvršeno istraživanje među učesnicima procesa izvođenja mature: učenicima i nastavnicima, koji su bili dežurni ili testatori.

5. Rezultati istraživanja[4)]

U cilju poboljšanja postupaka i procedura u izvođenju matura svake godine je bilo izvršeno istraživanje među učenicima kako bi se skupile relevantne povratne informacije sa primjedbama, sugestijama i prijedlozima mjera za poboljšanje validnosti i kredibiliteta eksternog vrednovanja učeničkih dostignuća na kraju srednješkolskog školovanja. Dobiveni rezultati istraživanja su bili od velike pomoći za organizatore i odgovorne osobe za planiranje i provođenje mature, za eventualno poboljšanje na zadovoljstvo svih zainteresiranih učesnika u odgojno-obrazovnom procesu.

Ispitanici su odgovarali na postavljena pitanja s ponuđenim odgovorima iz četiri područja ispitivanja. Mi ćemo u ovom radu predstaviti rezultate iz područja koja se tiču kvaliteta zadataka, odnosno maturskih testova. Zamolili smo učenike da se izjasne o pitanju - da li su zadaci bili lagani, teški ili rješivi. Intenzitet stavova na atribut: da su pitanja bila teška ili veoma teška, je prikazan na donjoj tabeli. Postoci ispitanika o stavu na atribute "da li su pitanja bila teška ili veoma teška", su prikazani donjom tabelom.

Godina	2019	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010
Procenat	36	23	26	25	46	65	62	-	-	-

Tabela 6: Procenat potvrdnih odgovora na konstataciju da su pitanja bila teška ili veoma teška.

Oko 36% učenika smatra da su zadaci bili srednje teški. Iz Tabele 6. se vidi da je intenzitet odgovora na tvrdnju da su "zadaci bili teški ili preteški" nešto veći 2019. od onih u 2018. godine. To je i očekivano jer se nakon 2018. godine uvodi izrada testova na bazi tablica za testiranje, (Tabela 3.) koja obuhvata zadatke iz više tematskih cjelina i različitih nivoa zahtjeva. To je u odnosu na prethodne godine bila značajna novina.

Godina	2019	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010
Procenat	3	2	0.82	2	3.69	10.5	7	13	27	21

Tabela 7: Procenat potvrdnih odgovora na konstataciju da su pitanja bila lagana.

Iz istraživanja je vidljivo da skoro 10% ispitanika smatra da su se "svi zadaci mogli riješiti", što je rezultat kreiranja testa na principu 40-40-20, to jest 40% niži, 40% srednji nivo i samo 20% zadataka sa višim nivoom zahtjevnosti. Konkretno, od 20 zadataka, njih 16 koji se mogu riješiti uvježbavanjem gradiva iz matematike na redovnoj nastavi, dakle, bez specijalnih priprema. Ovi podaci, uz one iz Tabele 6., mogu biti od pomoći u korekcijama kantonalnim predmetnim komisijama u poboljšanju testova u segmentu pouzdanosti i kredibiliteta. Dakle, pokazalo se da su testovi, njihova struktura, sastav i tipologija pitanja, jedna od ključnih karika mature. To je i u svijetu vječiti izazov za odgovorne koji se bave tim poslom. U našem slučaju je bitno znati da je ovo proces koji traje i koji ima zadatak da se stalno usavršava i poboljšava na zadovoljstvo svih učesnika. Svi odgovorni za planiranje i realizaciju mature imaju svoj dio odgovorosti. Prostor za poboljšanje mature proizilazi i iz otvorenih odgovora ispitanika- maturanata na kraju procesa izvođenja mature.

Iz otvorenih odgovora ispitanika su proizašle primjedbe i prijedlozi za poboljšanje. Iz istraživanja među maturantima (njih 10% od ukupnog broja) slijedi nekoliko zaključaka:

[4)] Istraživanje je provođeno svake godine od uvođenja eksterne mature, nakon polaganja drugog izbornog predmeta. Autor ovog rada je istovremeno i autor tih istraživanja.

1. Pripremanje za maturu je bilo sa puno slabosti. Zakazala je komunikacija između organizatora mature i škola, između škola i nastavnika i, što je najbolnije, između nastavnika i učenika. Oni traže izvođenje "probnih matura" (1-4 sedmice prije mature), kako bi se simulirala matura, ali i uslovi i time na "pravoj" maturi smanjio stres, na koji ukazuju ispitanici.

2. Učenici traže pomoć. Ispitanici traže bolju pripremu, definisanje literature sa zadacima koji se tretiraju prilikom izrade maturskih testova. Dakle, traže da se znaju pravila i uspostavi svojevrsni dogovor oko svih aspekata pripreme i izvođenja, te vrednovanja rezultata mature.

3. Učenici su izrazili nezadovoljstvo oko svrsishodnosti mature. Oni ukazuju na dupliranje testiranja: mature i prijemnog ispita na univerzitete, te ukazuju na potrebu svođenja na jedno polaganje i značajniji udjel rezultata mature u kriterijima prilikom upisa na fakultete.

4. Nadalje, učenici smatraju da se maturski ispit treba kreirati prema njihovim željama, afinitetima, u skladu sa njihovom profesionalnom orijetnacijom i budućim profesionalnim razvojem.

Zaključci koji proizilaze iz istraživanja među učenicima - maturantima, mogu i trebaju biti povod za poboljšanje postupaka u svim segmentima mature, uz aktivno učešće svih, naročito nastavnog osoblja u posvećenosti ka učinkovitijoj pripremi učenika za polaganje mature.

6. Zaključak

U ovom radu smo imali namjeru da obavijestimo čitaoce o tome kako se odvijala eksterna matura u općim gimnazijama i kako je matematika "prošla" u tim aktivnostima. Može se ustvrditi da je ogledalo mature, ustvari, stanje sa uspjehom i interesom za matematiku kao maturski predmet. To je vidljivo sa Slike 1. gdje su grafikoni sa prosječnim ocjenama mature i matematike, skoro "paralelni".

Pokazalo se da je interes za matematiku u stalnom porastu. Sve su prilike da je to uzrokovano sa potrebama tržišta, gdje puno bolje prolaze, uz doktore medicine, inžinjeri tehničkih struka. U tu svrhu bi bilo poželjno u fokus staviti sticanje potrebnih i funkcionalnih znanja, kojima se naše škole u BiH ne mogu pohvaliti, što je naročito pokazano u mjerenjima iz matematike u projektima PISA i TIMS.

Napokon, to iziskuje promjenu paradigme obrazovanja: okretanje sa NPP baziranih na nastavnim sadržajima i nastavnikom u fokusu, na kurikulume baziranim na unaprijed poznatim ishodima učenja i učenicima u centru pažnje, gdje je nastavnik moderator i organizator. To zahtijeva korjenitu promjenu u odnosu prema učenju, upotrebu djelotvornijih nastavnih metoda i oblika rada, uglavnom aktivnih metoda koje rezultiraju jačanjem šireg spektra cjeloživotnih kompetencija, od komunikacijskih, matematičkih do onih prirodnih i poduzetničkih kompetencija. U tu svrhu eksterna matura ima svoje mjesto. Ona nam pokazuje jesmo li na pravom putu. Da li smo mjerljivi na evropskom i svjetskom tržištu znanja? Kako iskoristiti maturu za postizanje djelotvornijeg obrazovanja sa funkcionalnim znanjima i vještinama?

Trebalo bi sagledati mogućnost priznavanja rezultata maturskih ispita kao rezultate prijemnih ispita, odati priznanje za najuspješnije učenike iz matematike na maturi, kao i za njihove nastavnike. Sve u svemu, pred svima nama je veoma značajan posao unapređenja odgojno-obrazovnog procesa, usklađivanja sa vrijedostima obrazovnih sistema zemalja bližeg i daljeg okruženja, a sve u cilju da naši učenici budu priznati, prihvaćeni kao ravnopravni u tom globalnom evropskom i svjetskom tržištu znanja i rada. To smo dužni uraditi našim učenicima.

Literatura

[1] H. Agić: *Funkcionalna znanja i vještine kod učenika i studenata u BiH: neki pogledi na stanje i perspective.* Federalno ministarstvo obrazovanja i nauke i Nacionalna i univerzitetska biblioteka BiH, Pp. 161-180, Sarajevo-Mostar, 2021.

[2] H. Agić, E. Jahić: *Znanja i vještine učenika na maturskom ispitu u opštim gimnazijama Tuzlanskog Kantona*, XII Međunarodna naučna konferencija "Pedagoška istraživanja i školska praksa", tema: Kvalitet i efikasnost nastave u društvu koje uči, Beograd, 2009.

[3] Katalog maturskog ispita u gimnaziji, tehničkoj i umjetničkoj srednjoj školi iz matematike, Pedagoški zavod TK, 2019. www.ematura.pztz.ba/katalozi (10.12.2021)

[4] Maturski ispitni testovi iz matematike, Pedagoški zavod TK, 2006-2021. www.ematura.pztz.ba/ arhiva-ispitnizadaci (10.12.2021)

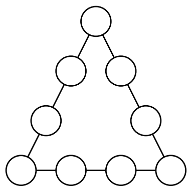
[5] Izvještaj o realizaciji izvođenja mature u srednjim školama Tuzlanskog kantona u školskoj 2020/2021. godini. Glavna maturalna komisija, Pedagoški zavod TK, 2021.

2

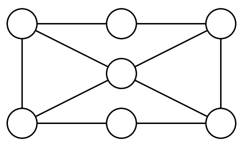
KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

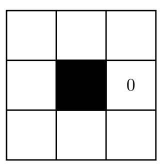
Zadatak 1. *U kružiće na donjoj slici upisati brojeve od 1 do 9 tako da zbir brojeva na svakoj strani trougla bude 20.*



Zadatak 2. *U kružiće na donjoj slici upisati brojeve od 1 do 7 tako da zbir brojeva horizontalno i dijagonalno bude 12.*



Zadatak 3. *U prazne kvadratiće upisati brojeve* $-4, -3, -2, -1, 1, 2$ *i* 3 *tako da suma brojeva po svakoj strani velikog kvadrata bude* 0 *(ili naprimjer -3).*



Zadatak 4. *U prazne kvadratiće upisati brojeve* $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ *i* 4 *tako da suma brojeva horizontalno, vertikalno i dijagonalno u velikom kvadratu bude* 0 *(ili naprimjer -4).*

	0	

Zadatak 5. *U prazne kvadratiće upisati brojeve* $0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$ *i* 0.9 *tako da suma brojeva horizontalno, vertikalno i dijagonalno u velikom kvadratu bude* 1.5*.*

	0.5	

Ciljna skupina: svi uzrasti

Nagradni zadatak: Hrčak na raspustu

Istraživacki centar Matheon razvija matematiku za ključne tehnologije i podržava partnere u industriji, biznisu i nauci. Škola i javnost su još jedan fokus aktivnosti. Matheon zajednički podržavaju tri berlinska univerziteta (FU Berlin, HU Berlin i TU Berlin) i instituti za matematička istraživanja (WIAS i ZIB). Matheon je osnovan 2002. godine kao DFG istraživački centar Matheon i finansira ga DFG više od 12 godina. Od juna 2014. godine postoji kao dio Einstein centra za matematiku, koji finansira Einstein fondacija.
Istraživacki centar Matheon vodi sljedece aktivnosti, posebno za škole:

1. Digitalni adventski kalendar : MATHEON kalender.
2. Predavanja o matematičkim temama za učenike 10-13 razreda: *MathInside - Matematika je posvuda.*
3. Video klipovi i radni materijali o raznim oblastima primjene matematike: *Kakve veze ima matematika s tim?.*
4. Više školskih aktivnosti.

Autor nagradnog zadatka u ovom broju je Cor Hurkens. Cor Hurkens je docent na Odsjeku za matematiku i računarstvo na Tehnološkom univerzitetu Eindhoven (TU/e). Njegovo područje interesovanja uključuje operaciona istraživanja, softver, algoritme i upravljačke sisteme. Corovo istraživanje usmjereno je na analizu svih vrsta kombinatornih algoritama, složenost svih vrsta kombinatornih problema, metode rješavanja zasnovane na teoriji poliedara i metode aproksimacije zasnovane na lokalnom pretraživanju. Cor se također bavi primijenjenim matematičkim modeliranjem, nadgledanjem industrijskih projekata i pisanjem radova o matematičkim metodama.

(Preuzeto iz *MATHEON kalender*)

Zadatak 1. *Divovski hrčak Hanibal spremio je golemu zalihu cijelih divovskih zrna pšenice za zimu. Hanibalov zimski raspust traje $t \geq 2$ dana, a zalihe pšenice mu se sastoje od k zrna.*
Prvog dana zimskog raspusta, Hanibal ujutro pojede jedno zrno pšenice, a popodne $\frac{1}{100}$ preostale zalihe.
Drugog dana zimskog raspusta, Hanibal ujutro pojede dva zrna pšenice i $\frac{1}{100}$ preostale zalihe u poslijepodnevnim satima. Trećeg dana zimskog raspusta, Hanibal ujutro pojede tri zrna pšenice i $\frac{1}{100}$ preostale zalihe u poslijepodnevnim satima.
I tako dalje: n-tog dana zimskog odmora, Hanibal jede n zrna pšenice ujutro i $\frac{1}{100}$ preostale zalihe popodne. Ujutro t-tog, posljednjeg dana, ostalo je još tačno t zrna koje Hannibal također pojede.
Koja je cifra jedinica dekadnog prikaza broja $k+t$?

Ciljna skupina: svi uzrasti
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 31.05.2022. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 50 – 55

Rješenja konkursnih zadataka 41 – 45

Osnovna škola

Zadatak 41. *Čitaoci Evolvente: Ajla, Tanja i Olivera, ocijenjene su iz matematike različitim ocjenama: 3, 4 i 5. Damir je pokušao pogoditi njihove ocjene:*
"Olivera je dobila 3. Tanja nije dobila 3, a Ajla nije dobila 5."
Olivera mu na to odgovori: "Rekao si istinu samo za jednu od nas tri". Odrediti ocjene ovih učenica.

Rješenje: Ako pretpostavimo da je Damir pogodio samo Oliverinu ocjenu, onda slijedi da su Olivera i Tanja dobile istu ocjenu 3, što nije moguće. Takođe je nemoguća pretpostavka da Tanja nije dobila 3 jer u tom slučaju ni jedna djevojčica nije dobila ocjenu 3. Damir je samo pogodio da Ajla nije dobila 5. Kako su ostale pretpostavke netačne, proizilazi da je Tanja dobila 3, a Olivera nije dobila 3. Dakle, Tanja je dobila ocjenu 3, Ajla 4 i Olivera 5. □

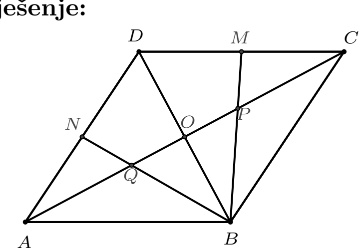
Zadatak 42. *Jedan satni mehanizam zaostaje dvije sekunde za šest dana. Koliko je sati pokazivao taj mehanizam 08.03.2021. godine u podne ako je pokazivao tačno vrijeme 01.01.2021. godine u podne?*

Rješenje: Od 1.1.2021. u podne do 8.3.2021. u podne ima 66 dana. U 66 dana imamo 11 puta po 6 dana. Kako za 6 dana časovnik zaostaje po dvije sekunde, za 66 dana će zaostati 22 sekunde. Taj časovnik će 8.3.2021. u podne pokazivati $11^h\ 55'\ 38''$. □

Zadatak 43. *Dijagonala AC romba $ABCD$ ima dužinu 6. Neka je M središte stranice CD i N središte stranice AD. Duži $|BM|$ i $|BN|$ sijeku dijagonalu AC u tačkama P i Q, redom.*

1. *Izračunati dužinu odsječka $|PQ|$.*
2. *Izračunati površinu trougla $\triangle BMN$, ako je $|BM| = 3$.*

Rješenje:



1. Neka je BD druga dijagonala. Dijagonale se sijeku u tački O i međusobno se polove. Onda su BM i CO težišne duži trougla $\triangle BDC$, a tačka P težište ovog trougla. Slijedi da je $2|PO| = |PC|$. Na isti način pokazujemo da je tačka Q težište trougla $\triangle ABD$ i da je $2|OQ| = |QA|$. Iz ovoga onda slijedi da je $|PQ| = \frac{1}{3}|AC|$, to jest $|PQ| = 2$.
2. Vrijedi $\triangle BND \cong \triangle BMD$ ($|BD| = |BD|$, $\angle NDB = \angle MDB$, $|DM| = |DN|$, pravilo SUS). Iz ovoga je onda $|BN| = |BM| = 3$. Duž $\overline{MN}$ je srednja linija trougla $\triangle ACD$ pa je $|MN| = \frac{1}{2}|AC| = 3$, iz čega zaključujemo da je trougao $\triangle BMN$ jednakostraničan i njegiva površina je $P = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 3^2}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

□

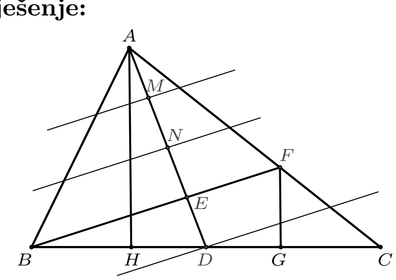
Ciljna skupina: Osnovna škola, Srednja škola

Zadatak 44. *Proizvod šest uzastopnih prirodnih brojeva je* $66 * 28*$. *Odrediti nepoznate cifre označene zvijezdicom (te cifre nisu obavezno jednake).*

Rješenje: Od šest uzastopnih prirodnih brojeva jedan mora biti djeljiv sa 5, a jedan sa 2. Time je ovaj proizvod djeljiv sa 10, te je cifra jedinica 0, a nepoznati proizvod je $66 * 280$. Kako je svaki treći prirodan broj (počev od 1) djeljiv sa 3, a svaki šesti djeljiv sa 6, onda je naš proizvod djeljiv sa 18, a samim tim i sa 9. Da bi broj bio djeljiv sa 9 , zbir njegovih cifara mora biti djlejiv sa 9, pa je preostala nepoznata cifra 5. Traženi broj je 665280. □

Zadatak 45. *U trouglu* $\triangle ABC$ *tačka* D *je središte duži* $\overline{BC}$. *Za tačku* E *duži* $\overline{AD}$ *vrijedi jednakost* $4|AE| = 3|AD|$. *Prava* BE *siječe stranicu* $\overline{AC}$ *u tački* F. *Odrediti razmjeru (omjer) površina trouglova* $\triangle ABF$ *i* $\triangle BCF$.

Rješenje:



Iz jednakosti $4|AC| = 3|AD|$ dobijamo $|AE| = \frac{3}{4}|AD|$. Zbog toga možemo odrediti tačke M i N na duži AE, takve da je $|AM| = |MN| = |NE| = |ED|$. Prava BE siječe stranicu AC u tački F. Sada prave kroz tačke M, N i D, paralelene sa BF sijeku stranicu AC i dijele je na 5 jednakih dijelova. Pri tome je $|CF| : |CA| = 2 : 5$. Neka je H podnožje visine iz tačke A trougla $\triangle ABC$ i neka je G podnožje visine iz vrha F trougla $\triangle BFC$.

$\triangle AHC \sim \triangle FGC$ pa imamo

$$|AH| : |FG| = |AC| : |FC| = 5 : 2,$$

a odatle je $|FG| = \frac{2}{5}|AH|$. Sada je

$$P_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |FG| = \frac{1}{2}|BC| \cdot \frac{2}{5}|AH| = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}|BC| \cdot |AH| = \frac{2}{5} \cdot P_{\triangle ABC}.$$

Dakle, $P_{\triangle ABF} = \frac{3}{5}P_{\triangle ABC}$ iz čega vidimo da vrijedi $P_{\triangle ABF} : P_{\triangle BCF} = 3 : 2$. □

Srednja škola

Zadatak 41. *Odrediti sve brojeve između 100 000 i 300 300 koji pri djeljenju sa 21 i 2021 daju isti ostatak 15.*

Rješenje: Označimo sa a tražene brojeve. Tada je $100\,000 < a < 300\,300$. Prema uslovu zadatka je $a : 21 = k(15)$; $\quad a : 2021 = l(15)$, $(k, l \in \mathbb{N})$, to jest

$$a = 21k + 15 \text{ i } a = 2021l + 15.$$

Ako oduzmemo prethodne dvije jednakosti, dobijamo

$$0 = 21k - 2021l \implies 2021l = 21k.$$

Sada iz $NZD(2021, 21) = 1$ i $2021l = 21k$ imamo da vrijedi $21|l$ i $2021|k$, iz čega dalje slijedi $k = 2021b$, $l = 21c$ za $b, c \in \mathbb{N})$. Dakle,

$$a = 21k + 15 \implies a = 21 \cdot 2021b + 15 \implies a = 42\,441b + 15 \ (b \in \mathbb{N}).$$

Kako se za $b < 3$ i za $b > 7$ dobiju vrijednosti manje od $100\,000$, odnosno veće od $300\,000$, posmatrajmo sljedeće situacije:

$$b = 3; \quad a = 127\,323 + 15 = 127\,338$$
$$b = 4; \quad a = 169\,764 + 15 = 169\,779$$
$$b = 5; \quad a = 212\,205 + 15 = 212\,220$$
$$b = 6; \quad a = 254\,646 + 15 = 254\,661$$
$$b = 7; \quad a = 297\,087 + 15 = 297\,102$$

Dakle, rješenja su:

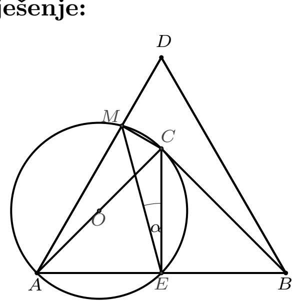
$$a \in \{127\,338, 169\,779, 212\,220, 254\,661, 297\,102\}$$

□

Emina Zahirović, IIb, JU Gimnazija „Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 42. *Nad duži $\overline{AB}$ kao osnovicom, konstruisani su jednakostranični trougao $\triangle ABD$ i jednakokraki pravougli trougao $\triangle ABC$. Tačka E je podnožje normale iz tačke C, na duž $\overline{AB}$, a tačka M je podnožje normale iz tačke C na duž $\overline{AD}$. Izračunati ugao $\angle CEM = \alpha$.*

Rješenje:



Posmatrajmo pravougle trouglove $\triangle AEC$ i $\triangle ACM$. I kod jednog i kod drugog trougla je stranica AC hipotenuza. Centar opisane kružnice pravouglog trougla je na sredini hipotenuze. Označimo tu tačku sa O. Sada primjećujemo da su uglovi $\angle CAM$ i $\angle CEM$ periferijski uglovi nad istim lukom opisane kružnice, te vrijedi $\angle CAM = \angle CEM$. Kako je

$$\angle CAM = \angle BAD - \angle BAC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

to je traženi ugao $\alpha = 15^\circ$.

□

Zadatak 43. *Odrediti sve realne vrijednosti parametra p, za koje je izraz*

$$\log[(p-1)x^2 + 2px + 3p - 2] \ ,$$

definisan za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Da bi navedeni izraz bio definisan za sve x iz $\mathbb{R}$ mora biti

$$(p-1)x^2 + 2px + 3p - 2 > 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Iz opšteg oblika kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$, da bi ova bila uvijek veća od 0, mora biti: $a > 0$ i $D < 0$. Dakle, mora vrijediti

$$a > 0 \iff p - 1 > 0 \iff p > 1 \tag{1}$$

i mora biti

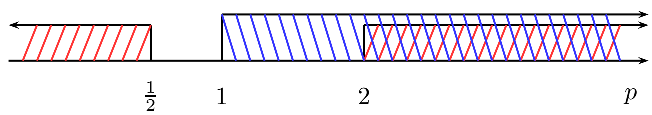
$$\begin{aligned} D < 0 &\iff b^2 - 4ac < 0 \iff (2p)^2 - 4(p-1)(3p-2) < 0 \iff 4p^2 - 4(3p^2 - 2p - 3p + 2) < 0 \\ &\iff 4p^2 - 12p^2 + 8p + 12p - 8 < 0 \\ &\iff -8p^2 + 20p - 8 < 0 \ / \cdot (-1) \\ &\iff 8p^2 - 20p + 8 > 0 \ / : 4 \\ &\iff 2p^2 - 5p + 2 > 0 \iff 2p^2 - p - 4p + 2 > 0 \iff p(2p-1) - 2(2p-1) > 0 \\ &\iff (2p-1)(p-2) > 0. \end{aligned}$$

Na lijevoj strani posljednje nejednačine je parabola koja je pozitivna za

$$p \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty). \tag{2}$$

Ako sada napravimo presjek skupova iz (1) i (2) dobijamo rješenje

$$p \in (2, +\infty).$$



$\square$

Amir Imširović, IVa, JU Gimnazija „Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 44. *Riješiti jednačinu* $1 + \dfrac{2}{\sin x} = -\dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$.

Rješenje: Ako zadanu jednačinu napišemo kao

$$\frac{2}{\sin x} = -1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}},$$

uočavamo da je desna strana uvijek negativna, pa su definicioni uslovi zadatka (DP) dati sa

$$\begin{aligned} &\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0 \ \wedge \ \sin x < 0 \iff \cos \frac{x}{2} \neq 0 \ \wedge \ x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ \iff & x \neq \pi + 2k\pi \ \wedge \ x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ \iff & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \quad (DP). \end{aligned}$$

Pređimo sada na rješavanje zadatka.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin x} = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 \iff & \frac{2}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 \\ \iff & \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 /^2 \text{ (zbog DP)} \\ \iff & \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4\cos^4 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1 \\ \iff & \frac{1}{(1 - \cos^2 \frac{x}{2}) \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4\cos^4 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1. \end{aligned}$$

Uvedimo sada smjenu $\cos^2\dfrac{x}{2}=t$. Prethodna jednačina postaje:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t)t}=\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{t}+1 \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{(1-t)t}-\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{t}-1=0\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{4t-(1-t)-4t(1-t)-4t^2(1-t)}{4t^2(1-t)}=0\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{4t-1+t-4t+4t^2-4t^2+4t^3}{4t^2(1-t)}=0\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{4t^3+t-1}{4t^2(1-t)}=0\\
\Longleftrightarrow\ & 4t^3+t-1=0\\
\Longleftrightarrow\ & 8t^3-4t^3+t-1=0\\
\Longleftrightarrow\ & (8t^3-1)-t(4t^2-1)=0\\
\Longleftrightarrow\ & (2t-1)(4t^2+2t+1)-t(2t-1)(2t+1)=0\\
\Longleftrightarrow\ & (2t-1)[4t^2+2t+1-t(2t+1)]=0\\
\Longleftrightarrow\ & (2t-1)(4t^2+2t+1-2t^2-t)=0\\
\Longleftrightarrow\ & (2t-1)(2t^2+t+1)=0\\
\Longleftrightarrow\ & 2t-1=0\\
\Longleftrightarrow\ & t=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Vratimo se sada nazad na smjenu, to jest riješimo jednačinu $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\frac{x}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I slučaj:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \iff x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Od ova dva rješenja, rješenje: $x_1=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ pripada D.P.

II slučaj:

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{x}{2}=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi \iff x=\pm\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Od ova dva rješenja, rješenje $x_2=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ pripada D.P.
Kako je $x_1=x_2$, zaključujemo da imamo jedno rješenje polazne jednačine i ono je dato sa

$$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

□

Denis Lazić, IVc, JU Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac

Zadatak 45. *Zbir prvih n članova jednog niza dat je izrazom*

$$S_n=9.5n^2-89.5n\ .$$

Naći opšti član tog niza i pokazati da je to aritmetički niz.

Rješenje: Kako je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, to jest $S_n = S_{n-1} + a_n$, imamo da je $a_n = S_n - S_{n-1}$. Iz datog podatka da je $S_n = 9.5n^2 - 89.5n$, je onda $S_{n-1} = 9.5(n-1)^2 - 89.5(n-1)$. Dakle vrijedi

$$\begin{aligned} a_n &= 9.5n^2 - 89.5n - \big(9.5(n-1)^2 - 89.5(n-1)\big) \\ &= 9.5n^2 - 89.5n - 9.5n^2 + 19n - 9.5 + 89.5n - 89.5 \\ &= 19n - 99. \end{aligned}$$

Kako je

$$a_{n+1} - a_n = 19(n+1) - 99 - (19n - 99) = 19,$$

to jest razlika $a_{n+1} - a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, je konstantan broj, $d = 19$, zaključujemo da je niz zaista aritmetički.
$\square$

EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 56 – 57

Rješenje nagradnog zadatka: Evolventa 4 (1) 2021.

Za Nagradni zadatak iz prethodnog broja (Kada je rođena Cheryl?) pristigla su četiri tačna rješenja. Dva rješenja su pristigla 25. jula (Amina Gutošić i Emana Suljendić) i nagrađuju se sa po 50 KM. Druga dva rješenja (Amer Subašić i Ammar Turbić) su pristigla nešto kasnije. Nagrađeni učenici treba da se jave glavnom uredniku Časopisa na email adresu: *mehmed.nurkanovic@unitz.ba*.

Zadatak 1. *Albert i Bernard upravo su upoznali Cheryl. "Kada je tvoj rođendan?" Albert je pitao Cheryl.*

Cheryl je malo razmislila i rekla: "Neću vam reći, ali dat ću vam neke naznake." Zapisala je popis od 10 datuma:

15. maj, 16. maj, 19. maj

17. jun, 18. jun

14. jul, 16. jul

14. avgust, 15. avgust, 17. avgust

"Moj je rođendan jedan od ovih datuma", rekla je.

Tada je Cheryl Albertu šapnula na uho mjesec i samo mjesec svog rođendana, a Bernardu je šapnula dan i samo dan.

"Možete li to sada pogoditi?" upitala je Alberta.

Albert: Ne znam kada ti je rođendan, ali znam da ni Bernard ne zna.

Bernard: U početku nisam znao, ali sada znam.

Albert: Pa, sad znam i ja!

Kada je Cherylin rođendan?

Objavljujemo rješenje (u cijelosti) ***Amine Gutošić***.

Rješenje:

Među 10 datuma koje je Cheryl ponudila Albertu i Bernardu nalaze se 4 različita mjeseca (maj, juni, juli, august), te 6 različitih dana (14., 15., 16., 17., 18. i 19.).

Nakon Albertove prve izjave da ne zna kada je Cherylin rođendan, ali zna da ni Bernard to ne zna - Bernard kaže kako u početku nije znao, ali sada zna.

Kako Albert zna samo mjesec rođenja, a Bernard zna samo dan rođenja, lahko zaključujemo da to nije 18. juni niti 19. maj. Zašto? Zato što se brojevi 18 i 19 pojavljuju samo jedanput među ponuđenim datumima (ostali se pojavljuju dva puta), pa da je jedan od njih dan Cherylinog rođenja, Bernard bi u početku znao kada je Cherylin rođendan. No, kako kaže da to nije znao u početku, to znači da 18. juni i 19. maj otpadaju od mogućih rješenja.

Sada se vraćamo na Albertovu prvu izjavu: Albert izjavljuje da zna da Bernard ne zna datum Cherylinog rođenja. Ako bi mjesec koji je Albert dobio od Cheryl bio juni ili maj, postojala bi mogućnost da datum bude 18. juni ili 19. maj, odnosno postojala bi mogućnost da Bernard zna. No, Albert sa sigurnošću kaže da zna da Bernard ne zna, tako da mjesec Cherylinog rođenja nije maj niti juni.

Sada gledamo Bernardovu izjavu kada kaže da u početku nije znao datum, ali da nakon Albertove izjave zna tačan datum Cherylinog rođenja. Zaključivši poput navedenog, Bernard shvata da je mjesec Cherylinog rođenja juli ili august. Sada imamo 5 potencijalnih datuma Cherylinog rođendana, od kojih imamo dva sa istim danom: 14. juli i 14. august. Ako bi dan Cherylinog rođenja bio 14., Bernard ne bi bio siguran koji je mjesec njenog rođenja jer su jednake šanse za 14. juli i 14. august. Dakle, ostala su 3 datuma: 16. juli, 15. august i 17. august.

Ciljna skupina: svi uzrasti

Napokon dolazimo do Albertove druge i posljednje izjave, a to je da nakon Bernardove izjave i on zna kada je Cherylin rođendan. Kao što sam navela, preostala su tri datuma, svi sa različitim danima, no dva imaju isti mjesec, a to su: 15. august i 17. august. Ako bi jedan od njih bio Cherylin rođendan, Albert ne bi bio siguran koji, budući da bi imao samo informaciju da je to mjesec august. No, mi imamo informaciju lično od Alberta da on zna koji je to datum, što znači da nema prostora za nesigurnosti, odnosno Cherylin rođendan nije u mjesecu augustu.

Ovo nas dovodi do konačnog rješenja: Cherylin rođendan je 16. jula. □