ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

UM TK

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 5, No. 1, TUZLA 2022.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 5, No. 1 , 2022

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. ili direktno na https://evolventa.ba
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, decembar 2022. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 2 – 17

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Matematičke igre u nastavi matematike

Sajra Kasić

Univerzitet u Bihaću

Sažetak: U vremenu razvoja modernih tehnologija pred nastavnika i nastavni proces postavljeni su mnogobrojni izazovi. Kako u središte nastavnog procesa uvijek treba postaviti aktivni angažman učenika, temeljen na logičkom zaključivanju i kritičkom propitivanju, kroz ovaj rad izložen je jedan takav pristup nastavi matematike. U radu je predstavljena matematička igra "Prebacivanje žaba" s ciljem poticanja učenja matematike kroz na prvi pogled jednostavnu igru, ali igru sa dubokom matematičkom suštinom, koju učenici trebaju otkriti. Polazeći od najjednostavnijeg oblika igre učenici izvode matematičke zaključke, a zatim postepenim usložnjavanjem igre formulišu generalizacije kao krajnji ishod.

1. Uvod

U ovom radu kroz jednu zanimljivu igru prikazan je pristup novijoj, savremenijoj nastavi matematike. Poznato je da je igra ključna za razvoj prije svega djetetovih, a kasnije i učeničkih sposobnosti jer pridonosi kognitivnom razvoju djeteta.

Igra je, u biti, prva i najvažnija aktivnost sa kojom se dijete upoznaje još u dobi djetinjstva. Već tada kroz igru, dijete otkriva, razmišlja, uočava međusobne odnose i relacije između pojmova, odnosno - dijete uči. Kao neizostavan dio učenja u djetinjstvu igru je važno nastaviti koristiti i u nastavi. Prije svega na taj način učenik je zainteresiran za nastavni rad i veća je vjerovatnoća usvajanja nastavnih sadržaja kroz ovakav vid nastave, nego kroz ustaljeni tempo nastave koji se svodi samo na nastavnikovo reproduciranje sadržaja bez adekvatnog učenikovog angažmana.

Matematika je jedan od predmeta kojeg učenici od početka doživljavaju kao izuzetno težak i složen. Matematički sadržaji se učenicima mogu približiti kroz matematičke igre gdje će učenik razvijati logičko razmišljanje, provoditi analizu i sintezu i donositi konačne sudove.

Cilj igara u nastavi matematike je usvojiti matematičke vještine i sposobnosti, ukazati na matematičke odnose, razvijati apstraktno mišljenje i naravno pozitivan stav prema matematici.

2. O matematičkim igrama

Matematika je predmet u kojem je pored demonstriranja, pokazivanja, uvježbavanja i ponavljanja matematičkih vještina neophodno određene matematičke radnje i zaključke učenicima ilustrirati, veoma često i vizualizirati. Na taj način produbljuju se matematička znanja i sam proces nastave matematike podiže se na puno viši nivo. Samim tim, takav oblik nastave koji podrazumijeva korištenje novijih i savremenijih vidova

Ciljna skupina: svi uzrasti
Ključne riječi: matematičke igre
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: maj 2022.

i stilova učenja, često su učenicima zanimljiviji, a samim tim i prihvatljiviji. Budući da je cilj savremene nastave u središte nastavnog procesa postaviti učenika i njegov aktivni angažman u nastavi, kroz zanimljive matematičke igre ovaj cilj je moguće ostvariti.

Igra u kojoj se struktura i pravila igranja temelje na matematičkim idejama, a pobjeda u igri izravno je povezana s razmijevanjem matematike nazivamo *matematička igra*. Dakle, važno je da je u pozadini igre matematička suština. Matematičke igre pružaju učenicima priliku da istražuju temeljne koncepte u matematici: slijed brojanja, računske operacije, korespondenciju jedan na jedan, kombinacije brojeva, permutacije i slično. Iz tih razloga se može reći da su matematičke igre važan alat za učenje matematike u školi.

Matematičke igre mogu pomoći učenicima da sa razumijevanjem nauče važne matematičke vještine i procese. S druge strane, matematičke igre su osmišljene tako da uklone dosadu iz rutine i ponavljanja matematičkih postupaka. Nakon što je učenik poučen konceptu, igranjem matematičkih igara on dobiva bolje razumijevanje teme.

2.1. Prednosti matematičkih igara

Običan način predavanja kredom i tablom nije pogodan za svakog učenika prilikom usvajanja matematičkog znanja. Veliki dio nastave matematike vrti se oko davanja i uvježbavanja novostečenih vještina te učvršćivanja i ponavljanja već uvedenih vještina. Igra može generirati mnogo više prakse od samog udžbenika jer kada igraju, učenici će lakše ponavljati određene činjenice ili postupke.

Glavna suština matematčke igre ogleda se u u rečenici *Marie Montessori*[1]: "Pomozi mi da to učinim sam." To znači da je neophodno učenika uputiti u određeni materijal, u našem slučaju - matematičku igru, dati mu jasne upute i pravila igre i cilj do kojeg treba doći. Kroz sam proces istraživanja i rješavanja igre učenik samostalno usvaja nova znanja i otvara put ka kritičkom mišljenju. Iz svijeta konkretnog materijala, preko matematičke igre učenik uočava određena ponavljanja, jasan i logičan slijed radnji te na zoran način ulazi u svijet apstraktnih zaključaka. Igranje matematičkih igara zahtijeva uključenost, a uspješna nastava matematike ovisi o aktivnom uključivanju učenika.

Neke od karakteristika matematičkih igara su:

- potiče mentalno zaključivanje
- poboljšava osnovne matematičke vještine
- potiče strateško razmišljanje
- potiče matematičku komunikaciju
- potiče pozitivne stavove prema matematici
- poboljšava osjećaj broja, operacija i odnosa
- održava interes učenika

Strateško razmišljanje jedna je od najvažnijih vještina za razvoj djece. Zahtijeva sposobnost promatranja, uzimanja različitih informacija, analize informacija, planiranja i angažiranja mogućih rješenja te odabira odgovarajuće radnje. Strateško razmišljanje je čin rješavanja problema.

Matematičke igre vrše pritisak na učenike da rade mentalno. Na taj način učenici razvijaju vještine kritičkog razmišljanja. Matematičke igre zahtijevaju od igrača da razmisli prije nego donese odluku. To poboljšava učenikove logičke vještine i vještine zaključivanja. Učenici počinju optimizirati svoje poteze i pronalaze način da dođu do rješenja pomoću najjednostavnijih koraka.

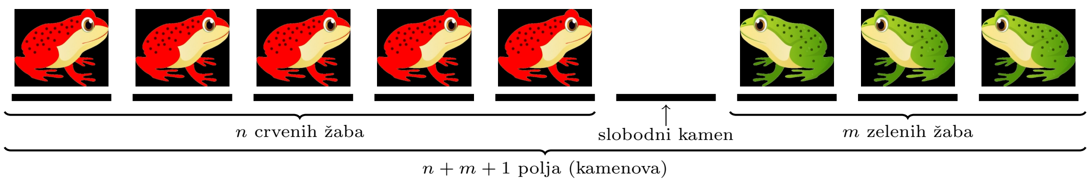
Vjerovatno jedan od najsnažnijih razloga za uvođenje matematičkih igara u nastavu matematike je entuzijazam, potpuna uključenost i uživanje koje učenici doživljavaju igrajući matematičke igre. Učenici su visoko motivirani i potpuno se uživljavaju u igre, a na kraju njihov odnos prema matematici postaje pozitivniji.

[1] Maria Tecla Artemisia Montessori (1870-1952): Italijanska fizičarka

3. Jedna igra: Prebacivanje žaba

U ovom odjeljku dat ćemo pravila igre "*Prebacivanje žaba*", opisana u općenitom slučaju.

Posmatrajmo $m + n + 1$ kamenova poredanih u nizu i na njima raspoređenih n crvenih žaba sa lijeve strane i m zelenih žaba sa desne strane kao što je prikazano na Slici 1. Srednji kamen je slobodan i jedini je takav.



Slika 1: Postavka igre.

Pristupimo sada pravilima igre. Žabe se mogu kretati na dva načina, skokom na susjedni slobodni kamen, što ćemo u daljem zvati pomjeranjem žabe, ili preskokom jedne žabe na slobodni kamen, što ćemo zvati skokom.

Žabe koje se nalaze na lijevoj strani se mogu kretati samo udesno, a desne žabe se mogu kretati samo ulijevo. Skokovi preko praznog kamena nisu dozvoljeni.

Cilj igre je premjestiti sve crvene žabe sa lijeve strane niza kamenova na krajnje desne kamenove, a zelene žabe sa desne strane na krajnje lijeve kamenove, tako da opet između njih ostane jedan kamen slobodan kao u početnom stadiju igre. Igra završava kada sve crvene žabe sa lijeve strane pređu na desnu stranu, a sve zelene žabe sa desne strane dođu na lijevu stranu niza kamenova.

Dva ključna momenta u cjelokupnoj igri su određivanje pravilnog redoslijeda poteza kojima se vrši pomjeranje žaba i određivanje broja potrebnih poteza da se dođe do cilja, za bilo koji broj žaba.

Kroz ovu igru učenici će imati priliku:

- razviti logičko zaključivanje i vještine rješavanja problema
- vježbati opisivanje brojevnog uzorka u algebarskoj formuli
- razvijati komunikacijske vještine kroz razgovor u grupi i razredu
- tumačiti i rješavati probleme

3.1. Matematički model igre

Matematičku pozadinu igre odnosno razlog zašto ovu igru možemo svrstati u kategoriju matematičkih igara otkrivamo kroz sljedeće:

1. Rješavanje najjednostavnijeg oblika igre sa ukupno dvije žabe (jedna crvena i jedna zelena žaba) i određivanje ukupnog broja poteza pri premještanju žaba sa jedne strane na drugu
2. Rješavanje modificiranog oblika igre sa različitim brojem žaba
3. Uspostavljanje matematičkog odnosa između broja žaba i broja pomjeranja i skokova
4. Opisivanje pravilnosti i zakonitosti igre matematičkim jezikom do nivoa uspostavljanja teorema koji predstavlja generalizaciju cjelokupne igre

Kako bi učenici uspjeli izvesti određene matematičke zaključke u radu ćemo krenuti od najjednostavnijeg slučaja igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom, a zatim ćemo igru polako usložnjavati sa brojem žaba. Neka se u svim igrama crvene žabe nalaze na lijevoj strani, a zelene na desnoj strani niza kamenova.

Poznavajući pravila igre, radi lakšeg rada, uvest ćemo sljedeću specijalnu notaciju za opisivanje igre,

$$\check{Z}\,{}^{k}_{s},$$

gdje $\check{Z} \in \{C, Z\}$ označava boju žabe (u našem slučaju crvena ili zelena), $k \in \{P, S\}$ gdje je P pomjeranje, a S skok žabe, $s \in \{1, 2, ..., a\}$ redni broj žabe. Iz gornjih indeksa možemo pratiti tip kretanja - pomjeranje ili skok, a iz donjih indeksa redni broj žabe koja se kreće. Tako bi sljedeće notacije imale značenja,

- Z_1^P- pomjeranje prve zelene žabe,
- C_2^S - skok druge crvene žabe i slično

Cilj ovog rada jeste da za ovu, na prvi pogled jednostavnu igru, otkrijemo njenu matematičku pozadinu te izvedemo određene matematičke zaključke i obrasce u kojima se uočavaju matematički odnosi.

3.1.1. Igra sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom

U samom predstavljanju igre krenut ćemo od najjednostavnijeg oblika igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabaom. Početno stanje sa ovim brojem žaba predstavit ćemo sa

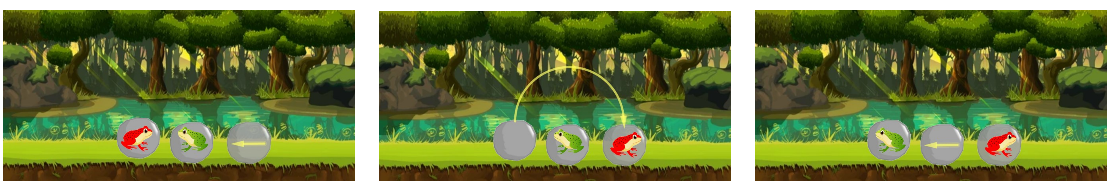
$$C_1 \ \_ \ Z_1 \ .$$

Cilj je premjestiti crvenu žabu sa lijeve na desnu stranu i zelenu žabu sa desne na lijevu stranu, tako da između njih ostane jedan slobodan kamen kao u početnom stanju. Pod pretpostavkom da se zelena žaba pomakne prva i uz uvedenu notaciju u prethodnom dijelu rada, demonstrirajmo rješenje najjednostavnijeg slučaja tabelom,

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_1 \ Z_1 \ \_$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$\_ \ Z_1 \ C_1$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$Z_1 \ \_ \ C_1$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$

Tabela 1: Igra sa 1 crvenom i 1 zelenom žabom.

Gornje možemo i vizualizovati!



(a) Pomjeranje Z_1^P, (b) skok C_1^S, (c) pomjeranje Z_1^P.

Time je postupak rješavanja igre moguće zapisati nizom,

$$Z_1^P - C_1^S - Z_1^P.$$

3.1.2. Igra sa dvije crvene i dvije zelene žabe

Postepenim usložnjavanjem igre dolazimo do igre sa ukupno 4 žabe, odnosno sa 2 crvene žabe na lijevoj strani i 2 zelene žabe na desnoj strani. Početno stanje za ovaj slučaj igre prikazat ćemo notacijom

$$C_2 \ C_1 \ \_ \ Z_1 \ Z_2$$

Uz ista pravila igre i usvojenu notaciju, Tabelom 2 prikazujemo rješenje ovog slučaja igre.

Za razliku od prvog i najjednostavnijeg slučaja sa ukupno 2 žabe, u ovom malo kompleksnijem slučaju imamo više kretanja oba tipa. Ukupno je potrebno 8 pravilnih poteza da bismo došli do konačnog cilja, za razliku od prethodnog slučaja u kojem smo problem zamjene žaba riješili sa samo 3 poteza. Brojanjem broja pomjeranja i broja skokova uočavamo da je u ovom slučaju zadržan podjednak broj za oba tipa kretanja - izvedeno je ukupno 4 pomjeranja i 4 skoka. Komparacijom sa igrom od jedne crvene i jedne zelene žabe uočavamo da se broj pomjeranja povećao za 2, a broj skokova za 3. Konačno rješenje igre možemo očitati iz posljednje kolone Tabele 2,

$$Z_1^P - C_1^S - C_2^P - Z_1^S - Z_2^S - C_1^P - C_2^S - Z_2^P.$$

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_2\ C_1\ Z_1\ \_\ Z_2$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$C_2\ \_\ Z_1\ C_1\ Z_2$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$\_\ C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
4.	$Z_1\ C_2\ \_\ C_1\ Z_2$	skok prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^S}$
5.	$Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ \_$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
6.	$Z_1\ C_2\ Z_2\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^P}$
7.	$Z_1\ \_\ Z_2\ C_2\ C_1$	skok druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^S}$
8.	$Z_1\ Z_2\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^P}$

Tabela 2: Igra sa 2 crvene i 2 zelene žabe.

3.1.3. Igra sa tri crvene i tri zelene žabe

Uočavanjem promjena u broju pomjeranja, broju skokova, učestalosti kretanja žaba po bojama, koje nastaju povećavanjem broja žaba, dolazimo do matematičke suštine u ovoj igri. Nakon što smo predstavili dva specijalna oblika igre, možemo predstaviti i oblik igre koji je i najviše u upotrebi (igra sa tri crvene i tri zelene žabe) s ciljem generalizacije igre i uopštavanja određenih matematičkih odnosa. Početni položaj žaba prikazat ćemo sa,

$$C_3\ C_2\ C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3\ .$$

Rješenje ove igre možemo detaljno opisati tabelom:

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_3\ C_2\ C_1\ Z_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$C_3\ C_2\ \_\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$C_3\ \_\ C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
4.	$C_3\ Z_1\ C_2\ \_\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^S}$
5.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ \_\ Z_3$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
6.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3\ \_$	pomjeranje treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^P}$
7.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_1$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
8.	$C_3\ Z_1\ \_\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^S}$
9.	$\_\ Z_1\ C_3\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok treće crvene žabe	$\mathbf{C_3^S}$
10.	$Z_1\ \_\ C_3\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
11.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ \_\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
12.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ Z_3\ C_2\ \_\ C_1$	skok treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^S}$
13.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ Z_3\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
14.	$Z_1\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_3\ C_2\ C_1$	skok treće crvene žabe	$\mathbf{C_3^S}$
15.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_3\ C_2\ C_1$	pomjeranje treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^P}$

Tabela 3: Igra sa 3 crvene i 3 zelene žabe.

Postoji samo jedno rješenje za igru ako zelena žaba kreće prva, a zbog očigledne simetrije problema imamo i jedno rješenje ako se crvena žaba pomiče prva. U svim potezima (osim početnog poteza), kad god postoje dva moguća poteza, jedan od njih dovest će do pogreške i zbog toga je rješenje jedinstveno.

I u ovoj igri konačno rješenje možemo predstaviti nizom,

$$Z_1^P - C_1^S - C_2^P - Z_1^S - Z_2^S - Z_3^P - C_1^S - C_2^S - C_3^S - Z_1^P - Z_2^S - Z_3^S - C_2^P - C_3^S - Z_3^P.$$

Ovo je ilustacija računskog razmišljanja i rješavanja matematičkih problema gdje rješavamo manje i jednostavnije probleme kako bismo pronašli obrasce i koristili ove uzorke za rješavanje težih problema.

3.2. Uočavanje matematičkih pravilnosti

U ovoj sekciji rada matematičkim jezikom ćemo izraziti određene pravilnosti do kojih se dolazi detaljnom razradom igre. Te pravilnosti su sljedeće:

1. očavanje simetrije i otkrivanje matematičke ljepote u zapisu rješenja igre kao niza vrste kretanja (P-pomjeranje, S - skok) i boje žabe (C - crvena, Z - zelena),
2. uočavanje algebarske veze između broja žaba i broja pomjeranja,
3. uočavanje algebarske veze između broja žaba i broja skokova.

Povećavajući broj žaba koje učestvuju u igri, svako rješenje koje opisuje ispravno kretanje žaba izrazili smo kao niz pokreta uz unaprijed određenu i definisanu notaciju. Zapisivanjem ispravnih sekvenci pokreta uočavamo da se broj potrebnih poteza povećava kako se povećava broj žaba. Drugi ključan momenat je da se slova Z i C u nizu poteza pojavljuju u blokovima.

Analizirajmo rješenja igara prezentovanih u prethodnoj sekciji, sa stanovišta pojavljivanja pomjeranja (P) i skokova (S). Ovdje je n broj žaba jedne boje, a bojom sugerišemo koja žaba je napravila kretnju. Sada imamo sljedeće situacije,

za $n = 1$	P - S - P
za $n = 2$	P - S - P - SS - P - S - P
za $n = 3$	P - S - P - SS - P - SSS - P - SS - P - S - P.

Slika 2: Raspored pomjeranja i skokova za $n = 1, 2, 3$.

Možemo uočiti da postoji zanimljiva simetrija u ovom zapisu. Primjetimo da za $n = 1$ postoji istaknut centralni (središnji) skok (jedan **S**), za $n = 2$ imamo takva dva skoka (dva **S**), kod igre sa 6 žaba, to jest za $n = 3$ imamo centralna tri **S**. Udaljavajući se od tog centralnog bloka skokova i sa lijeve i sa desne strane uočavamo isti redoslijed učestalosti pojavljivanja slova **P** i **S**. Ovakav prikaz predstavlja jednu matematičku pravilnost, možemo je okarakterisati i sa ljepotom, rasporeda pomjeranja i skokova.

U sljedećem prikazu predstavljamo i dalje kretanje žaba izraženo slovima **P** i **S** ali ovaj put smo blokove skokova izrazili kao broj pojavljivanja skoka u tom jednom bloku. Tako unoseći već poznata rješenja, možemo izvršiti generalizaciju rješenja i za $n = 4, 5, ...$ Na taj način dolazimo do veoma interesantnog prikaza rješenja u obliku trougla (bojama sugerišemo koja žaba vrši kretnju):

$$P - 1 - P$$
$$P - 1 - P - 2 - P - 1 - P$$
$$P - 1 - P - 2 - P - 3 - P - 2 - P - 1 - P$$
$$P - 1 - P - 2 - P - 3 - P - 4 - P - 3 - P - 2 - P - 1 - P$$
$$P - 1 - P - 2 - P - 3 - P - 4 - P - 5 - P - 4 - P - 3 - P - 2 - P - 1 - P$$

Slika 3: Pomjeranja i broj skokova.

Uočavamo da se skupine skokova mijenjaju u bojama alternativno, pri čemu svaki blok skokova predstavlja skakanje žaba iste boje.

Analogno ovome, istaknimo i blokove pomjeranja koji predstavljaju broj pojavljivanja pomjeranja u svakom od blokova:

$$
\begin{array}{rcl}
1- & S & -1 \\
1-S-1- & SS & -1-S-1 \\
1-S-1-SS-1- & SSS & -1-SS-1-S-1 \\
1-S-1-SS-1-SSS-1- & SSSS & -1-SSS-1-SS-1-S-1 \\
1-S-1-SS-1-SSS-1-SSSS-1- & SSSSS & -1-SSSS-1-SSS-1-SS-1-S-1
\end{array}
$$

Slika 4: Skokovi i broj pomjeranja.

U zapisu možemo uočiti da između svaka dva bloka skokova (S,SS,SSS,...), uvijek je prisutno samo jedno pomjeranje.

Iz Slike 3 možemo uočiti još jednu pravilnost. Naime, "čitamo" li broj kretanja (bilo pomjeranja ili skokova) jedne boje i prikažemo to nizovima boja, crvene - C i zelene - Z, dobijamo prikaze rješenja za razne n, prema kretanjima po bojama (Slika 5). Možemo sada primjetiti da broj žaba jedne boje (n) određuje centralni dio niza, s tim da se boje naizmjenično mijenjaju udaljavajući se od istaknutog (centralnog) dijela niza i sa lijeve i sa desne strane.

$$
\begin{gathered}
Z-\mathbf{C}-Z \\
Z-CC-\mathbf{ZZ}-CC-Z \\
Z-CC-ZZZ-\mathbf{CCC}-ZZZ-CC-Z \\
Z-CC-ZZZ-CCCC-\mathbf{ZZZZ}-CCCC-ZZZ-CC-Z \\
Z-CC-ZZZ-CCCC-ZZZZZ-\mathbf{CCCCC}-ZZZZZ-CCCC-ZZZ-CC-Z.
\end{gathered}
$$

Slika 5: Kretanja po bojama žaba.

Iz posmatrane tri specijalne igre formirajmo tabelu u kojoj ćemo istaknuti vrste kretanja i ukupan broj kretnji.

n	*Opis rješenja*	*Pomjeranja*	*Skokovi*	*Ukupan broj kretanja*
1	Z_1^P, C_1^S, Z_1^P	2	1	$3 = 2 + 1$
2	$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, C_1^P, C_2^S, Z_2^P$	4	4	$8 = 4 + 4$
3	$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, Z_3^P, C_1^S, C_2^S, C_3^S, Z_1^P, Z_2^S, Z_3^S, C_2^P, C_3^S, Z_3^P$	6	9	$15 = 6 + 9$

Tabela 4: Kretanje žaba.

Jedno od opažanja u Tabeli 4 navodi nas na uočavanje određenih algebarskih veza između pojedinih elemenata u tabeli. Bit ovog rada je i kako naučiti učenike opisivati stvari oko sebe matematičkim relacijama (naravno, ako je to moguće u pojedinim slučajevima). U samom početku rada smo izdvojili tipove kretanja i usvojili određenu terminologiju i notaciju kojom razlikujemo pomjeranje i skokove. Kroz prethodne dijelove rada dali smo prikaz rješenja za tri naše igre " Preskakanje žaba".

Posmatrajmo sada posebno pomjeranje žaba da bismo izveli obrazac koji povezuje broj žaba jedne boje (n) i broja pomjeranja. Kako smo kroz rješenja igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom imali dva pomjeranja, to ćemo radi lakšeg uočavanja te podatke uvrstiti u tabelu. Analogno pristupamo svakom slučaju igre da bismo došli do konačnog cilja - odrediti algebrasku vezu između broja pomjeranja i broja žaba.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	Broj pomjeranja
1	1	$2 = 1 + 1$
2	2	$4 = 2 + 2$
3	3	$6 = 3 + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$2n = n + n$

Tabela 5: Pomjeranje žaba.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	Broj skokova
1	1	$1 = 1 \cdot 1$
2	2	$4 = 2 \cdot 2$
3	3	$9 = 3 \cdot 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$n^2 = n \cdot n$

Tabela 6: Skokovi žaba.

Posmatrajući podatke u Tabeli 5 i poznavajući četiri osnovne računske operacije (što će vjerovatno učenicima biti i prva dosjetka kao najjednostavnije operacije u matematici) možemo primjetiti da je broj pomjeranja jednak ukupnom broju žaba. Preciznije, posmatrali smo jednak broj crvenih i zelenih žaba pa dolazimo do obrasca da ukupan broj pomjeranja iznosi $n + n$ odnosno $2n$.

Na potpuno analogan način pristupamo uočavanju algebarske veze između broja skokova i broja žaba. Poznate podatke prikazujemo u Tabeli 6. Kao što smo u slučaju sa pomjeranjem žaba uočili računsku operaciju sabiranja, uočavamo da je u ovom slučaju u pitanju množenje, odnosno da je broj skokova jednak proizvodu crvenih i zelenih žaba. Obzirom da radimo sa jednakim brojem crvnih i zelenih žaba (n), to za rezultat ukupnog broja skokova dobijamo $n \cdot n = n^2$, što se i slaže sa uočavanjem da su svi dobiveni rezultati za broj skokova u posljednjoj koloni kvadratni brojevi.

Kako je prisutno ukupno n crvenih i n zelenih žaba sa jednim slobodnim kamenom između, to svaka od n crvenih žaba se može (treba) pomaknuti naprijed za $n + 1$ slobodnih mjesta jer ukupno ima n mjesta na kojima su zelene žabe i još jedno slobodno mjesto koje predstavlja prazan kamen koji razdvaja crvene i zelene žabe (prethodno tumačenje vrijedi jer po pravilima igre žabe se mogu kretati samo naprijed, a nikako unatrag). Isto važi i za n zelenih žaba koje ispred sebe imaju ukupno $n + 1$ slobodnih mjesta uvažavajući samo kretanje unaprijed. Ukupan broj kretanja do ispunjavanja cilja igre je jednak zbiru pomjeranja crvenih i zelenih žaba odnosno $n\,(n+1) + n\,(n+1)$, gdje se prvi sabirak odnosi na crvene a drugi sabirak na zelene žabe. Ukupan broj skokova (S) je jednak proizvodu broja crvenih i zelenih žaba odnosno $n \cdot n$, pri čemu jedan skok obuhvata udaljenost od 2 polja. Da se uvjerimo da će ukupan broj pomjeranja (P) biti jednak $2n$, raspisat ćemo dosadašnja objašnjenja,

$$n\,(n+1) + n\,(n+1) - 2n \cdot n = n^2 + n + n^2 + n - 2n \cdot n = n + n = 2n.$$

Na ovaj način smo se uvjerili da navedena relacija zbira broja crvenih i zelenih žaba odgovara ukupnom broju pomjeranja.

Pozivajući se na rješenja gore navedene tri vrste igre, možemo uočiti i da se redni brojevi žaba koje vrše kretnju, pojavljuju u pravilnim blokovima. Naime, kod igre sa $n = 1$ te su kretnje date sa nizom $1 \;-\; 1 \;-\; 1$. Za $n = 2$ imamo $1 \;-\; 12 \;-\; 12 \;-\; 12 \;-\; 1$ i konačno za $n = 3$ kretnje su izražene nizom

$$1 \;-\; -12 \;-\; 123 \;-\; 123 \;-\; 123 \;-\; 23 \;-\; 3.$$

Pri tome ovi blokovi predstavljaju kretanje iste boje žaba i to alternativno, ako je prvi blok kretanje crvenih žaba, naredni je kretanje zelenih, pa onda crvenih i tako do kraja niza.

Na osnovu svih uočenih simetrija, pravilnosti i zakonitosti, kroz tri koraka možemo doći do rješenja igre sa bilo kojim brojem žaba n (n - broj žaba i jedne i druge boje).

Algoritam.

Korak 1: *Prvo ispišimo redoslijed blokova pomjeranja P i skokova S koji su prikazani u trouglovima na Slika 3 i Slika 4. Ispišimo ih na način kako smo to uočili na Slici 2,*

$$P - S - P - SS - P - SSS - ... - P - n \cdot S - P - (n-1) \cdot S - P - ... - P - SS - P - S - P$$

Dio koji se odnosi na $n \cdot S$ predstvalja središnji ili centralni dio zapisa.

Korak 2: *Sada zapišimo uočene simetrije koje vezujemo za redoslijed pojavljivanja boja. Počnimo sa zelenom bojom Z, potom dvije crvene CC, zatim tri zelene ZZZ i tako naizmjenično redajući boje u blokove gdje se u svakom sljedećem bloku boja pojavljuje jedna žaba više. Naizmjenično redanje boja pišemo dok ne dođemo do centralnog dijela, gdje nakon njega i dalje zapisujemo blokove boja naizmjenično s tim da sada u svakom bloku umanjujemo broj žaba za 1 i tako dobijemo lijepo simetričan zapis blokova boja (Slika 5).*

Korak 3: *U posljednjem koraku određujemo redni broj žabe koja se pomjera ili skače. Redni broj žaba zapisujemo na sljedeći način. Formiramo blokove, prvo počnemo sa 1, pa zatim $1, 2$ onda $1, 2, 3$ i tako redom do dijela $1, 2, 3, 4, ...n$. Nakon tog bloka brojeva ide centralni blok ponovo $1, 2, ..., n$, a onda udaljavajući se desno od centralnog bloka nastavljamo zapise na sljedeći način: ponovo ide blok $1, 2, 3, 4, ...n$, a u svakom sljedećem bloku izbacujemo po jedan broj s lijeve strane prethodnog bloka. Dakle, drugi blok od centralnog bi glasio $2, 3, 4, ...n$, treći bi bio $3, 4, ..., n$ i tako redom do zapisa $n-1, n$ i zadnji blok bi bio samo n.*

Ovim načinom uspješno možemo riješiti igru gdje imamo isti broj žaba i jedne i druge boje.

Primjer 1. *Da bismo demonstrirali ovaj algoritam od tri koraka za uspješno rješavanje igre, pogledajmo primjer sa tri crvene i tri zelene žabe, odnosno slučaj kada je broj žaba obje boje $n = 3$. Prvo ispišimo redoslijed blokova pomjeranja P i skokova S kako je opisano u postupku. Prikaz blokova pomjeranja P i skokova S za $n = 3$ je sljedeći*

$$P - S - P - SS - P - SSS - P - SS - P - S - P.$$

Sada pristupamo koraku 2. U ovom koraku moramo prikazati učestalost kretanja žaba po bojama. Kako smo naveli u opisu koraka, započet ćemo sa jednom zelenom žabom Z, a potom naizmjenično redati boje u blokove, uvaćavajući svaki blok za po jedno slovo dok ne dođemo do centralnog dijela, što zapisujemo u našem slučaju kao $Z - CC - ZZZ$. Centrani blok definiše isti broj žaba kao prethodni blok samo je u pitanju druga boja žaba (CCC). Nakon centralnog dijela, po izloženim uputama i dalje naizmjenično redamo blokove kako slijede lijevo od centralnog dijela. Tako se održava simetričan zapis ($ZZZ - CC - Z$). Na taj način dobijamo cjelokupan niz blokova

$$Z - CC - ZZZ - CCC - ZZZ - CC - Z.$$

Do konačnog rješenja igre moramo još znati i redni broj crvene i/ili zelene žabe koja vrši kretnju. Kako je izloženo u opisu trećeg koraka, prvo počnimo sa 1, zatim 1,2, pa 1,2,3 i tako dalje dok ne dođemo do centralnog dijela koji se predstavlja nizom $1, 2, ..., n$, odnosno u našem slučaju to je blok 1,2,3. Centralni dio ponavljamo, a zatim pišemo dio desno od centralnog dijela, ponavljajući prvi blok kao sa lijeve strane centralnog dijela odnosno blok 1,2,3. Dalje umanjujemo blokove, gdje svaki naredni blok započinjemo drugim brojem iz prethodnog bloka, odnosno u našem slučaju to je blok 2,3 i završavamo sa brojem 3. Navedeni postupak predstavljamo sljedecim nizom,

$$1 - 12 - 123 - 123 - 123 - 23 - 3.$$

Sintezom i provedbom postupka kroz navedena tri koraka (koristeći uvedenu notaciju) dolazimo do rješenja igre za $n = 3$, kako je izloženo u Sekciji 3.1.3, a to je:

$$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, Z_3^P, C_1^S, C_2^S, C_3^S, Z_1^P, Z_2^S, Z_3^S, C_2^P, C_3^S, Z_3^P.$$

3.3. Igra sa različitim brojem žaba

Igra sa jednakim brojem žaba, kao što smo mogli vidjeti, može se riješiti i opisati u opštem slučaju. Situacija sa različitim brojem žaba je takođe rješiva, ali je opis rješenja teško dati za opšti slučaj. Svi izvedeni zaključi prikupljeni za jednak broj žaba na svakoj strani, učenicima mogu olakšati uočavanje algebarskih veza kada posmatramo uzorak sa različitim brojem žaba na svakoj strani.

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_1\ Z_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
2.	$\_\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve crvene žabe	C_1^S
3.	$Z_1\ \_\ C_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
4.	$Z_1\ Z_2\ C_1\ \_\ Z_3$	skok druge zelene žabe	Z_2^S
5.	$Z_1\ Z_2\ \_\ C_1\ Z_3$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
6.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ C_1\ \_$	skok treće zelene žabe	Z_3^S
7.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P

Tabela 7: Igra sa 1 crvenom i 3 zelene žabe.

Ako posmatramo igru sa tri zelene i jednom crvenom žabom, što ustaljenom notacijom možemo predstaviti sa početnim stanjem: $C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3$, rješenje ćemo prikazati sljedećim koracima:

Rješenje možemo predstaviti i sa nizom boja, **Z - C - Z - Z - C - Z - C** ili nizom kretanja, **P - S - P - S - P - S - P**.

Da bi uvidjeli neke odnose, povećajmo broj crvenih žaba za 1, a broj zelenih žaba ostavimo istim, to jest posmatrajmo igru sa tri zelene i dvije crvene žabe. Početno stanje je $C_2\ C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3$. Rješenje je predstavljeno kroz 11 poteza u Tabeli 8. Anlogno prethodnom slučaju rješenje ćemo predstaviti nizom boja, **C - Z - Z - C - C - Z - Z - Z - C - C - Z** ili nizom kretanja, **P - S - P - S - S - P - S - S - P - S - P**.

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_2\ \_\ C_1\ Z_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
2.	$C_2\ Z_1\ C_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	skok prve zelene žabe	Z_1^S
3.	$C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2\ \_\ Z_3$	pomjeranje druge zelene žabe	Z_2^P
4.	$C_2\ Z_1\ \_\ Z_2\ C_1\ Z_3$	skok prve crvene žabe	C_1^S
5.	$\_\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3$	skok druge crvene žabe	C_2^S
6.	$Z_1\ \_\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
7.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ \_\ C_1\ Z_3$	skok druge zelene žabe	Z_2^S
8.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1\ \_$	skok treće zelene žabe	Z_3^S
9.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ Z_3\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
10.	$Z_1\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_2\ C_1$	skok druge crvene žabe	C_2^S
11.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje treće zelene žabe	Z_3^P

Tabela 8: Igra sa 2 crvene i 3 zelene žabe.

Zaključak koji se može izvesti iz prethodna dva slučaja, gdje smo broj zelenih žaba državali konstantnim, a povećavali broj crvenih žaba, svodi se na povećanje ukupnog broja poteza koji vode do konačnog rješenja. Broj pomjeranja se povećao za 1, a broj skokova za 3, što za rezultat daje da se ukupan broj poteza povećao za 4. Primjetimo da je učestalost ponavljanja pomjeranja (P) i skokova (S) također u blokovima i da se ponavlja i sa lijeve i sa desne strane. Za prvi slučaj uočavamo niz

$$P\ S\ P\ \mathbf{S}\ P\ S\ P,$$

a za drugi slučaj

$$P\ S\ P\ S\ S\ \mathbf{P}\ S\ S\ P\ S\ P,$$

što se može predstaviti našim već poznatim "trouglovima" iz prethodne sekcije rada. Na upravo predstavljenim primjerima na uzorku sa tri zelene žabe sa jedne strane, "trougao" sa blokovima skokova bi imao sljedeći prikaz,

P - 1 - P - 1 - P - 1 - P
P - 1 - P - 2 - P - 2 - P - 1 - P
P - 1 - P - 2 - P - 3 - P - 2 - P - 1 - P

Ako predstavimo i ”trougao” pomjeranja u kome ćemo blokove pomjeranja izraziti brojem pojavljivanja pomjeranja u tom jednom bloku dobit ćemo sljedeće:

1 - S - 1 - S - 1 - S - 1
1 - S - 1 - SS - 1 - SS - 1 - S - 1
1 - S - 1 - SS - 1 - SSS - 1 - SS - 1 - S - 1

Možemo primjetiti da se zadržalo isto uočavanje blokova pomjeranja i u slučaju sa istim i različitim brojem crvenih i zelenih žaba, odnosno između svakog bloka skokova prisutno je uvijek samo jedno pomjeranje.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
1	1	2	1	3
1	2	3	2	5
1	3	4	3	7
1	4	5	4	9
1	5	6	5	11
1	6	7	6	13

Tabela 9: Uzorak za jednu žabu sa jedne strane.

Posmatranjem i uočavanjem pravilnosti u Tabeli 9 dolazimo do sljedećih zaključaka:

- broj pomjeranja se povećava za 1,
- broj skokova se povećava za 1,
- ukupan broj poteza se povećava za 2 svaki put.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
2	1	3	2	5
2	2	4	4	8
2	3	5	6	11
2	4	6	8	14
2	5	7	10	17
2	6	8	12	20

Tabela 10: Uzorak za dvije žabe sa jedne strane.

Iz Tabele 10 izvedimo matematičke zaključke:

- broj pomjeranja se povećava za 1 svaki put,
- broj skokova se povećava za 2 svaki put,
- ukupan broj poteza se povećava za 3 svaki put.

Slično gornjem, možemo doći do odgovarajućih zaključaka i na osnovu Tabele 11

Jedan od zaključaka koji smo uočili i objasnili u dijelu sa jednakim brojem žaba, a odnosi se na ukupan broj pomjeranja, u ovom odjeljku će biti samo opšta generalizacija. Kako se kretanje žaba može izvoditi samo unaprijed, to će ukupan broj pomjeranja biti jednak

$$n\,(m+1)+m\,(n+1)-2m\cdot n=nm+n+nm+m-2nm=n+m,$$

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
3	1	4	3	7
3	2	5	6	11
3	3	6	9	15
3	4	7	12	19
3	5	8	15	23
3	6	9	18	27

Tabela 11: Uzorak za tri žabe sa jedne strane.

gdje je n broj crvenih, a m broj zelenih žaba.

Kao generalni zaključak koji vrijedi i za slučaj sa istim brojem crvenih i zelenih žaba i sa različitim brojem crvenih i zelenih žaba, navedimo sljedeći teorem koji daje vezu između ukupnog broja poteza (kretanja) i broja crvenih i zelenih žaba.

Teorem 1. *Ukupan broj poteza jednak je zbiru crvenih i zelenih žaba i proizvoda broja zelenih i crvenih žaba, to jest*

$$P_B = Z_B \cdot C_B + Z_B + C_B,$$

gdje je Z_B - broj zelenih žaba, C_B - broj crvenih žaba i P_B - ukupan broj poteza.

U slučaju jednakog broja žaba imamo,
za $n = 1$ $\quad P_B = 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 3,$
za $n = 2$ $\quad P_B = 2 \cdot 2 + 2 + 2 = 8,$
što možemo potvrditi i Tabelom 4. Isto slaganje sa formulom imamo za slučaj kada je broj crvenih i zelenih žaba različit, kao na primjer igru u kojoj je $Z_B = 3$ i $C_B = 1$ gdje je $P_B = 3 \cdot 1 + 3 + 1 = 7$, a što je tačno jer smo taj slučaj igre riješili sa ukupno 7 poteza (Tabela 9).
Ovih nekoliko do sada posmatranih i dobijenih rezultate prikažimo tabelom, čime se uvjeravamo u validnost tvrdnje iskazane u Teoremu 1.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Broj pomjeranja*	*Broj skokova*	*Ukupan broj poteza P_B*
1	1	2	1	$1 \cdot 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 3$
2	2	4	4	$2 \cdot 2 + 2 + 2 = 4 + 4 = 8$
3	3	6	9	$3 \cdot 3 + 3 + 3 = 9 + 6 = 15$
3	1	4	3	$1 \cdot 3 + 1 + 3 = 3 + 4 = 7$
3	2	5	6	$2 \cdot 3 + 2 + 3 = 6 + 5 = 11$
3	5	8	15	$3 \cdot 5 + 3 + 5 = 15 + 8 = 23$
m	n	$m + n$	$m \cdot n$	$n \cdot m + n + m$

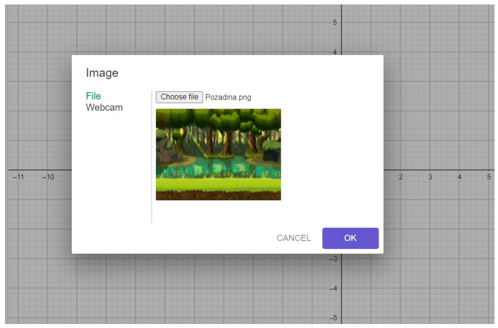
Tabela 12: Pregled nekih matematičkih uočavanja.

3.4. Osnovni zaključak

Dakle, da bismo pravilno riješili našu igru važno je da se vodimo uočenim pravilnostima. Uz poznavanje broja crvenih i zelenih žaba lako možemo odrediti broj poteza koji će nas dovesti do tačnog rješenja. Dalje, ukoliko poznajemo broj crvenih i zelenih žaba možemo odrediti koliko od tih poteza ide na pomjeranje (broj pomjeranja je jednak zbiru crvenih i zelenih žaba), a koliko ide na skokove (broj skokova je jednak proizvodu crvenih i zelenih žaba). Svaki blok skokova (jedan skok, dva ili više) razdvaja samo jedno pomjeranje što možemo uočiti iz posmatranih trouglova. Uz ovakva opažanja do kojih smo došli, lakše i jednostavnije možemo doći do cilja i riješiti bilo koju varijantu igre. Na ovaj način smo otkrili kako lakše riješiti igru poznavajući matematičku pozadinu iste igre.
Ljepota matematike se ogleda između ostalog u njenom otkrivanju u raznim stranama i stvarima prirode i života kao i u njenoj primjeni kod istih, što pokazuje i ova igra.

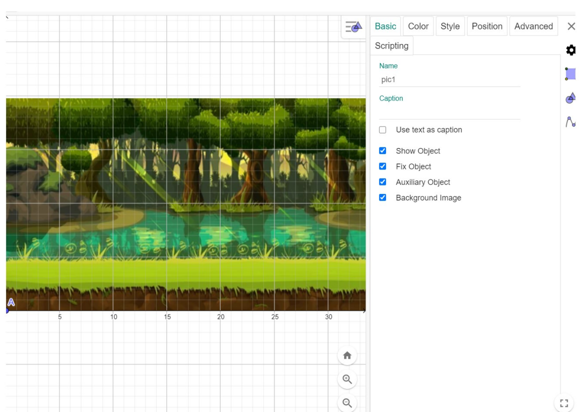
4. Informatički dio

Izradu igre ”Preskakanje žaba” smo kreirali kroz dva softverska alata, a to su **GeoGebra** i **PhotoPea**. Samo postavljanje slika u GeoGebri se odvija sljedećim postupkom. Nakon kreiranja GeoGebra projekta prvo postavljamo sliku pozadine. Otvaranjem dijaloškog okvira za otvaranje datoteke odabiremo željenu sliku.



Slika 6: Postavljanje pozadine.

Smještanje slike možemo podesiti klikom miša na tačku za koju se vezuje donji lijevi ugao slike. Položaj slike može biti apsolutan na zaslonu ili relativan u koordinatnom sistemu što određujemo u kartici svojstava slike. Tu je omogućeno dodatno uređivanje slike i osobina poput debljine crte, vidljivosti, ispune i slično. Nakon sto je slika za pozadinu učitana, potrebno je tu sliku povećati pa u ovom slučaju dovoljno je da sliku centriramo.
Naredni korak jeste da tu sliku postavimo kao pozadinu u samoj GeoGebri. Odabirom ”Settings” opcije trebamo osigurati da se slika pozadine nikako ne pomjera, odnosno da zadržimo fiksnu poziciju. Kada otvorimo ”Settings” prozor, u koloni ”Basic” trebamo odabrati dvije opcije: ”Fix Object” i ”Background Image”.

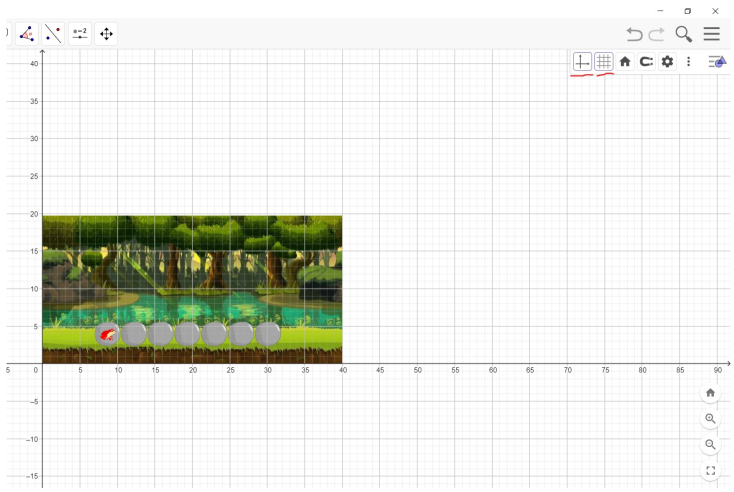


Slika 7: Fix Object.

Da bismo dobili kompletan izgled igre, na već postavljenu pozadinu postavljamo slike kamenova te slike žaba. Slike za žabe ubacujemo na isti način kao u objašnjenju za prethodnu sliku. Sljedeći postupak se vrši onoliko puta koliko ima slika za žabe:

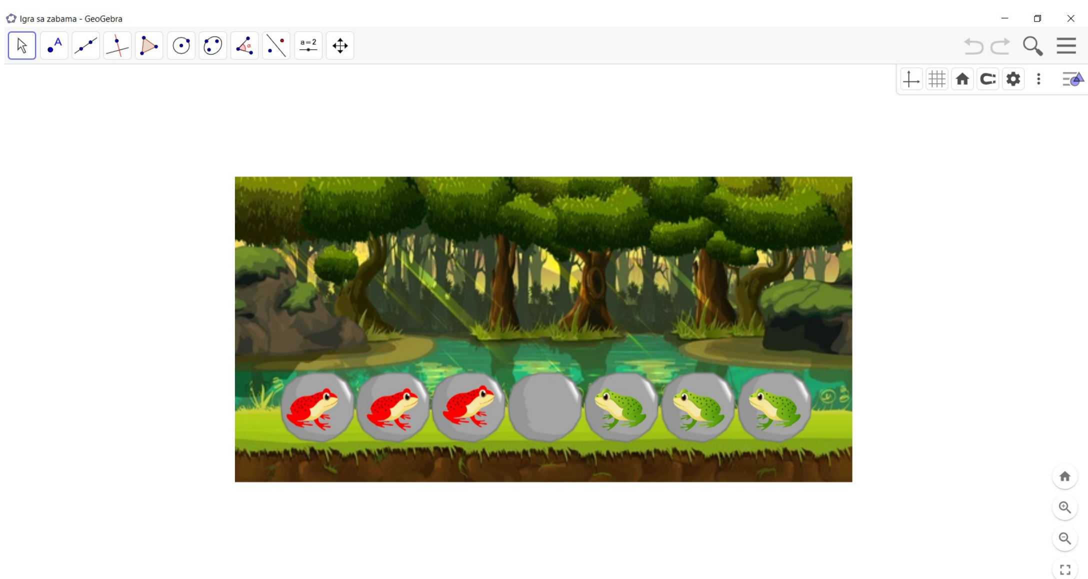
1. pomjeranje slike za žabu na jedan od kamenova,
2. smanjenje slike za žabu kako bi se žaba lijepo uklopila u oblik kamena,

3. sakrivanje tačaka vezanih za sliku.



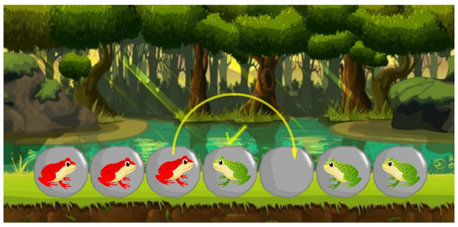
Slika 8: Uklanjanje mreže.

U konačnici, kada se sve slike za žabe učitaju i prilagode, preostaje još da se sakriju koordinate, mreža i kolona sa svim tačkama kako bi igra izgledala pregledno. Da bi se sakrila kolona sa tačkama, potrebno je kliknuti na tri tačkice pored ikonice u obliku zupčanika i odabrati opciju "Close".
Nakon svega ovoga, postavka naše igre na monitoru izgleda ovako,

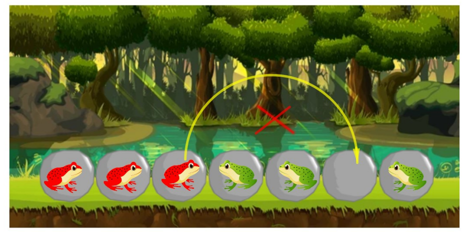


Slika 9: Konačni izgled igre.

Nakon što smo objasnili kreiranje pozadine, sada ćemo objasniti i predstaviti kretanje žaba. Žabe se pomjeraju klikom miša na željenu žabu. Klikom miša na žabu koju želimo pomjeriti otvara se mogućnost pomjeranja u svim pravcima. Ipak, da bismo došli do konačnog rješenja igre, žabe trebamo pomjeriti na način opisan pravilima igre. Lijevim klikom miša "povlačimo" željenu žabu na susjedni slobodni kamen ili preskačemo jednu žabu suprotne boje.

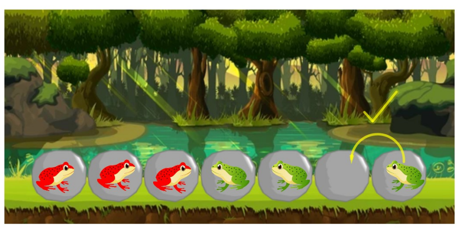


(a) Pravilno preskakanje.



(b) Nepravilno preskakanje.

Moramo voditi računa da se smije preskočiti samo jedna žaba, a ne dvije ili više, kao što se žaba smije pomjeriti samo za jedan susjedni slobodan kamen u odgovarajuću stranu. Takođe treba voditi računa da se crvene žabe smiju kretati samo udesno, a zelene samo ulijevo. Dakle, pravilno kretanje zelenih žaba dobit ćemo klikom miša na zelenu žabu i njenim pomjeranjem u lijevu stranu. Pravilno kretanje crvenih žaba dobit ćemo klikom miša na crvenu žabu i pomjeranjem u desnu stranu.



(c) Pravilno kretanje zelene žabe.

(d) Nepravilno kretanje zelene žabe.

5. Zaključak

Cilj rada je dati jedan konkretan primjer savremenog, modernog pristupa nastavi matematike kroz jednu igru u čijoj realizaciji je dubok matematički sadržaj koji se ogleda u temama kao što su analiza, donja granica, generalizacija rješenja. Ovdje je važno istaknuti algoritamsko razmišljanje kao sposobnost razumijevanja, izvršavanja, evaluacije i stvaranja računskih postupaka.

Kroz ovu igru učenici će imati priliku:

- razviti logičko zaključivanje i vještine rješavanja problema,
- razvijati komunikacijske vještine kroz razgovor u grupi i u razredu,
- vježbati opisivanje brojnog uzorka u algebarskoj formuli,
- fleksibilno razmišljati i primjenjivati stečena znanja i vještine,
- tumačiti i rješavati probleme.

Učenici uživaju u rješavanju ovakvih igara, a to povećava interes i motivaciju učenika. Ovo je primjer jedne matematičke igre koja učenicima pruža mjesto za razvoj kritičkog analitičkog zaključivanja. Da bi učenici mogli izvoditi određene generalizacije krenuli smo od jednostavnijeg slučaja u kojem učenici samo uočavaju pravilnosti i na taj način dolaze do složenijeg slučaja kojeg nastoje uopštiti. Cilj ovakve igre je i u rezoniranju apstraktnog i kvantitativnog. Učenici konstruiraju održive argumente i kritiziraju mišljenje drugih, uočavanjem pojedinih relacija iskazuju algebarske veze.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ , Sarajevo, 2004.
[2] Z. Kumik: *Posebne metode rješvanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
[3] J. Križaj Grušovnik: *Montessori u nastavi*, Varaždinski učitelj, Varaždin, 2022.

EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 18–22

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Pojam radijana u nastavi trigonometrije

Dina Kamber Hamzić

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu

Sažetak: U radu je objašnjen značaj radijana u nastavi trigonometrije, ali i problemi sa kojima se učenici i studenti susreću kad koriste radijane. Navedeni su glavni izvori problema sa razumijevanjem radijana, kao i moguća rješenja.

1. Uvod

Trigonometrija je veoma bitna oblast matematike. Antičke civilizacije (pogotovo egipatska, babilonska, indijska i kineska) su posjedovale značajno znanje praktične geometrije, uključujući i koncepte koje možemo smatrati počecima trigonometrije. Trigonometrija u modernom smislu počinje sa grčkom civilizacijom i *Hiparhom*. Hiparhova djela su nažalost vremenom izgubljena te danas o njemu i njegovom radu znamo iz *Ptolomejovog Almagesta* i djela drugih naučnika. Prvu tablicu vrijednosti sinusne funkcije nalazimo u djelu indijskog matematičara i astronoma *Aryabhate* (5. i 6. stoljeće), dok je prvu tablicu vrijednosti tangensne i kotangensne funkcije konstruisao *Habaš al-Hasib* (9. stoljeće). Naučnici islamske civilizacije su poslije Grka nastavili razvijati trigonometriju, a *Nasir al-Din al-Tusi* je u 13. stoljeću napisao prvi rad o trigonometriji neovisan o astronomiji, time uspostavljajući osnove trigonometrije kao neovisne matematičke oblasti. Prva knjiga posvećena isključivo trigonometriji, *De triangulis omnimodis*, objavljena je 1533. godine u Bavarskoj i napisao ju je renesansni naučnik *Regiomontanus*. Sljedeći veliki korak u razvoju klasične trigonometrije je bio izum logaritama. Logaritamske tablice *Johna Napiera* su značajno olakšale razne numeričke izračune, a između ostalog omogućile su i pravljenje trigonometrijskih tablica [6].
Danas se trigonometrija koristi, osim u matematici i astronomiji, i u fizici (određivanje komponenti vektorskih veličina, modeliranje valova i oscilacija,...), arhitekturi i građevini (mjerenje i računanje visina, širina,...), geodeziji (kartografija), forenzici (kretanje projektila), akustici (modeliranje zvučnih valova),... Naravno, trigonometrija je neizostavan dio srednjoškolske i fakultetske matematike, te kao oblast koja povezuje geometriju, algebru i grafičke prikaze, važan je uvod u diferencijalni i integralni račun.

2. Nastava trigonometrije i značaj radijana

Obično se učenici prvo susreću sa tzv. trigonometrijom trougla: trigonometrijske funkcije se definišu kao omjeri dužina stranica u pravouglom trouglu. Trigonometrija trougla omogućava da odredimo nepoznate dužine stranica ili veličine uglova, ali ako treba procijeniti vrijednost trigonometrijske funkcije za neku vrijednost varijable x, odrediti da li u nekom intervalu funkcija raste ili opada, nacrtati grafik funkcije $\sin 2x$,

---

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trigonometrija, radijan
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: jun 2022

trigonometrija trougla tu ne pomaže [11]. Da bi uradili ovakve zadatke, učenici moraju trigonometrijske funkcije stvarno razumjeti kao funkcije, tj. kao jednu vrstu procesa koji za varijablu uzima ugao/broj, a kao rezultat daje neki realan broj. Međutim, tradicionalni pristup nastavi trigonometrije naglašava razumijevanje trigonometrijskih funkcija kao omjera i ne omogućuje učenicima da ih shvate kao funkcije [11]. Da je prijelaz sa razumijevanja trigonometrijskih funkcija kao omjera dužina stranica na razumijevanje trigonometrijskih funkcija kao stvarnih funkcija težak za učenike, pokazuje i istraživanje Challenger [2], u kom je zapaženo da su neki učenici razumjeli trigonometriju kada se radilo samo sa trouglovima, ali sada ne znaju „odakle da započnu".

Za definisanje trigonometrijskih funkcija kao funkcija na skupu realnih brojeva izuzetno je bitan pojam radijana i mnogi autori smatraju da dio poteškoća u razumijevanju trigonometrije potiče upravo iz osiromašene veze između trigonometrijske kružnice i radijana sa jedne i trigonometrijskih funkcija sa druge strane. Oni smatraju da slabo razumijevanje trigonometrijske kružnice i radijana onemogućuje studentima da definišu trigonometrijske funkcije na skupu realnih brojeva.

Zašto je radijan bitan za razumijevanje trigonometrijskih funkcija? Zato što kad pokušavamo odgovoriti na gore navedena pitanja: na kojem podskupu skupa $\mathbb{R}$ funkcija $f(x) = \cos x$ raste, kako izgleda grafik funkcije $f(x) = \sin 2x$, koja je (barem približna) vrijednost funkcije $f(x) = \sin x$ za $x = 30$, odgovore tražimo u skupu realnih brojeva, tj. trigonometrijske funkcije posmatramo kao realne funkcije jedne realne varijable. To znači, da u $f(x) = \sin x$ je $x \in \mathbb{R}$ i mjeren je u radijanima. Koliko to učenici i studenti (ne) shvaćaju, pokazuje istraživanje [1], kada niko od ispitanika u istraživanju nije procijenio vrijednost $\sin 30$ kao sinus ugla od 30 radijana, iako je naglašeno da je riječ o funkciji $f(x) = \sin x$ definisanoj za $x \in \mathbb{R}$.

3. Klasični pristup pojmu radijana

Na prvi pogled, nema šta biti teško ili neshvatljivo kod radijana: u pitanju je samo još jedna mjera veličine ugla. U Bosni i Hercegovini učenici se sa radijanom obično prvi put susreću u drugom razredu srednje škole, kada se definiše radijan te daje veza između radijana i stepena. Npr. u udžbeniku Matematike za 2. razred srednjih škola [8], imamo klasični pristup uvođenju radijana.

Autor prvo ponavlja definiciju stepena, koju nije loše ponoviti jer većina učenika i studenata intuitivno zna šta je stepen, ali ga često ne znaju definisati [8, str.272]:

Definicija 3.1. *Ako punom uglu pridružimo broj* 360*, tada tristošezdesetom dijelu tog ugla odgovara broj* 1*. Na taj način smo uspostavili mjerenje uglova u stepenima.*

Ovu definiciju možemo malo preciznije napisati na sljedeći način:

Definicija 3.2. *Ako krug podijelimo na* 360 *podudarnih centralnih uglova, jedan taj ugao ima veličinu jedan stepen* (1°).

Ovakav način definisanja je bitan, jer stepen definiše preko centralnog ugla kruga, kako se definiše i radijan. Dalje je u [8] pokazano da je omjer dužine luka i poluprečnika nad istim centralnim uglom dva koncentrična kruga jednak, čime se uvodi pojam radijana, kao i njegova veza sa stepenima.

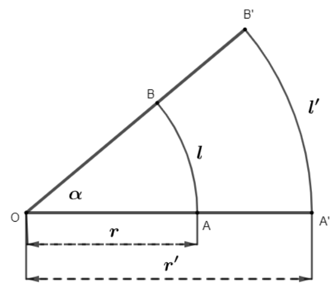
Pošto je

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}, l' = \frac{r'\pi\alpha}{180^\circ},$$

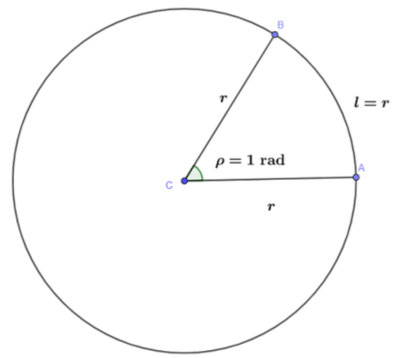
vrijedi

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}.$$

Omjer $\frac{l}{r}$ nazivamo mjerom ugla α u radijanima. Očito, jedan radijan (1 rad) dobijamo kada je $\frac{l}{r} = 1$, tj. kada je $l = r$.



Slika 1: Dužine lukova i poluprečnika dva koncentrična kruga



Slika 2: Ugao veličine 1 radijan

Definicija 3.3. *Ako je dužina kružnog luka jednaka poluprečniku, tada je mjera odgovarajućeg centralnog ugla jedan radijan (1 rad) [8].*

Pošto je kod punog ugla dužina luka $l = 2r\pi$ (obim kruga), to je $\frac{l}{r} = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$, odnosno puni ugao ima 2π radijana. To nam daje vezu između mjere ugla u stepenima i mjere ugla u radijanima: puni ugao ima $360°$, odnosno 2π radijana. Ako želimo ugao koji ima α stepeni mjeriti u radijanima, onda to radimo pomoću formule

$$\rho = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \,\mathrm{rad},$$

a ako želimo ugao koji ima ρ radijana mjeriti u stepenima, koristimo formulu

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \rho.$$

Potom [8] daje veći broj primjera gdje uglove mjerene u radijanima izražava pomoću stepeni i obratno.

4. Problemi sa razumijevanjem radijana

Iako je radijan samo još jedna mjera veličine ugla, kao što smo već napomenuli izuzetno je važan pojam za definisanje trigonometrijskih funkcija na skupu realnih brojeva. Istraživanja su pokazala da učenici i studenti ne razumiju u potpunosti pojam radijana, iako relativno lako rade zadatke u kojima je potrebno pretvarati radijane u stepene i obratno. Navest ćemo nekoliko problema koji su uočeni u razumijevanju pojma radijana.

Prvi problem: veliki broj autora uočava da pojam stepena dominira nad pojmom radijana. Npr., istraživanje opisano u [9] je rađeno sa 37 budućih nastavnika matematike i 14 nastavnika matematike, te je uočeno da kod njihovih ispitanika pojam stepena dominira nad pojmom radijana, te da niko ne zna definisati radijan. U svom istraživanju sa studentima – budućim nastavnicima matematike, Tuna [10] otkriva da 60% ispitanika zna definisati stepen, ali samo 8% njih zna definisati radijan. Autor zaključuje da studenti često znaju raditi zadatke sa radijanima, ali ne razumiju sam pojam radijana. Istraživanje sa studentima - budućim nastavnicima matematike u Zagrebu [3] je pokazalo da kod studenata stepen dominira kao mjera ugla, a kad trebaju izračunati dužinu luka ako je data mjera centralnog ugla u radijanima, studenti prvo pretvaraju radijane u stepene te koriste formulu za računanje dužine luka. Do sličnih rezultata je došlo i istraživanje [5], kada je od 63 ispitana studenta prve godine studija matematike, samo dvoje znalo tačnu definiciju radijana, a njih osam je znalo na datoj kružnici označiti (približno) ugao veličine 2 radijana. Pri tome su studenti koji su tačno odgovorili obično prvo 2 radijana pretvorili u stepene pa tek onda označili ugao. Kamber i Takači [4] su u istraživanju sa učenicima na kraju drugog i četvrtog razreda srednje škole uočile da učenici radijan obično definišu kroz njegov odnos sa stepenima. Treba napomenuti da nisu svi učenici koji su radijan definisali preko veze sa stepenom naveli tačnu vezu: neki su odgovorili da je „$1\text{rad} = 1^\circ$“, „$1\text{rad} = 180^\circ$“ ili „$1\text{rad} = \pi$“.

Drugi problem je nerazumijevanje definicije radijana. Nije problem što učenici ne znaju formu riječi za definisanje radijana, već nerazumijevanje definicije dovodi do toga da ne znaju npr. odrediti $\sin 2$ pomoću trigonometrijske kružnice (kada je riječ o $x = 2 \in \mathbb{R}$, tj. o 2 radijana). Nerazumijevanje radijana dovodi da učenici (i studenti) često ne znaju riješiti jednostavne zadatke kao što je:

Primjer 4.1. *Odrediti poluprečnik kruga, ako je poznato da centralnom uglu od* 3 *radijana odgovara kružni luk dužine* $19,5$ *cm [10].*

Učenik ili student koji zna i razumije definiciju radijana, lako će doći do zaključka da centralnom uglu od tri radijana odgovara kružni luk tri puta duži od poluprečnika, pa je sam poluprečnik dužine $19,5\text{cm} : 3 = 6,5\text{cm}$. Učenik ili student koji ne razumije definiciju će vjerovatno ugao od 3 radijana pretvoriti u stepene te koristiti formulu $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ odnosno $r = \frac{l\cdot 180^\circ}{\pi\alpha}$ - kao što su i radili neki ispitanici u istraživanju [10]. Ovo će dovesti do tačnog rezultata, ali je duže i komplikovanije rješenje.

Nepoznavanje i nerazumijevanje definicije radijana je usko povezano sa prvim problemom – učenici i studenti preferiraju raditi sa stepenima, koji su im poznati. Ovo je potpuno razumljivo, jer učenici prvo o uglovima uče u geometriji još u osnovnoj školi i tada koriste samo stepene. S druge strane, često učenici i studenti ne shvaćaju radijan kao mjeru bilo kojeg ugla ili u bilo kojoj kružnici, već interno zamišljaju da se radijan pojavljuje samo u jediničnoj (trigonometrijskoj) kružnici [7].

Treći problem: učenici i studenti često ne prepoznaju da je ugao mjeren u radijanima, ako nema „π“ u sebi. Do ovog zaključka su došle Čižmešija i Milin Šipuš [3], kad su uočile da studenti realne brojeve koji nisu oblika $q\pi, q \in \mathbb{Q}$ ne vežu za radijan, tj. ne prepoznaju kao mjeru ugla u radijanima. Slično, istraživanje [5] u zadatku određivanja ugla od 2 radijana otkriva da određeni broj studenata označava ugao od 2° ili 2π radijana – kao da je studentima nepojmljivo da ugao bude „samo“ 2 radijana. Akkoc [1] dolazi do zanimljivog otkrića da mnogi učenici i studenti imaju dvije različite predstave broja π: π je ugao u radijanima i π je iracionalan broj. Ako dobiju zadatak označavanja ugla od $3,1$ radijana, takvi učenici i studenti vjerovatno neće lako uočiti da je taj ugao veoma blizu ugla od $\pi \approx 3,14$ radijana, što je opruženi ugao.

5. Šta je rješenje?

Jedno očigledno rješenje nudi [12], gdje je predloženo da nastavnici matematike prvo ispitaju koliko učenici doista znaju i razumiju o uglovima (mjerenima u stepenima i radijanima) prije nego počnu podučavati trigonometriju. U tu svrhu potrebno je, osim klasičnih zadataka pretvaranja radijana u stepene i obratno, raditi zadatke kao što su:

Primjer 5.1. *Primjeri zadataka sa radijanima:*

- *Odrediti poluprečnik kruga, ako je poznato da centralnom uglu od* $2,5$ *radijana odgovara kružni luk dužine* 10 *dm (primjer analogan primjeru 4.1).*

- *Odrediti dužine kružnih lukova na tri koncentrične kružnice, poluprečnika* 2 *cm,* $2,5$ *cm i* $2,8$ *cm redom, ako je zajednički centralni ugao veličine* $0,8$ *radijana.*
- *Procijeniti veličinu ugla u radijanima (uz datu sliku kruga i centralnog ugla).*

Da bi učenici naučili da uglovi u radijanima ne moraju „sadržavati“ π (tj. biti oblika $r\pi$), potrebno je raditi zadatke u kojima se π ne pojavljuje.

Primjer 5.2. *Primjeri zadataka sa radijanima bez* π*:*

- *Na kružnici približno nacrtati ugao veličine* 2 *radijana.*
- *Ugao od* 5 *radijana izraziti u stepenima.*
- *Pomoću trigonometrijske kružnice procijeniti vrijednosti funkcija* $\sin 2, \cos(-3), \ldots$ *(i naglasiti da je riječ o* 2 *rad,* -3 *rad,...).*

Obzirom da vizuelna pomagala, pogotovo softveri sa dinamičkim prikazom, mogu olakšati razumijevanje radijana, neki autori predlažu korištenje GeoGebre i sličnih edukativnih softvera. GeoGebrina zajednica nudi već gotove uratke drugih korisnika koji omogućavaju korisniku da „omotavaju“ brojnu pravu oko kružnice i tako bolje razumiju radijan (npr. https://www.geogebra.org/m/avdhvmtu) ili koji krug postepeno ispunjavaju sa uglovima od jednog, dva, tri,... radijana i tako omogućavaju vizuelizaciju uglova mjerenih u radijanima (npr. https://www.geogebra.org/m/anfcnazd ili https://www.geogebra.org/m/VYq5gSqU).

Literatura

[1] H. Akkoç: *Pre-service mathematics teachers' concept images of radian*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **39**, 857-878, 2008, DOI: 10.1080/00207390802054458.

[2] M. Challenger: *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*, doktorska disertacija, University of Warwick, UK, 2009.

[3] A. Čizmešija i Z. Milin Šipuš: *The trigonometric functions-concept images of pre-service mathematics teachers*, Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Ankara, Turska, 2013.

[4] D. Kamber i Đ. Takači: *On problematic aspects in learning trigonometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **49**, 161-175, 2018, DOI: 10.1080/0020739X.2017.1357846.

[5] D. Kamber Hamzić: *Analiza i rješavanje kognitivnih prepreka u nastavi trigonometrije*, doktorska disertacija, Univerzitet u Sarajevu, BiH, 2019.

[6] E. Maor: *Trigonometry*, 25.07.2022., https://www.britannica.com/science/trigonometry. [Datum pristupa: 15.09.2022.]

[7] K. C. Moore, K. R. LaForest i H. J. Kim: *Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle*, Educational Studies in Mathematics **92**, 221-241, 2015, DOI: 10.1007/s10649-015-9671-6.

[8] Š. Prgo: *Matematika za 2. razred srednjih škola*, IP Svjetlost d.d., Sarajevo, 2008.

[9] T. Topçu, M. Kertil, H. Akkoç, K. Yilmaz i O. Önder: *Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian*, Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prag, Češka Republika, 2006.

[10] A. Tuna: *A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian*, World Journal of Education **3**, 1-9, 2013, DOI: 10.5430/wje.v3n4p1.

[11] K. Weber: *Connecting Research to Teaching: Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research*, Mathematics teacher **102**, 144-150, 2008, DOI: 10.5951/MT.102.2.0144.

[12] M. Yigit Koyunkaya: *Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **47**, 1028-1047, 2016, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1155774.

EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 23 – 29

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Zlatna prava i zlatni paralelepiped (kvadar)

Alija Muminagić[a]

[a] *Penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom članku dajemo konstrukciju zlatne prave, izvodimo njenu jednačinu i dokazujemo neke sume na više načina, primijenjujući znanja o zlatnoj pravoj. U drugom dijelu definišemo zlatni paralelepiped, dokazujemo kako se izračunava njegova površina i prostorna dijagonala i izvodimo jedan interesantan odnos između konstanti ϕ i π (zlatnog broja ϕ i broja π). Ukazujemo na vezu između zlatnog pravougaonika i zlatnog kvadra (zlatni kvadar je prostorni analogon zlatnog pravougaonika).

1. Uvod

Matematička literatura vrvi člancima o zlatnom presjeku, zlatnom trouglu, prvougaoniku, rombu, zlatnoj elipsi, zlatnoj spirali i superzlatnom pravougaoniku. Rijetko nalazimo članke o zlatnoj pravoj i zlatnom paralelepipedu (kvadru), mada je o zlatnoj pravoj pisao J. Metz u časopisu FIBONACCI QUARTERLY, augusta 1977. godine. U ovom članku i mi pišemo o zlatnoj pravoj, s nešto drugačijim pristupom, kao i o zlatnom paralelepipedu (kvadru).
Prethodno ćemo se sjetiti nekih definicija i teorema, koje će biti primijenjene nešto kasnije u ovom izlaganju.

Definicija 1.1. *Ako tačka C dijeli duž $\overline{AB}$, pri čemu je $a = |AC|$, $b = |BC|$ (Slika 1) tako da vrijedi*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

kažemo da je ona dijeli u omjeru zlatnog presjeka (reza).

Slika 1.

Teorem 1.2. *Tačka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog presjeka ako je*

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339\ldots \tag{2}$$

Broj ϕ se naziva *zlatni broj*. Jasno je da je

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1} \approx 0,6180339\ldots$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: zlatni presjek, zlatna prava, zlatni paralelepiped
Kategorizacija: *Stručni rad*
Rad preuzet: maj 21.02.2022.

Iz (1) slijedi

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

to jest

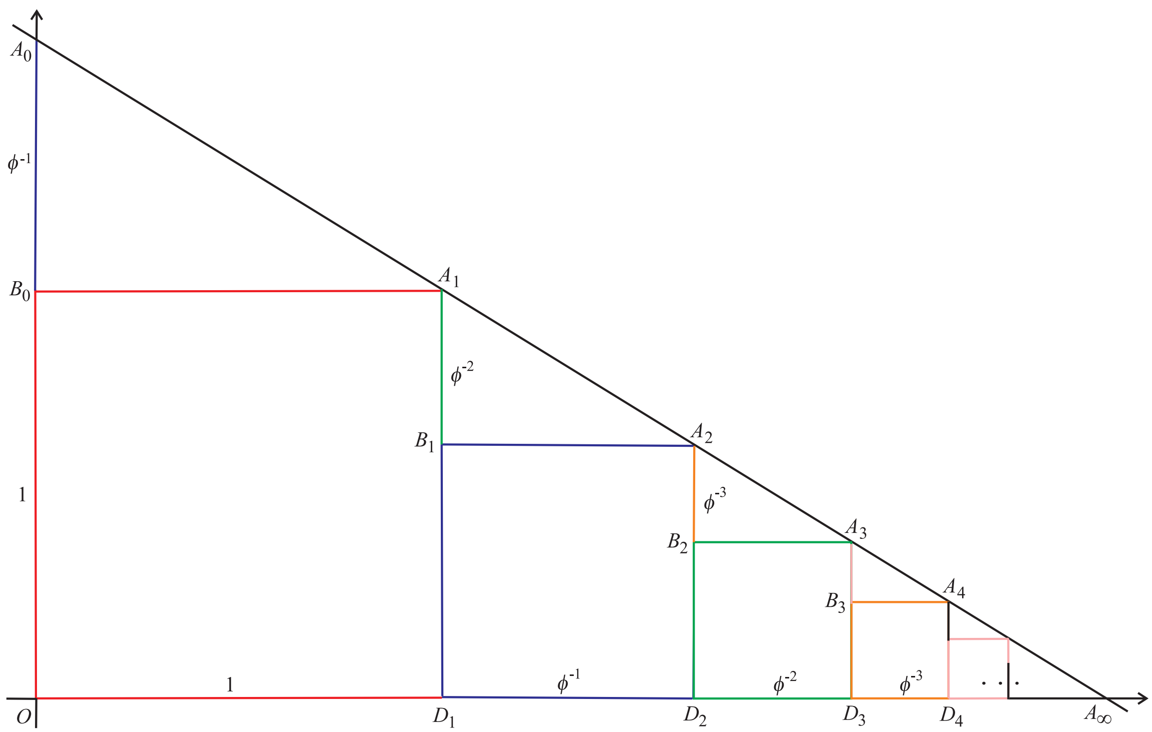
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi^2 = \phi + 1 \tag{3}$$

i

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \Longleftrightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Longleftrightarrow \phi - 1 = \phi^{-1} \Longrightarrow 1 + \phi^{-1} = \phi. \tag{4}$$

2. Zlatna prava

Posmatrajmo sada Sliku 2.



Slika 2.

U pravougli koordinatni sistem xOy konstruišimo redom kvadrate $OB_0A_1D_1$, $D_1B_1A_2D_2$, $D_2B_2A_3D_3$, ..., čije su dužine stranica redom $1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \ldots$. Konstruišimo pravu kroz tačke A_1 i A_2 i presječne tačke te prave s osama Ox i Oy i označimo sa A_∞ i A_0, respektivno. Sada lako dobijemo da prava kroz tačke $A_1(1,1)$ i $A_2(1+\phi^{-1}, \phi^{-1})$ ima jednačinu

$$y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{1 + \phi^{-1} - 1}(x-1) \Longleftrightarrow y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{\phi^{-1}}(x-1)$$

$$\Longleftrightarrow y - 1 = (1-\phi)(x-1) \Longleftrightarrow y - 1 = -(\phi - 1)x - 1 + \phi$$

$$(\text{zbog } (4), \text{ to jest } \phi - 1 = \phi^{-1} \Longleftrightarrow -(\phi - 1) = -\phi^{-1})$$
$$\Longleftrightarrow y = -\phi^{-1}x + \phi. \tag{5}$$

Jednačina (5) je ***jednačina zlatne prave***.
Uočimo da tačka A_k ima koordinate $(1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \cdots + \phi^{-k}, \phi^{-k}) = (\frac{1-\phi^{-k-1}}{1-\phi^{-1}}, \phi^{-k}), k = 1, 2, ...,$ odakle slijedi, koristeći jednakost (4), da je i $A_\infty = (\frac{1}{1-\phi^{-1}}, 0) = (\frac{\phi}{\phi-1}, 0) = (\phi^2, 0)$. Nije se teško uvjeriti da i tačke A_3, A_4, A_5, ... leže na zlatnoj pravoj. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} y &= (1-\phi)\left(\frac{1-\phi^{-k-1}}{1-\phi^{-1}}\right) + \phi = (1-\phi)\frac{1-\phi^{-k-1}}{\frac{\phi-1}{\phi}} + \phi \\ &= -\phi(1 - \phi^{-k-1} + \phi) = -\phi + \phi^{-k} + \phi = \phi^{-k}, \end{aligned}$$

za $k = 3, 4, 5, ...,$ a da tačke A_0 i A_∞ imaju koordinte $A_0(0, \phi)$ i $A_\infty(\phi^2, 0)$ (jer je $y = -\phi^{-1} \cdot 0 + \phi = \phi$ i $0 = -\phi^{-1} \cdot x + \phi \Longleftrightarrow x = \frac{\phi}{\phi^{-1}} = \frac{\phi}{\frac{1}{\phi}} = \phi^2$).
Sa Slike 2. vidimo da je

$$|OA_\infty| = |OD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + |D_3D_4| + \cdots = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \cdots = \phi^2. \tag{6}$$

Dokažimo (6) i na ovaj način. Neka je

$$S = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \cdots \tag{7}$$

Nakon množenja sa ϕ^{-1} dobijamo:

$$\phi^{-1} \cdot S = \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \cdots \tag{8}$$

i nakon oduzimanja (7) i (8) slijedi

$$S(1 - \phi^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow S = \frac{1}{1-\phi^{-1}} \Longleftrightarrow S = \frac{\phi}{\phi - 1} \Longleftrightarrow S \overset{(4)}{=} \frac{\phi}{\phi^{-1}} \Longleftrightarrow S = \phi^2.$$

Pokažimo sada zašto se prava čija je jednačina (5) s pravom naziva zlatnom pravom.
Imamo (v. Sliku 2) da je $|OA_0| = |OB_0| + |B_0A_0|$, to jest

$$\phi = 1 + |B_0A_0| \Longleftrightarrow |B_0A_0| = \phi - 1 \Longleftrightarrow (\text{zbog } 4)\ |B_0A_0| = \phi^{-1}. \tag{9}$$

Sada je $\frac{|OA_0|}{|OB_0|} = \frac{\phi}{1} = \phi$, što znači da tačka B_0 dijeli duž $\overline{OA_0}$ u omjeru zlatnog presjeka. Takođe je $\frac{|D_1A_1|}{|D_1B_1|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$, $\frac{|D_2A_2|}{|D_2B_2|} = \frac{\phi^{-1}}{\phi^{-2}} = \phi, \ldots$ pa zaključujemo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ u omjeru zlatnog presjeka.
Do istog zaključka možemo doći i a sljedeći način.
Svi pravougli trouglovi $\triangle A_iB_iA_{i+1},\ i = 0, 1, 2, \ldots$ su slični i $\frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$. Dobijamo, zbog (9), da je

$$\frac{|A_0B_0|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} \Longleftrightarrow \frac{\phi^{-1}}{|A_1B_1|} = \phi \Longleftrightarrow |A_1B_1| = \frac{\phi^{-1}}{\phi} \Longleftrightarrow |A_1B_1| = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}$$

i slično

$$|A_2B_2| = \phi^{-3},\ |A_3B_3| = \phi^{-4}, \ldots\ .$$

Dakle, $\phi^{-i},\ i = 1, 2, \ldots$ su dužine kateta trougla normalnih na Ox-osu, pa odavde vidimo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ u omjeru zlatnog presjeka.
Čitaocima prepuštamo da dokažu da tačke $A_1, A_2, A_3 \ldots$ dijele dužine $A_0A_2, A_1A_3, A_2A_4, \ldots$ u omjeru zlatnog presjeka.

Posmatrajmo sada opet Sliku 2. Vidimo da je

$$\begin{aligned}&|A_0B_0|+|A_1B_1|+|A_2B_2|+|A_3B_3|+\cdots=|OA_0|, \quad \text{to jest}\\&\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\cdots=\phi \Longleftrightarrow (\text{zbog (3) } \phi^2=\phi+1 \Longleftrightarrow \phi=\phi^2-1)\\&\Longleftrightarrow \phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\ldots=\phi^2-1 \Longleftrightarrow 1+\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\ldots=\phi^2\end{aligned}$$

i to je geometrijski dokaz za formulu (6). Označim sa $[XYZ]$ i $[PQRS]$ površine trougla $\triangle XYZ$ i kvadrata $\square PQRS$. Imamo da je (Slika 2)

$$\left.\begin{aligned}&[A_0B_0A_1]=\frac{1}{2}|A_0B_0|\cdot|B_0A_1|=\frac{1}{2}\phi^{-1}\cdot 1=\frac{1}{2}\phi^{-1}\\&[A_1B_1A_2]=\frac{1}{2}|A_1B_1|\cdot|B_1A_2|=\frac{1}{2}\phi^{-2}\cdot\phi^{-1}=\frac{1}{2}\phi^{-3}\\&[A_2B_2A_3]=\frac{1}{2}|A_2B_2|\cdot|B_2A_3|=\frac{1}{2}\phi^{-3}\cdot\phi^{-3}=\frac{1}{2}\phi^{-5}\\&\vdots\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&[OB_0A_1D_1]=1=\phi^0\\&[D_1B_1A_2D_2]=(\phi^{-1})^2=\phi^{-2}\\&[D_2B_2A_3D_3]=(\phi^{-2})^2=\phi^{-4}\\&\vdots\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Koristeći opet Sliku 2 i formule (10) i (11) možemo dokazati da je

$$1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots=\phi. \tag{12}$$

Formulom (12) predstavljen je zbir površina kvadrata, čije su dužine stranica $1,\phi^{-1},\phi^{-2},\phi^{-3},\ldots$ i taj zbir jednak je razlici između površine trougla $\triangle A_0OA_\infty$ i zbira površina trouglova $\triangle A_iB_iA_{i+1}$ $i=0,1,2,3\ldots$. Prema tome,

$$1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots=[A_0OA_\infty]-\sum[A_iB_iA_{i+1}].$$

Kako je površina $\triangle A_0OA_\infty$

$$\triangle[A_0OA_\infty]=\frac{1}{2}A_0O\cdot OA_\infty=\frac{1}{2}(1+\phi^{-1})\cdot\phi^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\phi+1}{\phi}\right)\cdot\phi^2=\frac{1}{2}\phi(\phi+1),$$

imamo da je

$$\begin{aligned}&1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots=\frac{1}{2}\phi(\phi+1)-\frac{1}{2}(\phi^{-1}+\phi^{-3}+\phi^{-5}+\cdots)\\&\Longleftrightarrow 2+2\cdot\phi^{-2}+2\cdot\phi^{-4}+\cdot 2\phi^{-6}+\cdots=\phi^2+\phi-\phi^{-1}-\phi^{-3}-\phi^{-5}-\cdots\\&\Longleftrightarrow (\text{zbog } \phi^2\overset{(6)}{=}1+\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\cdots)\\&\Longleftrightarrow 2+2\cdot\phi^{-2}+2\cdot\phi^{-4}+\cdot 2\phi^{-6}+\cdots=1+\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\phi^{-5}+\phi-\phi^{-1}-\phi^{-3}-\phi^{-5}-\cdots\\&\Longleftrightarrow 1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots=\phi.\end{aligned}$$

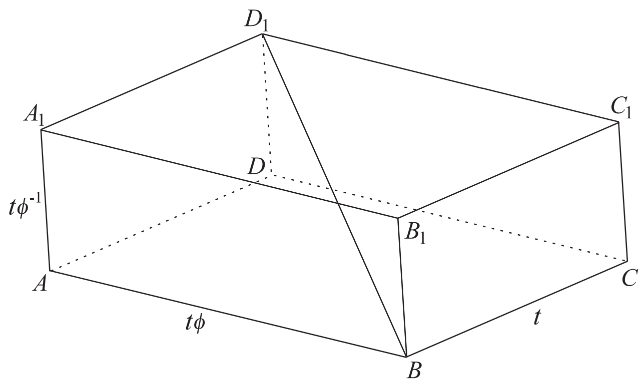
3. Zlatni paralelepiped (kvadar)

Paralelepiped je četvorostrana prizma kojoj je baza paralelogram.

Definicija 3.1. *Pravougli paralelepied (kvadar) čije se dužine ivica odnose kao*

$$\phi : 1 : \phi^{-1}$$

naziva se ***zlatnim paralelepipedom****.*

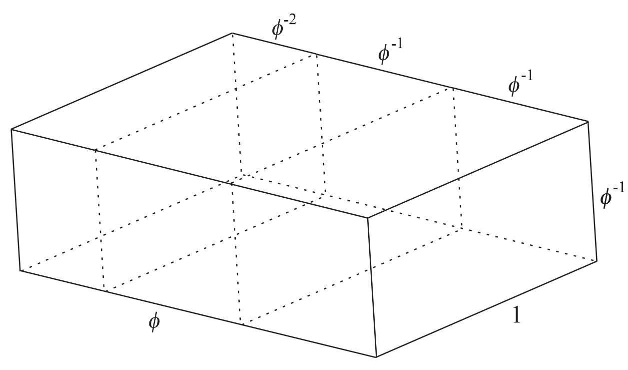


Slika 3.

Na Slici 3 prikazan je zlatni kvadar čije su dužine ivica t, $t\phi$ i $t\phi^{-1}$, t je realan broj. Tako je:

$$\frac{t\phi}{t} = \phi \ \text{ i } \ \frac{t}{t\phi^{-1}} = \phi.$$

Na osnovu definicije zlatnog pravougaonika (*pravougaonik u kome je odnos između dužina duže i kraće stranice jednak ϕ se naziva zlatnim pravougaonikom*) vidimo da su pravougaonici $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ i ADD_1A, BCC_1B_1 zlatni, a pravougaonici ABB_1A_1 i DCC_1D_1 nisu (jer je $\frac{t\phi}{t\phi^{-1}} = \phi^2$).
(Napomena: pakovanja putera od $500g$, brašna od $2kg$ i nekih sokova su zlatni kvadri.)
Posmatrajmo sada zlatni kvadar na Slici 4. Uočimo da je



Slika 4.

$$\phi^{-1} + \phi^{-1} + \phi^{-2} = 2\phi^{-1} + \phi^{-2} = \frac{2}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = \frac{2\phi + 1}{\phi^2} = \frac{\phi^3}{\phi^2} = \phi,$$

a zbog

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

je

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = (\phi+1) + \phi = 2\phi + 1.$$

Zapremina kvadra na Slici 3 jednaka je

$$V = t\phi \cdot t \cdot t \cdot \phi^{-1} = t^3 \cdot \phi \cdot \frac{1}{\phi} = t^3.$$

Dakle, za $t = 1$ je $V = 1$, a površina mu je

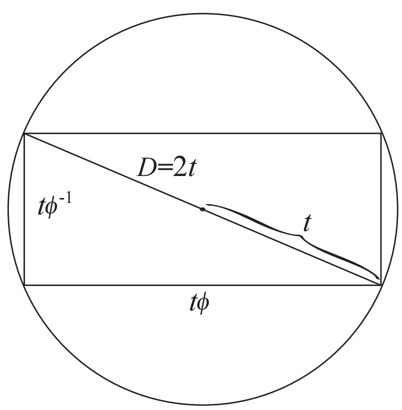
$$\begin{aligned} P_K &= 2 \cdot t \cdot \phi \cdot t + 2 \cdot t\phi \cdot t\phi^{-1} + 2t\phi^{-1} \cdot t = 2t^2(\phi + 1 + \phi^{-1}) \\ &= 2t^2\left(\phi + 1 + \frac{1}{\phi}\right) = 2t^2\left(\phi + \frac{\phi+1}{\phi}\right) = (\text{zbog } \phi + 1 = \phi^2) \\ &= 2t^2\left(\phi + \frac{\phi^2}{\phi}\right) = 2t^2 \cdot 2\phi = 4t^2\phi, \quad \text{za } t = 1 \text{ je } P = 4t^2. \end{aligned}$$

Prostorna dijagonala zlatnog kvadra je (v Sliku 3)

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(t\phi)^2 + (t\phi^{-1})^2 + t^2} = t\sqrt{\phi^2 + \phi^{-2} + 1} = \left(\text{zbog } \phi^{-2} = (\phi^2)^{-1} = \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi+1}\right) \\ &= t\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{\phi+1} + 1} = t\sqrt{\phi^2 + \frac{\phi+2}{\phi+1}} = t\sqrt{\frac{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 2}{\phi+1}} \quad \left(\text{zbog } \begin{matrix} \phi^3 = 2\phi + 1 \\ \phi^2 = \phi + 1 \end{matrix}\right) \\ &= t\sqrt{\frac{2\phi + 1 + \phi + 1 + \phi + 2}{\phi+1}} = t\sqrt{\frac{4(\phi+1)}{\phi+1}} = 2t. \end{aligned}$$

Specijalno, za $t = 1$, je $D = 2$.

Neka je sada oko zlatnog kvadra opisana lopta (vidi presjek na Slici 5).



Slika 5.

Znači, lopta ima poluprečnik t. Površina lopte je

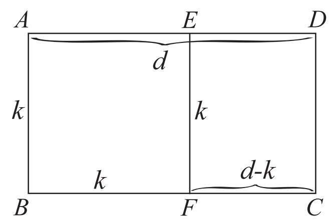
$$P_L = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot t^2.$$

Prema tome, dobijamo da je odnos između površine zlatnog kvadra i površine lopte opisane oko tog kvadra jednak

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{4t^2\phi}{4\pi t^2} = \frac{\phi}{\pi} \quad \text{(interesantan odnos između konstanti } \phi \text{ i } \pi\text{).}$$

Podsjetimo se sljedeće činjenice.

Teorem 3.2. *Ako iz zlatnog prevougaonika uklonimo kvadrat s najvećom mogućom površinom, onda je preostali pravougaonik takođe zlatni.*



Slika 6.

Dokaz: Neka je $ABCD$ zlatni pravougaonik i neka je duža stranica dužine $|AD| = d$ i kraća stranica dužine $|AB| = k$. Na Slici 6 je $ABFE$ kvadrat s najvećom mogućom površinom. Dokazaćemo da je $EFCD$ zlatni pravougaonik, to jest da vrijedi

$$\frac{k}{d-k} = \phi.$$

Iz definicije zlatnog pravougaonika slijedi da je

$$\frac{d}{k} = \phi \Longleftrightarrow \frac{d}{k} - 1 = \phi - 1 \Longleftrightarrow \left(\text{zbog } \phi - 1 = \frac{1}{\phi}\right) \Longleftrightarrow \frac{d-k}{k} = \frac{1}{\phi}, \text{ tj. } \frac{k}{d-k} = \phi,$$

što je i trebalo dokazati. □

Šta vrijedi za zlatni kvadar? (v. Sliku 4.)

Ako iz zlatnog kvadra na Slici 4 uklonimo dva kvadra čije su dužine stranica ϕ^{-1}, $\phi-1$ i 1, onda preostali kvadar ima dužine ivica 1, ϕ^{-1} i $\phi-2\phi^{-1} = \phi^{-2}$ $\left(\phi-2\phi^{-1} = \phi-\frac{2}{\phi} = \frac{\phi^2-2}{\phi} = \frac{\phi+1-2}{\phi} = \frac{\phi-1}{\phi} = (\text{zbog } \phi-1 = \phi^{-1}) = \frac{\phi^{-1}}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}\right)$.

Dakle, odnos ivica u preostalom kvadru je $1 : \phi^{-1} : \phi^{-2}$ i odavde nakon množenja sa ϕ slijedi $\phi : 1 : \phi^{-1}$ te zaključujemo da je preostali kvadar takođe zlatni.

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Super zlatni pravokutnik*, Miš br. 89 /godina 18/ trvavanj 2017.
[2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zlatna elipsa*, Matematičko-fizički list, LXVIX 1 (2018-2019).
[3] J. Frandsen: *De(t) gyldne snit*, Systime, 1999 (2 udgnve).
[4] M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: *O zlatnom trokutu*, HMD, math.e br. 30.
[5] B. Kovačić, M. Katić: *O zlatnom rombu*, HMD, math.e br. 35.
[6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 30–38

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Približna trisekcija ugla

Hasan Smajić[a]

[a]*JU OŠ "Malešići", Malešići*

Sažetak: U ovome radu su prezentirane dvije konstrukcije približne trisekcije ugla od 60°, inspirisane Arhimedovom konstrukcijom. Također je pokazano da su obje konstrukcije izvedene s veoma malom pogreškom.

1. Uvod

Starogrčka Platonova akademija postavila je pitanje trisekcije ugla (podijeliti ugao na tri jednaka dijela) pomoću šestara i nebaždarenog lenjira (služi samo za povlačenje linije-spajanje dvije tačke) koje je dugo vremena zadavalo glavobolje matematičarima. Napokon došlo se do zaključka da se euklidskim konstrukcijama ne može riješiti trisekcija svakog ugla (moguće su trisekcije uglova $\alpha_n = \frac{360^\circ}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_\circ$). U ovome radu pokazaćemo približnu konstrukciju trisekcije ugla od 60° pomoću šestara i dva nebaždarena trougla. No prije toga ćemo pokazati da je tu konstrukciju nemoguće izvesti samo pomoću šestara i nebaždarenog lenjira. Za to nam je neophodan sljedeći teorem o kubnoj jednadžbi (koji navodimo bez dokaza, v. [3]).

Teorem 1.1. *Ako su koeficijenti kubne jednadžbe*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

racionalni brojevi i nijedno rješenje jednadžbe (1) nije racionalno, tada su sva ta rješenja nekonstruktibilni brojevi.

Kako je

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\end{aligned}$$

uzimajući da je $\theta = 60^\circ$, dobijamo

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}.$$

Neka je $x = \cos\frac{\theta}{3}$, te kako je $\cos\theta = \frac{1}{2}$, to onda dobijemo kubnu jednadžbu

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trisekcija ugla, Arhimedova konsrtrukcija
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Rad preuzet: 30.09.2022.

Uvodeći smjenu $u = 2x$, posljednja jednadžba poprima oblik

$$u^3 - 3u - 1 = 0. \tag{2}$$

Vidimo da je (2) kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima. Pretpostavimo da je u racionalan broj, to jest da je $u = \frac{r}{s}$, pri čemu je $r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N},\ (r, s) = 1$. Tada iz jednadžbe (2) dobijamo kubnu jednadžbu

$$r^3 - 3rs^2 - s^3 = 0,$$

iz koje onda slijedi

$$r(r^2 - 3s^2) = s^3 \Longrightarrow r|s^3 \Longrightarrow r|s \overset{(r,s)=1}{\Longrightarrow} r \in \{-1, 1\},$$

kao i

$$r^3 = s(3rs + s^2) \Rightarrow s|r^3 \Longrightarrow s|r \overset{(r,s)=1, s\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} s = 1.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $u = \frac{r}{s} \in \{-1, 1\}$. Provjerimo sada jesu li $u = 1$ i/ili $u = -1$ rješenja jednadžbe (2).

i) $u = -1$

$$(-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \neq 0,$$

to jest $u = -1$ nije rješenje jednadžbe (2).

ii) $u = 1$

$$1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 3 - 1 = -3 \neq 0,$$

to jest $u = 1$ nije rješenje jednadžbe (2).

Budući da niti jedno rješenje jednadžbe (2) nije racionalno, možemo zaključiti da su sva rješenja nekonstruktibilni brojevi pa i $2x$, odnosno, $x = \cos\frac{\theta}{3}$ je nekonstrukitibilan broj. Dakle, trisekcija posmatranog ugla od 60° nije moguća.

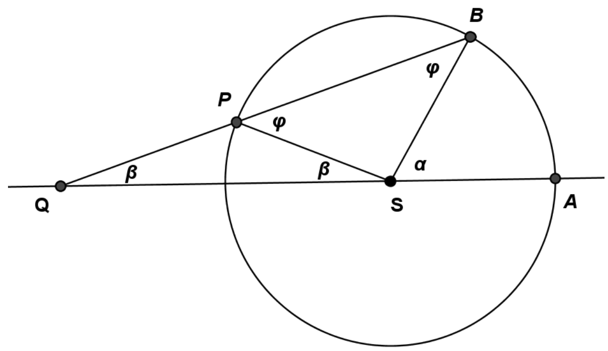
2. Arhimedova konstrukcija - trisekcija ugla pomoću trake papira

Poznato je da se problem trisekcije ugla ipak može riješiti, ali uz upotrebu nekih pomagala. U arapskom djelu "Knjiga lema", koja se pripisuje Arhimedu, opisana je konstrukcija trisekcije ugla uz pomoć šestara, ravnala i trake, [1].

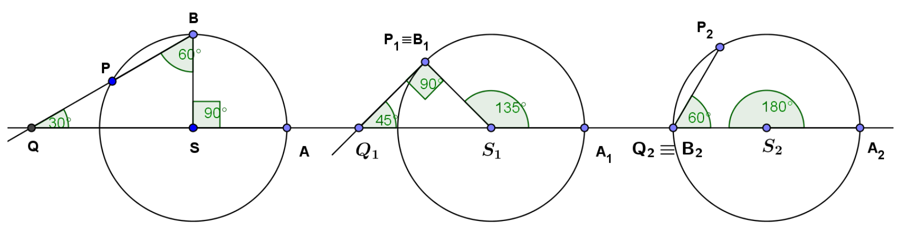
Neka je tačka S tjeme ugla $\alpha = \measuredangle ASB$. Šta je trećina tog ugla? Opišimo kružnicu poluprečnika r sa centrom u tački S. Tačke presjeka te kružnice i krakova ugla α označimo sa A i B. Nanesimo na rub trake papira tačke Q i P tako da je $|QP| = r$. Položimo tu traku papira na ravan crteža tako da joj tačka Q bude u pravcu SA i rub stalno prolazi tačkom B sve dok tačka P ne padne na kružnicu. Pomjeranjem trake tačka Q stalno ostaje na pravcu SA. Tvrdimo da je tada ugao $\beta = \measuredangle PQS = \frac{1}{3}\alpha$. Vidjeti Sliku 1.

Zaista, trouglovi $\triangle BPS$ i $\triangle QSP$ su jednakokraki pa je $\measuredangle PBS = \measuredangle BPS = \varphi$ i $\measuredangle PQS = \measuredangle PSQ = \beta$. Ugao $\varphi = BPS$ je vanjski ugao trougla $\triangle PQS$ pa je $\varphi = \beta + \beta = 2\beta$, a ugao $\alpha = \measuredangle ASB$ je vanjski za trougao $\triangle BSQ$ pa je $\alpha = \beta + \varphi$. Zamjenom $\varphi = 2\beta$ u posljednjoj jednakosti dobijamo da je $\alpha = 3\beta$, odnosno vrijedi $\beta = \measuredangle PQS = \frac{1}{3}\alpha$ što je i trebalo dokazati.

Na Slici 2 pokazana je trisekcija uglova 90°, 135° i 180° na Arhimedov način. U ovom radu koristit ćemo ih za približnu konstrukciju nekih uglova.



Slika 1: Arhimedova konstrukcija trisekcije ugla α



Slika 2: Arhimedova konstrukcija trisekcije uglova 90°, 135° i 180°

3. Trisekcije uglova 27°, 36°, 54°, 72°, 81° i 108°.

Izračunajmo trigonometrijske vrijednosti ugla 36°. Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je ugao nad osnovicom 36° i povucimo simetralu ugla $\measuredangle BAC = 72^\circ$ (v. Sliku 3).

Sada je ugao $\measuredangle BDA = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ su jednakokraki pa je $|AD| = |CD| = a$. Kako simetrala ugla dijeli suprotnu stranicu u omjeru u kome se odnose stranice koje obrazuju taj ugao vrijedi:

$$a : (b - a) = b : a \Longleftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Longleftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a_\pm = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2}.$$

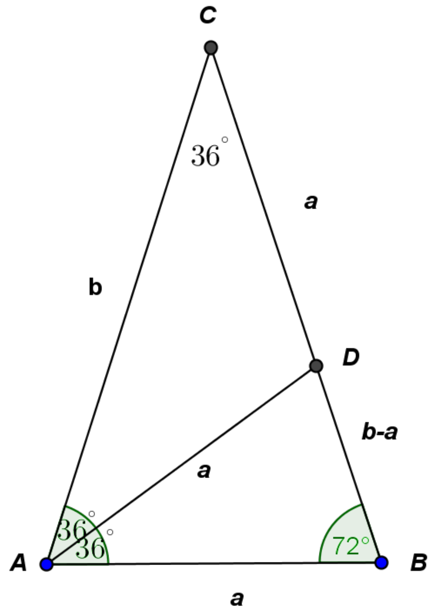
Budući da je $a_- = \frac{(-1-\sqrt{5})b}{2} < 0$, to je $a = a_+ = \frac{(-1+\sqrt{5})b}{2}$. Za $b = 1$ (jedinica mjere) dobijamo da je $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Primjenom kosinusnog teorema na trougao $\triangle ABC$, dobije se

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos 36^\circ \Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 36^\circ$$

$$\Longleftrightarrow \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 2 - 2\cos 36^\circ \Longleftrightarrow 3 - \sqrt{5} = 4 - 4\cos 36^\circ \Longleftrightarrow 4\cos 36^\circ = \sqrt{5} + 1,$$

odnosno

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$



Slika 3: Trigonometrijske vrijednosti ugla 36°

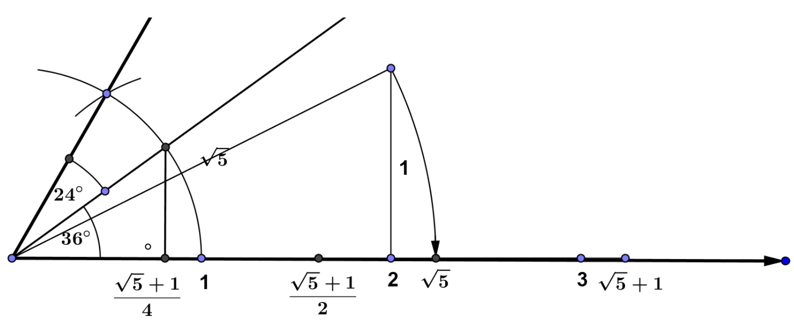
Sada je

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Koristeći Sliku 4 daćemo kratku uputu kako uraditi trisekciju uglova 27°, 36°, 54°, 72°, 81° i 108°. To slijedi iz jednakosti

$$\frac{1}{3}27^\circ = 9^\circ = \frac{1}{4}36^\circ, \qquad \frac{1}{3}36^\circ = 12^\circ = \frac{1}{2}24^\circ, \qquad \frac{1}{3}54^\circ = 18^\circ = \frac{1}{2}36^\circ,$$

$$\frac{1}{3}72^\circ = 24^\circ, \qquad \frac{1}{3}81^\circ = 27^\circ = \frac{3}{4}36^\circ, \qquad \frac{1}{3}108^\circ = 36^\circ.$$



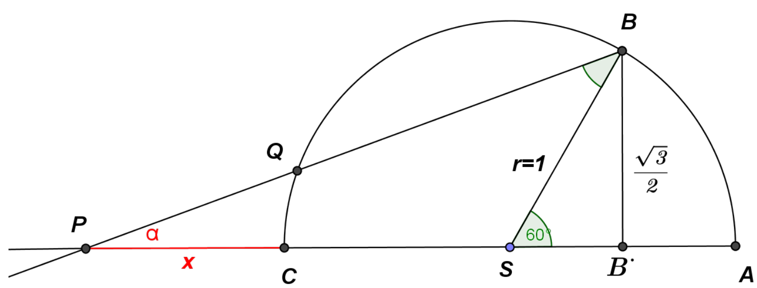
Slika 4: Konstrukcija uglova 36° i 24°

U nastavku data je tabela trigonometrijskih vrijednosti nekih značajnih uglova koja može pomoći kod trisekcije nekih uglova uz napomenu da neke vrijednosti mogu imati i drugu formu, [2].

Ugao α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$ctg\alpha$
$0°$	0	1	0	$\pm\infty$
$9°$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\sqrt5+1-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\sqrt5+1+\sqrt{5+2\sqrt5}$
$15°$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$
$18°$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{8}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$
$22.5°$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2-1$	$\sqrt2+1$
$30°$	$\frac12$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$
$36°$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{8}$
$37.5°$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt6+\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt6-\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{15-6\sqrt6-8\sqrt3+10\sqrt2}$ $=\sqrt6+\sqrt3-\sqrt2-2$	$\sqrt{15+6\sqrt6-8\sqrt3-10\sqrt2}$ $=2+2\sqrt6-\sqrt3-3\sqrt2$
$45°$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	1	1
$52.5°$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt6-\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt6+\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{15+6\sqrt6-8\sqrt3-10\sqrt2}$ $=2+2\sqrt6-\sqrt3-3\sqrt2$	$\sqrt{15-6\sqrt6-8\sqrt3+10\sqrt2}$ $=\sqrt6+\sqrt3-\sqrt2-2$
$54°$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{8}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$
$60°$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac12$	$\sqrt3$	$\frac{\sqrt3}{3}$
$67.5°$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2+1$	$\sqrt2-1$
$72°$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{8}$
$75°$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$
$81°$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\sqrt5+1+\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\sqrt5+1-\sqrt{5+2\sqrt5}$
$90°$	1	0	$\pm\infty$	0

4. Približna trisekcija ugla od 60°.

Neka je riješena približna trisekcija ugla od $60°$ kao na Slici 5. Tada je $\alpha \approx 20°$.



Slika 5: Približna trisekcija ugla od 60°

Odredimo koliko je približno udaljena tačka P od tačke C. Označimo sa x traženu udaljenost. Sa Slike 5 očito je

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac32 + x} = \frac{\sqrt3}{2x+3}, \qquad \text{te je} \qquad 2x+3 = \frac{\sqrt3}{\tan\alpha}.$$

Odavde je

$$x = \frac{\sqrt{3} - 3\tan\alpha}{2\tan\alpha},$$

pa koristeći da je $\tan\alpha \approx \tan 20^\circ \approx 0.3639702342662$ (prema savremenim trigonometrijskim mjerenjima) dobijamo

$$x \approx \frac{\sqrt{3} - 3\,(0.3639702342662)}{2\,(0.3639702342662)} \approx 0.879\,38524157182\ldots\ .$$

Uzmimo sada da je $x \approx 0.88 = \frac{88}{100} = \frac{22}{25}$ i izračunajmo pogrešku. Dakle, ako je $x = 0.88$ tada je

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 0.88 + 3} \approx 0.3638762200775,$$

te je

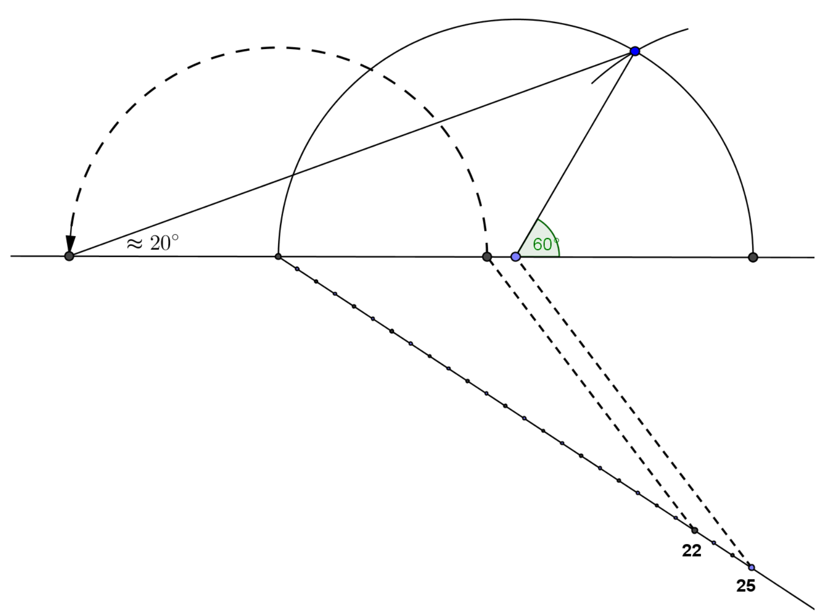
$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.3638762200775) = 19.9952433544587^\circ \approx 19.995^\circ.$$

Može se reći da je pogreška približno

$$-\left(\frac{5}{1000}\right)^\circ - \frac{5}{1000} \cdot 3600'' = -18''$$

(u sekundama) ili u procentima 0.025% (iz jednakosti $19.995^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.025\%$).

Na Slici 6 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.025\%$.

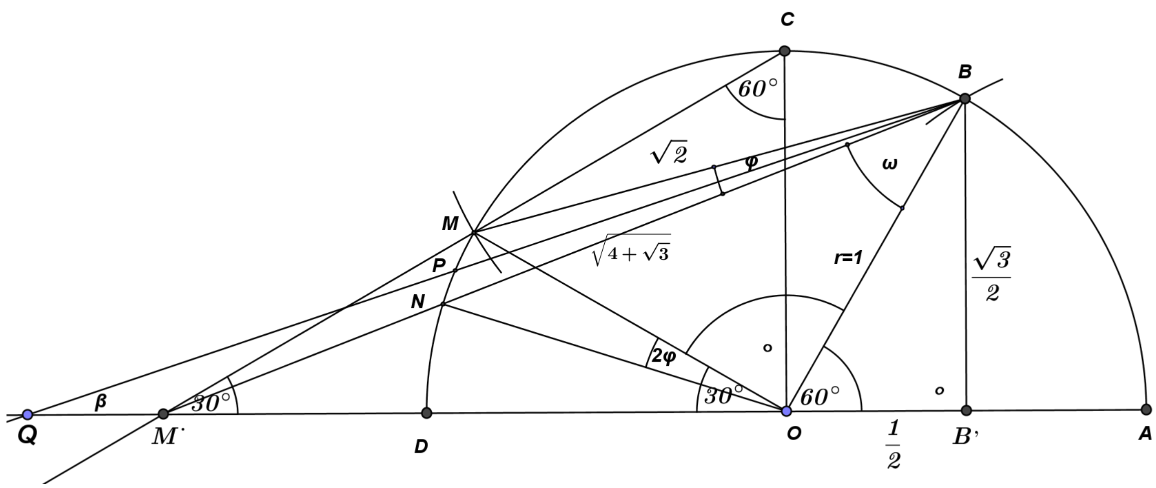


Slika 6: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.025%.

5. Približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90°.

Pretpostavimo da je riješena približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90°.

Neka je $r = 1$ poluprečnik polukružnice sa centrom u O, $\overline{AD}$ prečnik i $\measuredangle AOB = 60°$ čiju približnu trisekciju na Arhimedov način treba odrediti. Neka je $\beta = \measuredangle OQB$ trisekcija ugla 60° ($\beta \approx 20°$). Vidjeti Sliku 7. Tačke M i M' dobijemo konstrukcijom trisekcije ugla od 90° Arhimedovom metodom. Tačka B' je presjek normale povučene iz tačke B na poluprečnik OA. Jasno je da je $|BB'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ visina, a $|OB| = \frac{1}{2}$ (polovina osnovice jednakostraničnog trougla $\triangle AOB$).



Slika 7: Približna trisekcija ugla od 60°pomoću trisekcije ugla 90°.

Pokazat ćemo da je $|QM'| \approx 0.68 \cdot |M'N| = \frac{17}{25}\,|M'N|$.

Pravougli trougao $\triangle OM'C$ je specijalan pa je $|OM'| = \sqrt{3}$. Primjenom Pitagorinog teorema na pravougli trougao $\triangle BB'M'$ dobijamo

$$|BM'| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{12 + 4\sqrt{3} + 1}{4}} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}.$$

Pravougli trougao $\triangle OBM$ je jednakokraki pa je $\measuredangle OBM = 45°$. Želimo pronaći vezu između dužina tetive $\overline{MN}$ i duži $\overline{QM}$. Ugao $\varphi = \measuredangle MBN$ je periferijski ugao nad tetivom $\overline{MN}$ pa je $2\varphi = \measuredangle MON$ njen centralni ugao. Ako primijenimo kosinusnu teoremu na trougao $\triangle BB'M'$, tada dobijamo

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \cos\omega,$$

odnosno

$$3 = 4 + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot \cos\omega.$$

Dakle,

$$\cos\omega = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0.779403831,$$

te je

$$\omega \approx 38.7939769^\circ.$$

Sada je

$$\varphi = 45^\circ - \omega \approx 45^\circ - 38.7939769^\circ = 6.206023095^\circ.$$

Koristeći da je $2\varphi \approx 12.41204619^\circ$ primjenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle MNO$ dobijamo

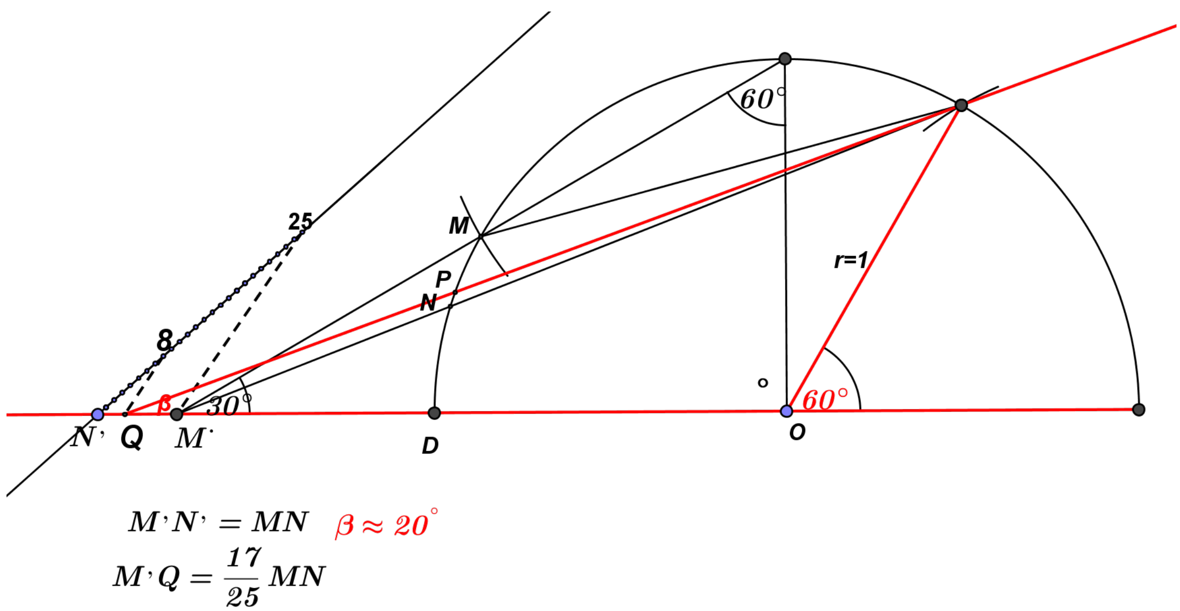
$$\left|\overline{MN}\right| \approx \sqrt{1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\left(12.41204619^\circ\right)} \approx 0.216207726.$$

Neka je $\left|\overline{QM}\right| = k\cdot\left|\overline{MN}\right|$. Iz pravouglog trougla $\triangle BB'Q$ je

$$\tan\beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3} + k\cdot\left|\overline{MN}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2k\cdot\left|\overline{MN}\right|}, \tag{3}$$

pa je

$$k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\tan\beta} - 1 - 2\sqrt{3}}{2\left|\overline{MN}\right|}.$$



Slika 8: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.01%.

Kako je $\tan\beta = \tan 20^\circ \approx 0.363970234$, $\sqrt{3} \approx 1.732050808$ i $\left|\overline{MN}\right| \approx 0.216207726$ dobijamo da je $k \approx 0.681448523$. Ako uzmemo sada da je $k \approx 0.68 = \frac{68}{100} = \frac{17}{25}$ to bi značilo da tetivu $\overline{MN}$ bez velikih teškoća možemo podijeliti na Arhimedov način (dva nebaždarena trougla i šestara) u omjeru $17:25$. Izračunajmo sada pogrešku približne trisekcije ugla od 60°. Zamjenom $k = 0.68$ u (3) dobijamo da je

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2\left(0.68\right)\left(0.216207726\right)} \approx 0.364\,018147,$$

odnosno

$$\beta \approx 20.00242403^\circ.$$

Ako uzmemo da je $\beta \approx 20.002^\circ$ pogreška iznosi $+\left(\frac{2}{1000}\right)^\circ = \frac{1}{500} \cdot 3600'' = 7.2''$ ili u procentima 0.01% (iz jednakosti $20.002^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.01\%$).

Na Slici 8 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.01\%$.

Literatura

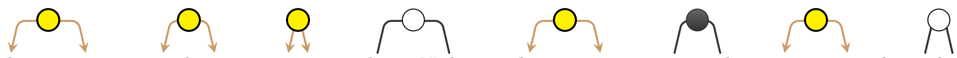
[1] Franka Miriam Brückler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.
[2] Hasan Smajić, *Tabela trigonometrijskih vrijednosti značajnih uglova*, Didaktički putokazi, Zenica, decembar 2016.
[3] Mehmed Nurkanović, *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike*, Skripta, 2016.

2

KUTAK ZA ZADATKE

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 40–41

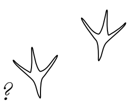
Zabavna matematika



Zadatak 1. *Neka prostorija je obasjana sa 12 sijalica. Nakon nekog vremena tri sijalice su pregorjele, a dvije*

su ugašene. Koliko je sijalica ostalo u prostoriji?

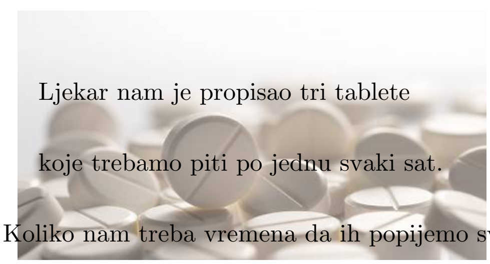
Zadatak 2. *Pijetao dok stoji na jednoj nozi težak je 2,5 kg.*



Koliko će kilograma biti težak ako stane na obje noge?

Koliko rođendana ima otac četvoro djece?

Zadatak 3.



Ljekar nam je propisao tri tablete

koje trebamo piti po jednu svaki sat.

Koliko nam treba vremena da ih popijemo sve tri?

Zadatak 4.

Ciljna skupina: svi uzrasti

Neki mjeseci u godini imaju 30 dana, a neki imaju 31 dan.

Koliko mjeseci u godini ima 28 dana?

Zadatak 5.

Ako pijetao snese jaje u ogradi između dva dvorišta,

kome pripada jaje?

Zadatak 6.

U subotu u ponoć je bio pravi prolom oblaka.

Da li je za očekivati da za 72 sata bude sunčano vrijeme?

Zadatak 7.

Anina majka ima troje djece. Jedno se zove Una, drugo Lara. Kako se zove treće dijete?

Zadatak 8.

Četiri osobe čekale su autobus 3 sata. Koliko je vremena čekala svaka od tih osoba?

Zadatak 9.

Koje životinje mogu skočiti više od ormara?

Zadatak 10.

Djed Mraz i vilenjaci

Razni problemi sa kojima se susrećemo, u svojoj suštini sadrže neke elemente matematike, oblasti matematike ili u krajnjem slučaju neke elemente matematičkog ili logičkog zaključivanja. Za rješavanje takvih problema nije nužno uvijek znati mnogo matematike, koliko je važno matematičko-logičko razmišljanje. Količina strogosti, koju mnogi nazivaju cjepidlačenje, a koju treba imati u takvim situacijama, mora imati uzlazni karakter, to jest što smo stroži to smo sigurniji u konačno rješenje. I maštovitost, u smislu interpretacije problema, korištenje adekvatne notacije u pristupu problemu, razdvajanja problema na potprobleme, takođe igraju značajnu ulogu u rješavanju istih.
Jedan od takvih problema imamo ispred nas. Zadatak je preuzet, uz male prilagodbe, iz *MATHEON kalender*, čiji je autor Dr. Felix Gunther, profesor na Technische Universität Berlin.

Zadatak. *9 vilenjaka radi u radionici Djeda Mraza na razvoju novih ideja za darove. Svi su oni veliki ljubitelji nogometa na ledu i ne žele ispustiti vrhunsku utakmicu između EFC Borusija i EFC Hertha. Djed Mraz je sve samo ne entuzijastičan oko ideje da se vilenjaci puste malo prije Badnjaka kako bi mogli gledati utakmicu. On, međutim, zna da zajednička perspektiva može pomoći motivirati ljude. Razdvojen između opcija, radije pustiti dosta vilenjaka da gledaju utakmicu, a time manje posla da se uradi ili radije ostaviti mnoge da rade ali bez mnogo motiva za rad, on odlučuje dati sljedeću ponudu svojim zaposlenicima:*
"Sutra ću svakome od vas 9 staviti kape, koje su ili crno-žute u bojama Borussije, ili plavo-bijele u bojama Herthe. Možete vidjeti šešire svih drugih vilenjaka, ali ne i svoj. Odmah nakon što vam svima stavim vaše šešire, svih vas devet morate mi reći, u isto vrijeme, koje šešire mislite da ćete nositi. Oni koji kažu tačan odgovor mogu gledati utakmicu."
Iste večeri, vilenjaci raspravljaju o prijedlogu Djeda Božičnjaka. Budući da nakon stavljanja šešira nemaju nikakvu mogućnost interakcije, žele unaprijed razmisliti o taktici. Ali gledanje nogometa na ledu nije zabavno ako ih dođe samo nekoliko. Posljedično, vilenjaci traže taktiku koja će im garantovati da će barem N od njih moći gledati utakmicu u svakom slučaju, i pri tome maksimizirati $N \geq 0$. Odnosno, oni traže metodu koja propisuje svakom vilenjaku koju boju kape će reći (moguće ovisno o kapama ostalih), tako da za svaki raspored kapa najmanje N vilenjaka ima tačan odgovor, gdje N treba biti što veći.
Vilenjak Pep, stari strateg, dolazi na ideju da pita Djeda Mraza može li on sutradan prvi, prije svih, pogađati koju kapu nosi. U ovom slučaju, vilenjaci također raspravljaju o planu koji jamči da će ovaj put M vilenjaka moći gledati utakmicu, gdje bi M opet trebalo maksimizirati. Ništa ne sluteći, Djed Mraz sljedećeg jutra prihvaća Pepov prijedlog, pa mu omogućava da može pred svima reći koju kapu misli da bi mogao nositi, ali tada preostalih osam mora istodobno dati svoje mišljenje . Koliko će još vilenjaka sada sigurno ići gledati utakmicu (odnosno, koliko je $M - N$)?

***Dodatni zadatak**: Što bi bili N i M da (prebrojivo) beskonačno mnogo vilenjaka radi u ovoj radionici?*

Za nagradni zadatak iz prethodnog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni.

Ciljna skupina: svi uzrasti
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.03.2023. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.