ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

EVOLVENTA

ISSN 2637-2126

Vol. 5, No. 2, TUZLA 2022.

JAMTK
Journal of the Association of matematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK

EVOLVENTA

Vol. 5, No. 2, 2022

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of matematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. ili direktno na https://evolventa.ba
Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Adresa:
Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:
Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK).* Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu https://en.wikipedia.org/wiki/Involute).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturskih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je finansiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa.*

U Tuzli, decembar 2022. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 2–14

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Kompleksni brojevi i trigonometrijske jednakosti

Mehmed Nurkanović

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla

Sažetak: Često se na takmičenjima iz matematike učenika srednjih škola, kao i na ispitima kod studenata na fakultetima, pojavljuju problemi iz trigonometrije (posebno problemi dokazivanja raznih trigonometrijskih jednakosti ili nejednakosti) koji znaju biti izazovni i za najbolje među njima. U ovom radu će biti demonstrirana upotreba kompleksnih brojeva u trigonometriji pri dobijanju nekih vrlo specifičnih jednakosti, koristeći osobine n-tog korijena jedinice, binomnu formulu, geometrijski niz ili neku drugu ideju.

1. Uvod

Nekada trigonometrijski problemi mogu zadavati poprilićnu glavobolju studentima na ispitima kao i učenicima koji se spremaju za takmičenja. Koristiti isključivo trigonometrijski ili općenito geometrijski metod u njihovom rješavanju zna biti često vrlo komplicirano i naizgled nemoguća misija. Budući da kompleksni brojevi mogu biti predstavljeni na tri različita načina, od kojih je jedan u trigonometrijskom obliku (ostala dva su: algebarski i Eulerov), to se nameće ideja o mogućnosti primjene kompleksnih brojeva u rješavanju takvih problema. Problemi dokazivanja nekih trigonometrijskih jednakosti mogu biti riješeni ponekad upotrebom potpune matematičke indukcije. Međutim, ukoliko je problem oblika da se izračuna neka suma ili proizvod nekih trigonometrijskih funkcija, onda to poprima znatno veću težinu. Ideja ovog rada je da ilustriramo primjenu kompleksnih brojeva s nekoliko zanimljivih primjera dobijanja nekih trigonometrijskih jednakosti. No, prije toga podsjetimo se nekih baznih činjenica o kompleksnim brojevima. Prije svega, kako je već rečeno, kompleksan broj možemo predstaviti u sljedećim oblicima:
a) algebarskom

$$z = a + ib,$$

b) trigonometrijskom

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

i
c) Eulerovom

$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: kompleksan broj, n-ti korijen jedinice, binomna formula, geometrijski niz, Moivreova formula
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

pri čemu je: $a = \text{Re}\{z\}$, $b = \text{Im}\{z\}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i φ je ugao koji se dobije iz jednakosti

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Važno je istaknuti još i sljedeće:

$$i^{4k} = 1, \; i^{4k+1} = i, \; i^{4k+2} = -1, \; i^{4k+3} = -i, \; k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

i da vrijedi tzv. *Moivreova formula*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3}$$

2. Primjena n-tog korijena jedinice

U mnogim problemima iz trigonometrije moguće je primijeniti metod kompleksnih brojeva u slučaju korištenja osobina n-tog korijena jedinice (n je prirodan broj). Prisjetimo se tog fenomena. Naime,

$$z^n - 1 = 0 \Longleftrightarrow z^n = e^{2k\pi i} \; (k \in \mathbb{Z}) \; \Longleftrightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} \; (k = 1, 2, ..., n).$$

Znamo da algebarska jednadžba n-tog stepena ima n rješenja u skupu kompleksnih brojeva, računajući pri tome i višestrukost pojedinih rješenja (osnovni teorem algebre). Tako se brojevi z_k, $k = 1, 2, ..., n$, zovu n-tim korijenima jedinice. Oni geometrijski predstavljaju vrhove pravilnog n-tougla koji su raspoređeni na jediničnoj kružnici (s centrom u koordinatnom početku) u kompleksnoj ravni.
Uzmemo li specijalno $n = 5$, imamo jednadžbu

$$z^5 - 1 = 0, \tag{4}$$

za koju znamo da su joj rješenja 5-i korijeni jedinice: 1, $e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $e^{\frac{8\pi}{5}i}$. S druge strane, jednadžbu (4) možemo riješiti i na drugi način i tako njena rješenja dobiti u algebarskom obliku, koja ćemo moći uporediti s već dobijenim oblicima rješenja u Eulerovom, odnosno trigonometrijskom obliku. Naime,

$$z^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0,$$

odakle se dobije $z_1 = 1$ i

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

što je simetrična jednadžba koja se, dijeljenjem s z^2, svede na ekvivalentnu jednadžbu

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0.$$

Uvođenjem smjene $w = z + \frac{1}{z}$ posljednja jednadžba prelazi u jednadžbu oblika

$$w^2 + w - 1 = 0,$$

čija su rješenja $w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, te nakon vraćanja smjene dobijemo

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_4 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_5 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

Gledajući položaj ovih rješenja u kompleksnoj ravni, zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
z_2 &= e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\\
z_3 &= e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5},\\
z_4 &= e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5},\\
z_5 &= e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Upoređivanjem svakog od dobijenih rješenja u njegovom algebarskom i njegovom trigonometrijskom obliku, dobijemo

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\\
&\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

Odavde se mogu sada dobiti vrijednosti tangensa ovih uglova, što nam predstavlja rješenje problema navedenog u [3], Zad. 797. Naime, tako imamo

$$\begin{aligned}
\tan\frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}},\\
\tan\frac{4\pi}{5} &= -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Naravno, korištenjem adicionih teorema i formula za polovične uglove, jednostavno se dobije i da su

$$\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \tan\frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Čitaocu preporučujemo da do ovih rezultata dođe i geometrijskim putem (vidjeti geometrijski način rješavanja sličnog problema u [2], V Način).
Time smo pokazali kako se može uspješno pristupiti rješavanju problema u obliku Zad. 797 [3], kao i njemu sličnih problema, koristeći upravo kompleksne brojeve i osobine n-tog korijena jedinice.

Sada se, naravno, mogu izvesti i drugi rezultati slično prethodnom razmatranju. Naime, već smo vidjeli da vrijedi

$$x^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^5 = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \;\; k = 1,2,3,4,5,$$

gdje je $x_5 = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4). \tag{5}$$

Kako je

$$x_4 = e^{\frac{8\pi i}{5}} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \overline{x}_1$$

i analogno i $x_3 = \overline{x}_2$, zamjenom u (5) dobijemo zanimljivu vezu

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x-1)(x-x_1)(x-\overline{x}_1)(x-x_2)(x-\overline{x}_2) \\ &= (x-1)\left[x^2 - (x_1+\overline{x}_1)x + x_1\overline{x}_1\right]\left[x^2 - (x_2+\overline{x}_2)x + x_2\overline{x}_2\right] \\ &= (x-1)\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_1\}x + |x_1|^2\right]\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_2\}x + |x_2|^2\right] \\ &= (x-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}x + 1\right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1\right). \tag{6}$$

Dokazati jednakost (6) se javlja kao problem u obliku Zad. 826 [3].

Posljednji se rezultat može i popćiti za proizvoljan prirodni broj n. Razmatranja se razlikuju za parne i neparne n. Prvo, razmotrimo slučaj neparnog stepena

$$x^{2n+1} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n+1} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n+1}i}, \ \ k = 1, 2, ..., 2n+1,$$

gdje je $x_{2n+1} = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je, zbog $x_{2n+1-k} = \overline{x}_k$,

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - 1 &= (x-1)\prod_{k=1}^{2n}(x-x_k) = (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - (x_k+\overline{x}_k)x + x_k\overline{x}_k\right] \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right], \end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right). \tag{7}$$

U slučaju parnog stepena, imamo

$$x^{2n} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n}i}, \ \ k = 1, 2, ..., 2n,$$

gdje je $x_n = -1$, $x_{2n} = 1$ i $|x_k| = 1$. Međutim, zbog $x_{2n-k} = \overline{x}_k$, bit će

$$\begin{aligned} x^{2n} - 1 &= (x-x_n)(x-x_{2n})\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(x-x_k) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{2n-k}) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\ &= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right], \end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{8}$$

Slično se dobije da je

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n+1}+1\right) \tag{9}$$

i

$$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n}+1\right). \tag{10}$$

Problem dokazivanja jednakosti (7), (8), i (10) javlja se u npr. [3] u obliku Zad. 829, 827 i 828, respektivno. Primijetimo sada da možemo iz ovih jednakosti dobiti vrlo zanimljive veze. Kako je, s jedne strane,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1\right),$$

a s druge, kako smo već vidjeli,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right),$$

imamo da je

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{11}$$

Uzimajući da je $x=1$ u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

odakle je

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2=\frac{n}{4^{n-1}},$$

odnosno

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}...\sin\frac{(n-1)\,\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1, \tag{12}$$

čime smo upravo demonstrirali i rješenje problema datog kao Zad. 830, 1° [3].
Analogno, uzimajući da je $x=-1$ u (11), dobije se

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}...\cos\frac{(n-1)\,\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1. \tag{13}$$

Također, na analogan način se iz jednakosti (7) dobiju sljedeće formule

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{(n-1)\,\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},\quad n\in\mathbb{N} \tag{14}$$

i

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}...\cos\frac{(n-1)\,\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

3. Primjena binomne formule

Koristeći binomnu formulu i kompleksne brojeve moguće je doći do vrlo zanimljivih jednakosti (a koje se često pojavljuju u literaturi kao problemi za rješavanje, te kao problemi na raznim takmičenjima iz matematike ili ispitima na fakultetima).
Tako, na primjer, imamo

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+\binom{n}{5}i^5+...+i^n \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i-\binom{n}{2}-\binom{n}{3}i+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}i+...+i^n\ ,\end{aligned}$$

gdje smo koristili (2) i binomnu formulu.
Koristeći sada Moivreovu formulu i činjenicu da je

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

dobijamo

$$(1+i)^n=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

te vrijedi

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=\operatorname{Re}\left\{(1+i)^n\right\}=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{16}$$

i

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=\operatorname{Im}\left\{(1+i)^n\right\}=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}. \tag{17}$$

Problemi dokazivanja jednakosti (16) i (17) mogu se, na primjer, naći u [3] kao Zad. 795.

Krenemo li sada od jednakosti

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x+i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ i^4\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i^5\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \cos nx+i\sin nx,\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\cos nx &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k\right\}\\ &= \binom{n}{0}\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-...,\\ \sin nx &= \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k\right\}\\ &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-...\,,\end{aligned}$$

dobijemo sljedeću jednakost

$$\tan nx=\frac{\sin nx}{\cos nx}=\frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-...}{\binom{n}{0}\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-...}.$$

Nakon dijeljenja i brojnika i nazivnika posljednjeg razlomka s $\cos^n x$, slijedi vrlo zanimljiva jednakost

$$\tan nx=\frac{\binom{n}{1}\tan x-\binom{n}{3}\tan^3 x+\binom{n}{5}\tan^5 x-}{1-\binom{n}{2}\tan^2 x+\binom{n}{4}\tan^4 x-...}, \tag{18}$$

čije se dokazivanje pojavljuje kao problem u obliku Zad. 800 [3].

4. Primjena geometrijskog niza

U ovoj sekciji ćemo, koristeći se geometrijskim nizom i kompleksnim brojevima, doći do još nekih vrlo zanimljivih trigonometrijskih jednakosti, kao što slijedi.
Kombiniranjem Eulerovog i trigonometrijskog oblika komopleksnog broja, imamo

$$\begin{aligned}1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n &= \frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}=\frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}\cdot\frac{ae^{-ix}-1}{ae^{-ix}-1}\\ &= \frac{a^{n+2}e^{inx}-ae^{-ix}-a^{n+1}e^{i(n+1)x}+1}{a^2-ae^{ix}-ae^{-ix}+1}\\ &= \frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^2-2a\cos x+1}\\ &\quad+i\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin(n+1)x}{a^2-2a\cos x+1}.\end{aligned}$$

odakle je

$$\operatorname{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=1+a\cos x+a^2\cos 2x+...+a^n\cos nx$$

i

$$\operatorname{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=\frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^2-2a\cos x+1}$$

pa je

$$1+a\cos x+a^2\cos 2x+...+a^n\cos nx=\frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos\left(n+1\right)x+1}{a^2-2a\cos x+1}. \tag{19}$$

Slično se dobije da je

$$\operatorname{Im}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=a\sin x+a^2\sin 2x+...+a^n\sin nx$$

i

$$\operatorname{Im}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^2+...+\left(ae^{ix}\right)^n\right\}=\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin\left(n+1\right)x}{a^2-2a\cos x+1},$$

odakle slijedi

$$a\sin x+a^2\sin 2x+...+a^n\sin nx=\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin\left(n+1\right)x}{a^2-2a\cos x+1}. \tag{20}$$

Uzimajući, specijalno, $a=1$, iz gornjih jednakosti slijede sljedeće jednakosti (v.npr. [3], Zad. 798):

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 2x+...+\sin nx&=\frac{\sin nx+\sin x-\sin\left(n+1\right)x}{2-2\cos x}\\&=\frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2}-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left[\cos\frac{(n-1)x}{2}-\cos\frac{(n+1)x}{2}\right]}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{21}$$

i

$$\begin{aligned}1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx&=\frac{\cos nx-\cos\left(n+1\right)x+1-\cos x}{2-2\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{22}$$

i

$$\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{23}$$

Sličnim postupkom možemo dobiti još neke zanimljive trigonometrijsle jednakosti. Kako je

$$\begin{aligned}1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha} &= \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1} = \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-i2\alpha}-1}{e^{-i2\alpha}-1}\\ &= \frac{e^{i2n\alpha}-e^{-i2\alpha}-e^{i2(n+1)\alpha}+1}{2-e^{i2\alpha}-e^{-i2\alpha}}\\ &= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1}{2-2\cos 2\alpha}\\ &+ i\frac{\sin 2n\alpha+\sin 2\alpha-\sin 2\left(n+1\right)\alpha}{2-2\cos 2\alpha},\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= \operatorname{Re}\left\{1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha}\right\}\\ &= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1-\cos 2\alpha}{4\sin^2\alpha}\\ &= \frac{2\sin\left(2n+1\right)\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha}\\ &= \frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha+\sin\alpha}{2\sin\alpha}.\end{aligned}$$

odnosno

$$1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha = \frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}. \tag{24}$$

Lijevu stranu jednakosti (24) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned}1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= (1+\cos 2\alpha)+(1+\cos 4\alpha)+...+(1+\cos 2n\alpha)-(n-1)\\ &= 2(\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha)-(n-1),\end{aligned}$$

odakle je

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha\right). \tag{25}$$

Iz (25) i (24) slijedi

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n-1}{2}+\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}. \tag{26}$$

Analogno se dobije i sljedeća jednakost

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}, \tag{27}$$

jer je

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha).$$

Izračunavanje suma na lijevim stranama jednakosti (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 1° i 2° [3].

Pođimo sada od izraza

$$\begin{aligned}e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(k+1)\alpha}\\ &= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\ &= e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n.\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n}\right\} &= \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha}\right\}\\ &= \cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos\left(n+1\right)\alpha. \qquad (28)\end{aligned}$$

No, kako je (korištenjem Moivreove formule (3))

$$\begin{aligned}e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n} &= \left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha+1+i\sin\alpha\right)^{n}\\ &= \left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(2\cos^{2}\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{n}\\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n}\\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &+ i2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}+\sin\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}+i2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2},\end{aligned}$$

slijedi

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n}\right\}=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2},$$

što zajedno s (28) daje

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos\left(n+1\right)\alpha=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}. \qquad (29)$$

Primijetimo da se odavde može izvući zaključak i da je

$$\sin\alpha+\binom{n}{1}\sin 2\alpha+\binom{n}{2}\sin 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\sin n\alpha+\sin\left(n+1\right)\alpha=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\left(n+2\right)\alpha}{2}. \qquad (30)$$

Također i izračunavanje suma na lijevim stranama u (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 3° i 4° [3].

Do još nekih trigonometrijskih jednakosti možemo doći koristeći sljedeću sumu

$$\begin{aligned}e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)} &= e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}=e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{-i\alpha}{2}}}\\ &= \frac{e^{i\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}-e^{i\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}}\\ &= \frac{\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}\\ &+ \frac{\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\\ &+ i\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

Kako je, s jedne strane,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right),\\ \operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right),\end{aligned}$$

a s druge strane,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),\\ \operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}&=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

zaključujemo da vrijede sljedeće jednakosti [4]:

$$\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right) \tag{31}$$

i

$$\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right). \tag{32}$$

5. Druge ideje

Sada ćemo demonstrirati korištenje ideje rješavanja neke pomoćne jednadžbe kako bismo dobili neku vrlo zanimljivu trigonometrijsku jednakost. Kao prvo, razmotrimo sljedeću jednadžbu po z (v. [1])

$$(z+1)^n=e^{2n\alpha i}.$$

Označimo njena rješenja sa z_k, $k=0,1,...,n-1$. Tada je

$$z_k=e^{\frac{2n\alpha i+2k\pi i}{n}}-1. \tag{33}$$

Jasno je da vrijedi

$$(z+1)^n-e^{2n\alpha i}=\left(z-z_0\right)\left(z-z_1\right)...\left(z-z_{n-1}\right),$$

odakle, specijalno uzimajući $z=0$, slijedi

$$(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}z_k=1-e^{2n\alpha i}. \tag{34}$$

S druge strane, prema (33), imamo

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}z_k&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-1\right)\cdot\frac{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\left[e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right]\\ &=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\cdot 2i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)=(2i)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)\right)e^{A_k},\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i=\left(n\alpha+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)i=\left(n\alpha+\frac{\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)\,n}{2}\right)i \\ &= \left(n\alpha+\frac{(n-1)\,\pi}{2}\right)i. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k=(2i)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)\right)e^{\left(n\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)i}. \tag{35}$$

Iz jednakosti (34) i (35) dobijamo

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{(-1)^n\left(1-e^{2n\alpha i}\right)}{(2i)^n\,e^{\left(n\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)i}}\cdot\frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}}=\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{e^{-n\alpha i}-e^{n\alpha i}}{e^{\frac{(n-1)\pi}{2}i}} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{-2i\sin(n\alpha)}{\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{n-1}}=\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot\frac{-2i\sin(n\alpha)}{i^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sin n\alpha. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)...\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right)=\frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}}, \tag{36}$$

čije se dokazivanje zahtijeva kao problem i u Zad. 806 [3].

Promatrajmo sada sljedeću jednadžbu po z

$$z^n=e^{2n\alpha i}\,(z-2i)^n\,, \tag{37}$$

za čija rješenja z_k, $k=0,1,...,n-1$, vrijedi

$$\frac{z_k}{z_k-2i}=e^{\frac{2n\alpha i+2k\pi i}{n}},$$

odnosno

$$\left(1-e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right)z_k=-2ie^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} z_k &= -2i\frac{e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{1-e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}\cdot\frac{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}=-2i\frac{e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}} \\ &= -2i\frac{\cos\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)}=\cot\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)+i \end{aligned} \tag{38}$$

Uočimo da je suma korijena jednadžbe (37), $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k$, prema Vietèovim formulama, jednaka koeficijentu sa suprotnim predznakom koji stoji uz z^{n-1} u tzv. normiranom obliku jednadžbe, to jest kada je koeficijent uz z^n jednak 1. Kako je

$$(37)\Longleftrightarrow\left(1-e^{2n\alpha i}\right)z^n+2nie^{2n\alpha i}z^{n-1}+...=0\Longleftrightarrow z^n+\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}}z^{n-1}+...=0,$$

prema tome, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} z_k &= -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} = -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} \cdot \frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-in\alpha i}} = -\frac{2nie^{n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}-e^{n\alpha i}} \\ &= -\frac{2ni\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right)}{-2i\sin n\alpha} = n\left(\cot n\alpha + i\right). \end{aligned} \tag{39}$$

S druge strane je, koristeći (38),

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) + ni. \tag{40}$$

Poređenjem jednakosti (39) i (40), dobijemo još jednu zanimljivu trigonometrijsku jednakost

$$\cot\alpha + \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + ... + \cot\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n\cot n\alpha, \tag{41}$$

čije se dokazivanje zahtijeva u Zad. 805 [3].

Primjedba 5.1. *Iz prethodno dobijenih trigonometrijskih jednakosti vidi se da se neke od njih mogu dokazati i bez upotrebe kompleksnih brojeva. Međutim, ako bi se umjesto njihovog dokazivanja razmatrao problem izračunavanja izraza na njihovoj lijevoj strani, teško da bi se to moglo učiniti bez upotrebe kompleksnih brojeva, upravo kako smo to i demonstrirali u ovom radu.*

Literatura

[1] LJ. Jarnjak, A. Rašidagić-Finci, M. Vuković: *Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive*, IP "Svjetlost" - OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo, 1975.

[2] Dragoljub Milošević: Različiti načini izračunavanja tan($7\pi/27$), *Evolventa*, vol. 4, no. 2 (2021), 34–38.

[3] M. Ušćumlić, P. Miličić: *Zbirka zadataka iz više matematike I* (VI izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1977.

[4] Y.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin: *Lekcii po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*,"Nauka", Moskva , 1982.

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 15–25

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Karamatine nejednakosti

Risto Malčeski[1], Samoil Malčeski[2]

[1]*Skopje, Sjeverna Makedonija*
[2]*Međunarodni slavjanski univerzitet, Sv. Nikole, Sjeverna Makedonija*

Sažetak: U radu se razmatraju Karamatine nejednakosti koje su neposredne posljedice Jensenove nejednakosti. Zatim je pomoću tih nejednakosti dokazan veći broj nejednakosti koje su zadavane na matematičkim takmičenjima.

1. Uvod

Nejednakosti su neizostavan dio rada matematičara, posebno onih čiji je uži interes matematička analiza, pa je njihovo detaljno proučavanje neophodno. Većina učenika, učesnika matematikičkih takmičenja, je upoznata s nejednakostima između sredina, Nesbittovom nejednakošću, nejednakostima preraspodjele, Jensenovom nejednakošću i nizom drugih nejednakosti. Jedna od manje poznatih nejednakosti je Karamatina nejednakost, koja se u literaturi često povezuje s imenima poznatijih matematičara, među kojima su Schur, Hardy, Littlewood, Pojaa i Weyl, a može se naći i kao nejednakost za majorizaciju.

2. Konveksne funkcije. Jensenova nejednakost

Definicija 2.1. *Za funkciju f reći ćemo da je* ***konveksna*** *na intervalu (a,b) ako za bilo koje $x_1, x_2 \in (a,b)$ i za svako $\alpha \in [0,1]$ vrijedi nejednakost*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Za funkciju f kažemo da je ***konkavna*** *na (a,b) ako je funkcija $-f$ konveksna na (a,b).*

Definicija 2.2. *Funkciju f nazivamo* ***strogo konveksnom*** *na (a,b) ako za bilo koje $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ vrijedi nejednakost*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Funkciju f nazivamo ***strogo konkavnom*** *na (a,b) ako je funkcija $-f$ strogo konveksna na (a,b).*

Primjer 2.3. *[4] Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo konveksna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Zaista, ako je $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in (0,1)$, tada vrijedi*

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)^2 &= \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \\ &< \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)\left(x_1^2 + x_2^2\right) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha) x_2^2,\end{aligned}$$

što znači da je funkcija $f(x) = x^2$ strogo konveksna na $(-\infty, +\infty)$.

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: konveksna funkcija, Jensenova nejednakost, Karamatina nejednakost
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

Primjedba 2.4. *Prethodni primjer pokazuje da je postupak neposredne provjere konveksnosti prilično složen čak i za najjednostavnije funkcije. Postavlja se pitanje postoji li jednostavniji način za provjeru konveksnosti funkcije, pomoću npr. neprekidnosti, diferencijabilnosti i slično. U nastavku ćemo se detaljnije zadržati na prethodnim pitanjima, ali ćemo prvo razmotriti nekoliko osnovnih svojstava konveksnih funkcija. Pretpostavit ćemo da je čitatelj upoznat s neprekidnošću i diferencijabilnošću realnih funkcija definiranih na intervalu (otvorenom ili zatvorenom).*

Lema 2.5. *[4] Konveksna funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\neq const$ ne dostiže svoj maksimum ni u jednoj tački $x_0\in(a,b)$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji leme, to jest da funkcija f dostiže svoju maksimalnu vrijednost u bar jednoj tački $x_0\in(a,b)$. Budući da je $f\neq const$, postoji interval $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ tako da je $x_0\in(x_1,x_2)$ a na jednom od njegovih krajeva vrijednost funkcije je strogo manja od njezine vrijednosti u tački x_0. Neka je, na primjer, $f(x_1)<f(x_0)$, $f(x_2)\leq f(x_0)$. Zbog toga, budući da je $x_0\in(x_1,x_2)$, postoji $\alpha\in(0,1)$ takav da je $x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$. Ako posljednje dvije nejednakosti pomnožimo redom s α i $1-\alpha$, te ih nakon toga saberemo, dobit ćemo

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)<f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

što je u protivrječnosti s konveksnošću funkcije f. $\square$

Posljedica 2.6. *Konkavna funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\neq const$ ne dostiže svoj minimum ni u jednoj tački $x_0\in(a,b)$.*

Dokaz: Neposredno slijedi iz Leme 2.5 i Definicije 2.1. $\square$

Teorem 2.7. *[4] Ako je funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ konveksna (konkavna) i ograničena na (a,b), tada je ona neprekidna na (a,b).*

Dokaz: Razmatrat ćemo slučaj kad je funkcija f konveksna. Analogno se izvodi dokaz i u slučaju konkavnosti. Pošto je f ograničena na (a,b), postoji konstanta $M>0$ takva da je $|f(x)|\leq M$ za sve $x\in(a,b)$. Neka su $x_0\in(a,b)$ i $h>0$ tako da je $x_0\pm h\in(a,b)$. Iz osobine konveksnosti funkcije f slijedi nejednakost

$$2f(x_0)\leq f(x_0-h)+f(x_0+h),$$

što je ekvivalentno s nejednakošću

$$f(x_0)-f(x_0-h)\leq f(x_0+h)-f(x_0). \tag{1}$$

Ako je $x_0\pm(k+1)h\in(a,b)$ za $k=1,2,...,n-1$, tada iz nejednakosti (1) dobijamo sistem nejednakosti

$$f(x_0-kh)-f(x_0-(k+1)h)\leq f(x_0+h)-f(x_0)\leq f(x_0+(k+1)h)-f(x_0+kh) \tag{2}$$

za $k=0,1,...,n-1$. Sabiranjem svih nejednakosti iz (2), dobijamo nejednakosti

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-nh)}{n}\leq f(x_0+h)-f(x_0)\leq\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{n},$$

odakle se, zbog ograničenosti funkcije f, dobije da vrijedi

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leq\frac{2M}{n}. \tag{3}$$

Neka je zadano $\varepsilon>0$. Uzmimo da je

$$n=\left\lfloor\frac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1 \quad \text{i} \quad \delta=\min\left\{\frac{b-x_0}{n},\frac{x_0-a}{n}\right\}.$$

Konačno, iz (3) slijedi da za ovako odabrano $\delta>0$ vrijedi $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, čim je $|x-x_0|<\delta$, to jest funkcija f je neprekidna u proizvoljnoj tački $x_0\in(a,b)$. $\square$

Teorem 2.8. *[3] Funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako za svaku tačku $x_0\in(a,b)$ funkcija*

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$$

monotono raste (strogo monotono raste) na (a,b).

Dokaz: Razmatrat ćemo samo slučaj stroge konveksnosti. Neka je $a<x_0<x_1<x_2<b$ i

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0},\quad 1-\alpha=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}.$$

Tada je $\alpha\in(0,1)$ i $x_1=\alpha x_0+(1-\alpha)x_2$. Sada tvrdnja za ovaj slučaj proizilazi iz sljedećeg niza ekvivalentnih nejednakosti

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x_0+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_0)+(1-\alpha)f(x_2)\\
&\qquad\Longleftrightarrow f(x_1)<\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)\\
&\qquad\Longleftrightarrow (x_2-x_0)f(x_1)<(x_2-x_1)f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_2)\\
&\qquad\Longleftrightarrow (x_2-x_0)[f(x_1)-f(x_0)]<(x_1-x_0)[f(x_2)-f(x_0)]\\
&\qquad\Longleftrightarrow g(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=g(x_2).
\end{aligned}$$

Dokazi za slučajeve $a<x_1<x_0<x_2<b$ i $a<x_1<x_2<x_0<b$ izvode se analogno. U sluačaju konveksnosti funkcije treba samo u gornjem nizu ekvivalentnih nejdnakosti znak "$<$" zamijeniti s "$\leq$". □

Teorem 2.9. *[4] Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka za svako $x\in(a,b)$ postoji $f'(x)$. Funkcija f je konveksna (strogo konveksna) na (a,b) ako i samo ako funkcija f' monotono raste (strogo monotono rste) na (a,b).*

Dokaz: Neka je f konveksna na (a,b) i $a<x_1<x_2<b$. Prema Teoremu 2.8, za tačke $a<u<x_1<x_2<v<b$, imamo

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2},$$

odakle slijedi

$$f_-^{'}(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'_+(x_2),$$

odnosno

$$f^{'}(x_1)=f_-^{'}(x_1)\leq f'_+(x_2)=f'(x_2),$$

to jest f' monotono raste na (a,b).
Pretpostavimo sada da f' monotono raste na (a,b) i za $x_0\in(a,b)$ razmatrajmo funkciju $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$. Prema Lagrangeovom teoremu slijedi da postoji tačka c između x i x_0 tako da je $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Sada imamo

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-x_0}\geq 0,\quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\},$$

to jest funkcija g monotono raste na intervalima (a,x_0) i (x_0,b). Osim toga,

$$g(x_0-0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)=g(x_0+0).$$

Iz svega ovog i na osnovu Teorema 2.8 slijedi da je funkcija f konveksna na (a,b). □

Teorem 2.10. *[3] Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka za svako $x\in(a,b)$ postoji $f''(x)$. Funkcija f jekonveksna na (a,b) ako i samo ako za svako $x\in(a,b)$ vrijedi $f''(x)\geq 0$. Funkcija f je strogo konveksna na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$ za svako $x\in(a,b)$ i ne postoji interval $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ takav da za svako $x\in(\alpha,\beta)$ vrijedi $f''(x)=0$.*

Dokaz: Prema Teoremu 2.9 funkcija f je konveksna na (a,b) ako i samo ako f' monotono raste na (a,b). No, f' monotono raste na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$, za svako $x\in(a,b)$.
S druge strane, prema Teoremu 2.9, funkcija f je strogo konveksna na (a,b) ako i samo ako f' strogo monotono raste na (a,b). No, funkcija f' strogo monotono raste na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$ za svako $x\in(a,b)$ i ne postoji interval $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ takav da za svako $x\in(\alpha,\beta)$ vrijedi $f''(x)=0$. $\square$

Teorem 2.11. ***(Jensenova nejednakost)[1],[2]*** *Ako je f konveksna funkcija na (a,b), tada je za svaki prirodni broj $n\geq 2$, za koji je $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ i za koji je $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$, takvi da je $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$, zadovoljena nejednakost*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n). \tag{4}$$

Ako je funkcija f strogo konveksna, tada u (4) vrijedi stroga nejednakost, pri čemu su brojevi $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ takvi da nisu svi međusobno jednaki, a brojevi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$ su pozitivni.

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti principom potpune matematičke indukcije u slučaju konveksnosti. Za $n=2$ nejednakost (4) se poklapa s nejednakošću u definiciji konveksne funkcije.
Pretpostavimo da je nejednakost (4) tačna za proizvoljan izbor od $n-1$ tačaka intervala (a,b) i za $n-1$ nenegativnih brojeva čiji je zbir jednak 1. Neka je $n\geq 3$ i neka su dati $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ i $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$, takvi da je $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$. Od brojeva $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ najmanje jedan je različit od 1. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $\alpha_1<1$. Tada, prema induktivnoj pretpostavci, imamo

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k\right)&=f\left(\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}x_k\right)\leq\alpha_1f(x_1)+(1-\alpha_1)f\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}x_k\right)\\&\leq\alpha_1f(x_1)+(1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kf(x_k).\end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (4) vrijedi i za n tačaka, pa prema principu potpune matematičke indukcije slijedi da vrijedi i za svaki prirodni broj n. $\square$

3. Karamatine nejednakosti

Definicija 3.1. *Neka su $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ i $b=(b,b_2,...,b_n)$ dva konačna niza realnih brojeva. Kažemo da niz a majorira niz b, što ćemo označavati s $a\succ b$ ili s $b\prec a$, ako, uz eventualno prenumeriranje nizova, vrijede sljedeći uvjeti:*
1) $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n$ i $b_1\geq b_2\geq...\geq b_n$,
2) $a_1+a_2+...+a_k\geq b_1+b_2+...+b_k$, za svako $k\in\{1,2,...,n-1\}$ i
3) $a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n$.

Pri tome ćemo za niz a reći da je *majoranta*, a za niz b da je *majoriran.*

Primjedba 3.2. *a) Jasno je da prvi uvjet u Definicije 3.1 nema nikakvih ograničenja, budući da se nizovi uvijek mogu prenumerirati tako da on bude zadovoljen. Ključni su drugi i treći uvjet.*
b) Za svaki niz $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ vrijedi $a\succ a$.

Primjer 3.3. *a) Ako je $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ proizvoljan niz nenegativnih realnih brojeva, čiji je zbir jednak n, tada vrijedi*

$$(n,0,...,0)\succ(a_1,a_2,...,a_n)\succ(1,1,...,1).$$

b) Nizovi $(4,4,1)$ i $(5,2,2)$ su neuporedivi u smislu Definicije 3.1, ni jedna od njih ne majorira drugu.

Teorem 3.4. ***(Prva Karamatina nejednakost)[3],[4],[5]*** *Neka nizovi $a = (a_i)_{i=1}^n$ i $b = (b_i)_{i=1}^n$ pripadaju intervalu (x, y). Ako je $a \succ b$ i ako je $f : (x, y) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada vrijedi nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(b_i). \tag{5}$$

Dokaz: Uvedimo oznake $c_i = \frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Funkcija f je konveksna, pa prema Teoremu 2.8 funkcija

$$g(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad t \in (x, y) \setminus \{t_0\},$$

monotono raste na (x, y). Zbog uvjeta 1) Definicije 3.1 niz $c = (c_i)_{i=1}^n$ monotono opada. Dalje, neka je

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, \quad k = 1, 2, ..., n, \quad A_0 = B_0.$$

Iz uvjeta 2) i 3) Definicije 3.1 slijedi

$$A_k \geq B_k, \ \text{ za } k = 1, 2, ..., n \ \text{ i } \ A_n = B_n.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} f(b_i) &= \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - f(b_i)] = \sum_{i=1}^{n} c_i (a_i - b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (A_i - A_{i-1} - B_i + B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i (A_{i-1} - B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} (A_i - B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i).
\end{aligned}$$

No, kako je $c_i \geq c_{i+1}$ i $A_i \geq B_i$, za $i = 1, 2, ..., n-1$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} f(b_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i) \geq 0,$$

što je upravo nejednakost (5).
Jasno je da u Karamatinoj nejednakosti (5) znak jednakosti vrijedi ako i samo ako za svako $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ vrijedi $c_i = c_{i+1}$ ili $A_i = B_i$. $\square$

Definicija 3.5. *Ako su za nizove $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b, b_2, ..., b_n)$ ispunjeni uvjeti:*
1) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$,
2) $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k$, za svako $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
tada kažemo da niz a slabo majorira niz b.
Jasno je, ako niz a majorira niz b, tada on i slabo majorira niz b.

Teorem 3.6. ***(Druga Karamatina nejednakost)[4],[5]*** *Neka niz $a = (a_i)_{i=1}^n$ slabo majorira niz $b = (b_i)_{i=1}^n$. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono rastuća konveksna funkcija, tada vrijedi nejednakost (5).*

Dokaz: Koristit ćemo iste oznake kao i u dokazu Teorema 3.4. Na potpuno isti način zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(a_i) - \sum_{i=1}^n f(b_i) &= \sum_{i=1}^n c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=1}^n c_i (A_{i-1} - B_{i-1}) \\ &= c_n (A_n - B_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i).\end{aligned}$$

No, $c_i \geq c_{i+1}$, za $i = 1, 2, ..., n-1$ i $A_i \geq B_i$, za $i = 1, 2, ..., n$ i kako je f monotono rastuća funkcija, imamo da je $c_n \geq 0$, pa zato je desna strana u posljednjoj jednakosti nenegativna, što znači da je tačna nejednakost (5). □

4. Jensen-konveksne funkcije

Primjedba 4.1. *U Sekciji 1 razmatrali smo konveksne funkcije i dokazali Jensenovu nejednakost. Ovdje ćemo spomenuti da osim konveksnih funkcija postoje i tzv. Jensen-konveksne funkcije.*

Za funkciju $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je *Jensen-konveksna* ako za sve $x, y \in (a, b)$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{6}$$

Funkcija f je *strogo Jensen-konveksna* ako u (6) vrijedi stroga nejednakost.
Za Jensen-konveksne funkcije vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.2. *[3],[4] Ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Jensen-konveksna funkcija, tada za sve $x_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi nejdnakost*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}. \tag{7}$$

Ako je f strogo Jensen-konveksna, tada znak jednakosti u (7) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Dokaz: *Prvi način.* Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$. Za niz

$$y_1 = y_2 = ... = y_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

vrijedi $x \succ y$, pa iz druge Karamatine nejednakosti slijedi

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i),$$

to jest

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right),$$

odakle slijedi nejednakost (7). Jasno je da, u slučaju kada je f strogo Jensen-konveksna, u (7) vrijedi znak jednakosti ako u (6) vrijedi znak jednakosti, to jest ako i samo ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Drugi način. Za $n=2$, nejednakost (7) je u suštini nejednakost iz definicije Jensen-konveksne funkcije. Pretpostavimo da (7) vrijedi za prirodni broj $n\geq 2$ i neka su $x_i\in(a,b)$, $i=1,2,...,n,n+1$. Uvedimo oznaku $x=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i$. Tada iz induktivne pretpostavke slijedi

$$f(x)=f\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}}{2}\right)\leq\frac{f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}\right)}{2}$$

$$\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)+f(x_{n+1})+(n-1)f(x)}{2n},$$

odakle, nakon sređivanja, dobijemo

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1},$$

to jest nejednakost (7) vrijedi za $n+1$. Prema principu potpune matematičke indukcije slijedi da (7) vrijedi za svaki prirodni broj. $\square$

5. Primjeri riješenih problema

Problem 5.1. *[3] Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}. \tag{8}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a\geq b\geq c$. Tada je jasno da je $(2a,2b,2c)\succ(a+b,b+c,c+a)$. Kako je funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, to iz prve Karamatine nejdnakosti slijedi nejednakost

$$f(2a)+f(2b)+f(2c)\geq f(a+b)+f(b+c)+f(c+a),$$

što je ekvivalentno s nejednakošću (8).

Problem 5.2. *[4] Dokazati da za sve $a,b\geq 0$ vrijedi*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}}\leq\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}. \tag{9}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b\geq a\geq 0$. Za brojeve

$$y=b+\sqrt[3]{b}, z=a+\sqrt[3]{a}, u=b+\sqrt[3]{a}, v=a+\sqrt[3]{b}$$

vrijedi $y\geq z$, pa je zato $(y,z)\succ(u,v)$ ili $(y,z)\succ(v,u)$ u zavisnosti od toga da li je $u\geq v$ ili je $v\geq u$, respektivno. Nadalje, funkcija $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ je konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, pa prema prvoj Karamatinoj nejednakosti vrijedi nejednakost

$$f(y)+f(z)\geq f(u)+f(v),$$

što je ekvivalentno nejednakosti (9).

Problem 5.3. *[4] Neka su a, b i c dužine stranica trougla. Dokazati da je*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}. \tag{10}$$

Rješenje. Budući da su a, b i c dužine stranica trougla vrijedi $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a+b-c > 0$, $b+c-a > 0$, $c+b-a > 0$. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $a \geq b \geq c$. Lahko se pokaže da vrijedi

$$(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a,b,c) .$$

Kako je funkcija $f(x) = -\sqrt{x}$ konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, prema prvoj Karamatinoj nejednakosti slijedi nejednakost

$$f(a+b-c) + f(c+a-b) + f(b+c-a) \geq f(a) + f(b) + f(c).,$$

koja je ekvivalentna nejednakosti (10).

Problem 5.4. *[3] Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost*

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc. \tag{11}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $a \geq b \geq c$. Očito je da od brojeva $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$ najmanje jedan može biti negativan i ako je jedan od tih brojeva negativan, tada je nejednakost (11) trivijalna. Zato pretpostavimo da su sva tri ta broja nenegativni. Tada je

$$(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a,b,c)$$

i kako je funkcija $f(x) = -\ln x$, $x \in (0,+\infty)$ konveksna, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi nejednakost

$$-\ln(a+b-c) - \ln(b+c-a) - \ln(c+a-b) \geq -\ln a - \ln b - \ln c,$$

što je ekvivalentno nejednakosti (11).

Problem 5.5. *Neka su $a,b,c > 0$ takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Rješenje. Iz $a,b,c > 0$ i $abc = 1$ slijedi da postoje $x,y,z > 0$ takvi da je $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ i $c = \frac{z}{x}$. Sada, zamjenom i sređivanjem dobijamo nejednakost

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz,$$

koja je već dokazana u Problemu 5.4.

Problem 5.6. *[3] Dokazati da za pozitivne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^3}{a_n} + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2. \tag{12}$$

Rješenje. Neka su $x_i = \ln a_i$, $i = 1,2,...,n$ i razmotrimo nizove

$$3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, ..., 3x_n - x_1 \quad \text{i} \quad 2x_1, 2x_2, ..., 2x_n. \tag{13}$$

Dokažimo da nizovi (13), koji su poredani u opadajućem redoslijedu svojih članova, zadovoljavaju Teorem 3.4. Neka su indeksi $m_1, m_2, ..., m_n$ i $k_1, k_2, ..., k_n$ takvi da je

$$\{m_1, m_2, ..., m_n\} = \{k_1, k_2, ..., k_n\} = \{1, 2, ..., n\}, \tag{14}$$

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq ... \geq 3x_{m_n} - x_{m_n+1}, \tag{15}$$

$$2x_{k_1} \geq 2x_{k_2} \geq ... \geq 2x_{k_n}. \tag{16}$$

Tada, prvo iz (15), a zatim iz (16) slijede nejednakosti:

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1},$$

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (3x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (3x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq 2x_{k_1} + 2x_{k_2},$$

i općenito, za $p = 1, 2, ..., n-1$ zbir prvih p članova u (15) nije manji od zbira prvih p članova u (16). Jasno je da za $p = n$ vrijedi znak jednakosti, što znači da su svi uvjeti Teorema 3.4 zadovoljeni. No, funkcija $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, je konveksna, pa je zbog toga

$$e^{3x_1 - x_2} + e^{3x_2 - x_3} + ... + e^{3x_n - x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + ... + e^{2x_n}$$

te ako u zadnjoj nejednakosti stavimo $x_i = \ln a_i$, $i = 1, 2, ..., n$ i iskoristimo da je $e^{\ln t} = t$, za svako $t > 0$, direktno ćemo dobiti nejednakost (12).

Primjedba 5.7. *Na potpuno analogan način, za pozizivne realne brojeve može se dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a_1^{n+k}}{a_2^n} + \frac{a_2^{n+k}}{a_3^n} + ... + \frac{a_{t-1}^{n+k}}{a_t^n} + \frac{a_t^{n+k}}{a_1^n} \geq a_1^k + a_2^k + ... + a_t^k.$$

Pri tome treba uvesti smjenu $x_i = \ln a_i$, $i = 1, 2, ..., n$ *i razmatrati nizove*

$$(n+k)\, x_i - n x_{i+1},\ i = 1, 2, ..., t \ \text{ i } \ k x_i,\ i = 1, 2, ..., t \ \ \textit{(kad je } x_{t+1} = x_1\textit{)}.$$

Problem 5.8. *[3] Ako su* $x_i \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, $i = 1, 2, ..., n$, *tada je*

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + ... + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n. \tag{17}$$

Dokazati.

Rješenje. Očito brojevi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$ pripadaju intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Na ovom intervalu funkcija $f(t) = -\cos t$ je konveksna. Analogno kao u Problemu 5.6 se dokazuje da nizovi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$, kada su raspoređeni da budu opadajući, zadovoljavaju uvjete Teorema 3.4. Konačno, nejednakost (17) slijedi iz prve Karamatine nejednakosti.

Problem 5.9. *Neka su* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 2$. *Dokazati da je*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Rješenje. Postoje $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}, ..., a_n = e^{x_n}$. Jasno je da su brojevi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$ realni, a funkcija $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$ je konveksna. Sada, analogno kao u Problemu 5.6 se dokaže da nizovi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$, kada su raspoređeni da budu opadajući, zadovoljavaju uvjete Teorema 3.4. Konačno, iz prve Karamatine nejednakosti i osobina funkcije ln, dobijemo

$$\ln(1 + e^{x_1}) + \ln\left(1 + e^{x2}\right) + ... + \ln(1 + e^{x_n}) \leq \ln\left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right) + \ln\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

odnosno

$$\ln(1 + e^{x_1})\left(1 + e^{x2}\right)...(1 + e^{x_n}) \leq \ln\left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right)\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right)...\left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

odakle je

$$(1 + e^{x_1})\left(1 + e^{x2}\right)...(1 + e^{x_n}) \leq \left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right)\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right)...\left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

to jest

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \le \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right),$$

a što je i trebalo da se dokaže.

Problem 5.10. *Neka su* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $n \ge 2$. *Dokazati da za sve* $p, k \ge 1$ *vrijedi*

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}\right)^k \ge \frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}. \tag{18}$$

Rješenje. Uočimo da vrijede sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned}(18) &\iff \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k} \ge \frac{(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p)^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}\\ &\iff \frac{a_1+a_2+...+a_n}{\sqrt[k]{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}} \ge \frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{\sqrt[k]{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}}\\ &\iff \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{\frac{a_i^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}} \ge \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{\frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}}.\end{aligned} \tag{19}$$

Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$. Neka je $0 < q \le p$ i

$$A_i = \frac{a_i^p}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p} \text{ i } B_i = \frac{a_i^q}{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}, \ i=1,2,...,n.$$

Imamo da je

$$A_1 \ge A_2 \ge ... \ge A_n, \ \ B_1 \ge B_2 \ge ... \ge B_n \ \text{ i } \ \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n B_i.$$

Također, za svako $m < n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m A_i \ge \sum_{i=1}^m B_i &\iff (a_1^p+...+a_m^p)(a_1^q+...+a_n^q) \ge (a_1^q+...+a_m^q)(a_1^p...+a_n^p)\\ &\iff (a_1^p+...+a_m^p)\left(a_{m+1}^q+...+a_n^q\right) \ge (a_1^q+...+a_m^q)\left(a_{m+1}^p...+a_n^p\right)\\ &\iff \sum_{1\le i\le m<j\le n}\left(a_i^p a_j^q - a_i^q a_j^p\right) \ge 0,\end{aligned}$$

a posljednja nejednakost je tačna budući da za $i < j$ i $p-q > 0$ vrijedi $a_i^{p-q} \ge a_j^{p-q}$. Prema tome, niz $A_1, A_2, ..., A_n$ majorira niz $B_1, B_2, ..., B_n$. Dalje, $p, k \ge 1$, pa je zato $pk \ge k$, što znači da niz

$$S_i = \frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}, \ \ i=1,2,...,n$$

majorira niz

$$T_i = \frac{a_i^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k} \ \ i=1,2,...,n$$

i kako je funkcija $f(t) = -\sqrt[k]{t}$, $k \ge 1$, konveksna na $(0,+\infty)$, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi nejednakost (19).

Problem 5.11. *(IMO 69.1) Dati su realni brojevi a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ takvi da je*

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0,$$
$$b_1 \geq a_1, \; b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \; ... \; , b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n.$$

Dokazati da je

$$b_1 + b_2 + ... + b_n \geq a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{20}$$

Rješenje. Neka je $a_i = e^{x_i}$, $b_i = e^{y_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Jasno je da niz $(y_i)_{i=1}^n$ slabo majorira niz $(x_i)_{i=1}^n$ i kako je funkcija $f(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, monotono rastuća i konveksna funkcija, iz Teorema 3.6 slijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} e^{y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} e^{x_i},$$

koja je ekvivalentna nejednakosti (20).

Problem 5.12. *Odrediti maksimum izraza $a^8 + b^8 + c^8$, ako $a, b, c \in [-1, 1]$ i $a + b + c = -\frac{1}{2}$.*

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $1 \geq a \geq b \geq c \geq -1$. Lahko se pokaže da vrijedi $\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \succ (a, b, c)$. Kako je funkcija $f(x) = x^8$ konveksna na intervalu $[-1, 1]$, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi

$$a^8 + b^8 + c^8 = f(a) + f(b) + f(c) \leq f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1) = 1^8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^8 + (-1)^8 = 2\frac{1}{256}.$$

Prema tome, traženi maksimum je jednak $2\frac{1}{256}$ i dostiže se za $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$.

Literatura

[1] V. Cîrtoaje: *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006.
[2] D.S. Mitrinović, E.S. Barnes, D.C.B. Marsh, J.R.M. Radok: *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.
[3] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić: *Nejednakosti*, DMS, Beograd, 2003.
[4] R. Malčeski: *Elementarni algebarski i analitički neravenstva*, Armaganka, Skopje, 2019.
[5] D. Nomirovskij: Neravenstvo Karamati, *Kvant*, 2003.

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 26–36

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Logaritamska konveksnost gama funkcije

Zehra Nurkanović[1], Muhamed Šmigalović[2]

[1] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla*
[2] *Osnovna škola Rainci Gornji*

Sažetak: U ovom radu govorimo o gama funkciji, njenim osobinama, logaritamskoj konveksnosti i njenoj primjeni u raznim oblastima matematike. Na kraju dajemo jedan dokaz Gaussove multiplikativne formule (Zadatak 1 koji je naveden u [2] na strani 333).

1. Uvod

Početkom 18. vijeka švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. − 1783.), njemački matematičar Christian Goldbach (1690. − 1764.) i mnogi drugi matematičari (vidjeti Slike 1 i 2, [6], [7]) pokušavali su proširiti domenu faktorijela na sve realne brojeve. U jednom pismu Goldbachu iz 1730. godine Euler je naveo funkciju $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiranu izrazom

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\, dt, \tag{1}$$

bez upotrebe njenog naziva i oznake $\Gamma(x)$.
Naziv "**gama funkcija**" i oznaku $\mathbf{\Gamma}(x)$ za funkciju (1) uveo je tek 1814. godine francuski matematičar Adrien-Marie Legendre (1752. − 1833.) (vidjeti Sliku 3 i [8]). Smjenom $u = -lnt$, Legendre [3], gama funkciju datu sa (1) svodi na

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{2}$$

Gama funkcija (vidjeti Sliku 4) može se definisati preko beskonačnog proizvoda

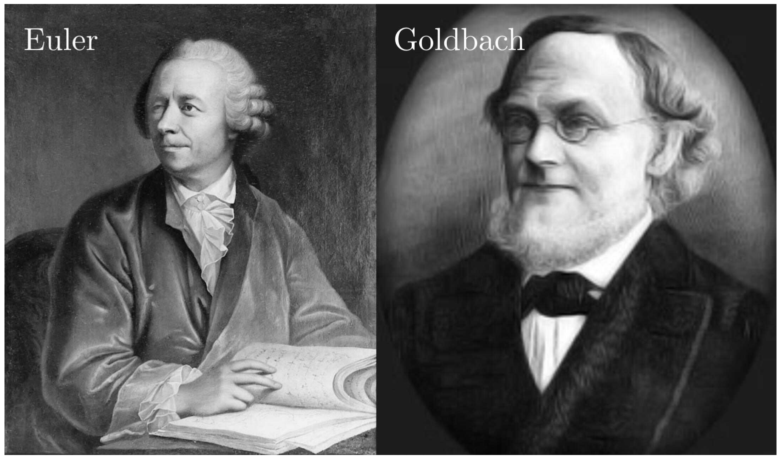
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^x}{1 + \frac{x}{k}}, \quad x \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{3}$$

ili preko limesa (Gaussov pristup definiranju gama funkcije):

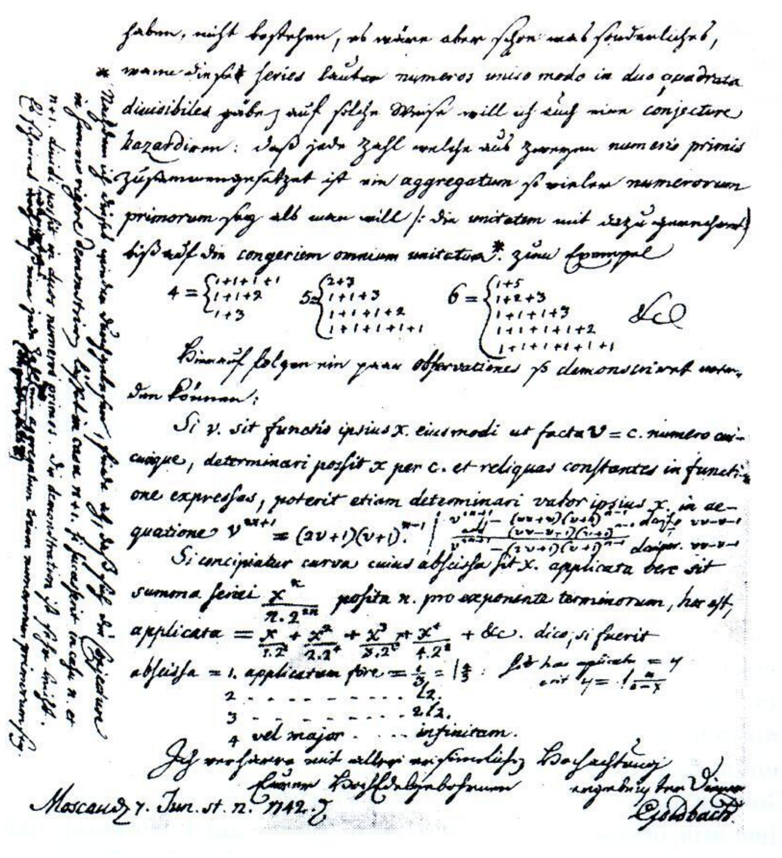
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \ldots. \tag{4}$$

Ove tri prikaza gama funkcije, (2), (3) i (4), su međusobno ekvivalentna (vidjeti [1]).

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: gama funkcija, analitička funkcija, cijela funkcija, konveksnost
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

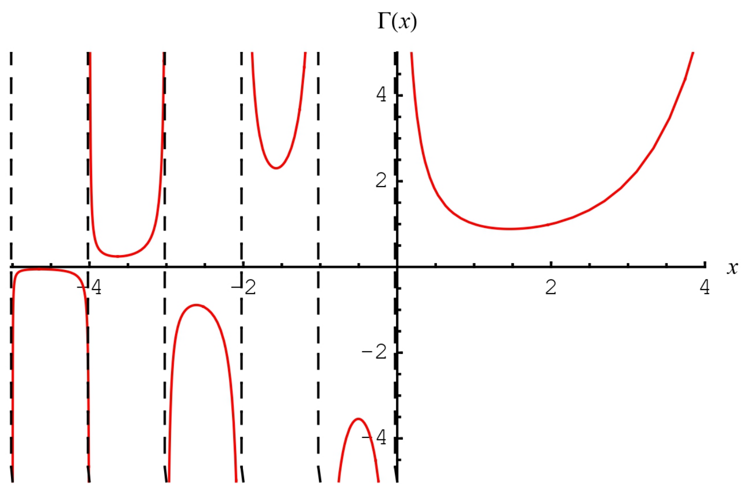


Slika 1: Leonhard Euler (1707. – 1783.) i Christian Goldbach (1690. – 1764.)



Slika 2: Pismo Goldbacha Euleru od 07.06.1742. godine

Slika 3: Adrien Marie Legendre (1752. – 1833.)



Slika 4: Graf gama funkcije proširen na negativne realne brojeve

U [1] je dat uvod u Gama funkciju. Navedene su i dokazane osnovne osobine Gama funkcije i dat je njen prikaz pomoću beskonačnog proizvoda za realne vrijednosti.
Navedimo sada neke od tih osobina:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(x+1\right)=x\Gamma\left(x\right), \\
&\Gamma\left(n+1\right)=n! && \left(n=0,1,2,\ldots\right), \\
&\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(1-x\right)=\tfrac{\pi}{\sin\pi x} && \left(x\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots\right), \\
&\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}, \\
&\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n}} && \left(n=0,1,2,\ldots\right), \\
&\Gamma\left(-n+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{(-1)^n n!2^{2n}\sqrt{\pi}}{(2n)!} && \left(n=0,1,2,\ldots\right).
\end{aligned}$$

Pojam faktorijela

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

za $n \in \mathbb{N}$, se sada proširuje na proizvoljne realne brojeve sa

$$x! = \Gamma(x+1).$$

Tako je za

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbb{Z}, \quad x > 0, & & x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot x, \\ x \in \mathbb{Z}, \quad x < 0, & & x! = \pm\infty, \\ x = 0, & & 0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1, \\ x = \frac{1}{2}, & & \left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623, \\ x = -\frac{1}{2}, & & \left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1.7725, \\ x = -\frac{3}{2}, & & \left(-\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.5449. \end{array}$$

Gama funkcija ima veliku primjenu u teoriji brojeva (u proučavanju prostih brojeva), u vjerovatnoći (funkcija gustoće poznate gama distribucije), integralnom računu, kod računanja Laplaceovih transformacija (vidjeti [4], str. 14 i 15) i drugim oblastima. Npr. integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^8} dt$$

se smjenom $t = 2x^8$ svodi na integral

$$I = \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{2}}{16} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \approx 0.156\,66.$$

Na kraju ovog rada dokazat ćemo da vrijedi sljedeća jednakost

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = m^{-mz+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \Gamma(mz), \quad m \in \mathbb{N},\ z \in D, \tag{5}$$

gdje je

$$D = \mathbb{C} \diagdown \left\{ -\frac{n}{m} + k : n = 0, 1, ..., m-1; \quad k = 0, -1, -2, ... \right\}$$

(Zadatak 1 koji je naveden u [2] na strani 333).

U tu svrhu navedimo sljedeće dvije definicije i dva teorema bez dokaza.

Definicija 1.1. *([2], str. 38) Neka je $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Za funkcija $f(z)$ kažemo da je* ***analitička funkcija*** *na $\mathbf{\Omega}$ ako je $f'(z)$ neprekidna funkcija na $\mathbf{\Omega}$.*

U upotrebi su i nazivi *regularna funkcija i holomorfna funkcija.*

Definicija 1.2. *Funkcija f koja je* ***regularna u svim tačkama*** *kompleksne ravni $\mathbb{C}$ zove se* ***cijela funkcija****.*

Teorem 1.3. ***(Princip jedinstvenosti ili jednakosti za analitičke funkcija)*** *Neka su f i g analitičke funkcije na području $\mathbf{\Omega}$. Ako se funkcije f i g podudaraju na beskonačnom skupu, koji u području $\mathbf{\Omega}$ ima tačku gomilanja, onda se one podudaraju svuda na $\mathbf{\Omega}$, tj. $f = g$.*

Definicija tačke gomilanja i dokaz Teorema 1.3 može se naći u [2] na str. 58 i str. 95 (Teorem 31).

Teorem 1.4. *Neka je $\mathbf{\Omega}$ područje u $\mathbb{C}$ i $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz analitičkih funkcija definisanih na $\mathbf{\Omega}$, od kojih se nijedna ne poništava identički na $\mathbf{\Omega}$. Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(z) - 1|$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbf{\Omega}$ i neka je $f = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$. Tada je*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n}, \tag{6}$$

pri čemu red s desne strane formule (6) *konvergira lokalno uniformno na $\mathbf{\Omega} \backslash N(f)$.*

Sa $N(f)$ označavamo nule analitičke funkcije f na Ω. Dokaz Teorema 1.4 može se vidjeti u [2] str. 298 kao i u [5] str. 10.

2. Prikaz gama funkcije pomoću beskonačnog proizvoda

Neka je sada $z \in \mathbb{C}$. Tada za gama funkciju

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad z \in \mathbb{C} \diagdown \{0, -1, -2, ...\}, \quad t > 0, \tag{7}$$

i $n \in \mathbb{N}$, vrijede osobine (vidjeti [1] i [2], 165-170):

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!, \tag{8}$$

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad (z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}),$$

kao i da je funkcija $f(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}$ cijela te da su joj jedine nule $0, -1, -2, \ldots$ (i to jednostruke). Vrijedi također

$$\lim_{n \to +\infty} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} = e^{Cz}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

gdje je

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \tag{9}$$

i naziva se *Eulerova konstanta.* Ona je s tačnošću do šesnaeste decimale jednaka

$$C = 0.5772156649015325.$$

Vjeruje se da je taj broj transcendentan ali do danas nije dokazano ni da C nije racionalan broj.

Navedimo još jedan teorem koji je dokazan u [2] (Teorem 92 na str. 331).

Teorem 2.1. *Za svako $z \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \tag{10}$$

i pri tome beskonačan proizvod konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

3. Logaritamska konveksnost gama funkcije

Iz Teorema 2.1 vidimo da funkcija

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}h,$$

gdje je $h = \prod_{k=1}^{+\infty} h_k$, $h_k = \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$, zadovoljava uvjete Teorema 1.4. Dalje je

$$\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)' = \left(ze^{Cz}h\right)' = \left(e^{Cz}+ze^{Cz}C\right)h + ze^{Cz}h',$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = \frac{e^{Cz}h+ze^{Cz}Ch+ze^{Cz}h'}{ze^{Cz}h} = \frac{1}{z}+C+\frac{h'}{h} \overset{(6)}{=} \frac{1}{z}+C+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k'}{h_k},$$

odnosno, koristeći da je

$$\frac{h_k'}{h_k} = \frac{\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right)'}{\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{-\frac{z}{k^2}}{1+\frac{z}{k}} = -\frac{z}{k(z+k)},$$

dobijamo

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = -C-\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z}{k(z+k)}. \tag{11}$$

Kako je $\left(-C-\frac{1}{z}-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{z}{k(z+k)}\right)' = \frac{1}{z^2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(z+k)^2}$, to je

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z+k)^2}, \quad z\in\mathbb{C}\diagdown\{0,-1,-2,...\}. \tag{12}$$

Na osnovu formule (12) možemo izvesti još jedno značajno svojstvo gama funkcije koje je vezano za pojam konveksnosti. Da bismo to uradili krenut ćemo od definicije konveksne funkcije. Za funkciju $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, kažemo da je *konveksna* na intervalu $\langle a,b\rangle$, ako vrijedi

$$\varphi((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)\varphi(x)+t\varphi(y), \quad x,y\in\langle a,b\rangle, \quad t\in[0,1]. \tag{13}$$

Funkcija φ je *strogo konveksna*, ako u nejednakosti (13) vrijedi stroga nejednakost za proizvoljne $x,y\in\langle a,b\rangle$, $x\neq y$ i $t\in\langle 0,1\rangle$. Iz realne analize znamo da je neprekidno diferencijalna funkcija $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ konveksna, akko je funkcija φ' rastuća na intervalu $\langle a,b\rangle$, a strogo konveksna akko je φ' strogo rastuća.

Ako je funkcija $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ svuda strogo pozitivna, onda možemo definirati funkciju $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ formulom

$$\varphi(x) = \ln f(x), \quad x\in\langle a,b\rangle.$$

Ukoliko je funkcija φ konveksna (strogo konveksna), onda za funkciju f kažemo da je *logaritamski konveksna* (*logaritamski strogo konveksna*). Svaka logaritamski (strogo) konveksna funkcija je ujedno i (strogo) konveksna, ali obrat ne vrijedi.

Funkcija Γ je strogo pozitivna na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$. Za $\varphi(x)=\ln\Gamma(x)$ imamo da je $\varphi'(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, pa iz (12) slijedi:

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2} > 0, \quad 0<x<+\infty.$$

Prema tome, funkcija φ' je strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, a to znači da je funkcija φ strogo konveksna, odnosno funkcija Γ je logaritamski strogo konveksna na $\langle 0, +\infty \rangle$. Logaritamska konveksnost zajedno s funkcionalnom jednadžbom

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1,$$

potpuno karakteriše gama funkciju. Naime, vrijedi sljedeći važan teorem.

Teorem 3.1. ***(Bohr-Mollerup)*** *Neka je $f : \langle 0, +\infty \rangle \to \langle 0, +\infty \rangle$ funkcija sa svojstvima:*
(a) $f(1) = 1$;
(b) $f(x+1) = xf(x), \quad x > 0$;
(c) *funkcija f je logaritamski konveksna na $\langle 0, +\infty \rangle$.*

Tada je $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Dokaz: Na osnovu (b) imamo

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f(x+n-1+1) = (x+n-1) f(x+n-1) \\ &= (x+n-1) \cdot (x+n-2) f(x+n-2), \end{aligned}$$

odnosno

$$f(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1) \cdot xf(x), \quad x > 0, \ n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

pa kako ista jednakost vrijedi i za gama funkciju, dovoljno je dokazati da je $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, 1]$. Stavimo

$$\psi(x) = \ln f(x), \quad x > 0,$$

i fiksirajmo $x \in \langle 0, 1]$. Tada, na osnovu pretpostavke (c) imamo nejednakost

$$\psi((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)\psi(u) + t\psi(v), \quad 0 < u < v, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{15}$$

Odavde za $u = n \in \mathbb{N}$, $v = x + n + 1$ i $t = \dfrac{1}{x+1}$, dobijamo

$$\psi(n+1) \leqslant \frac{x}{x+1}\psi(n) + \frac{1}{x+1}\psi(x+n+1),$$

odakle slijedi

$$\psi(x+n+1) \geqslant (x+1)\psi(n+1) - x\psi(n).$$

Iz pretpostavke (a) i (14) slijedi $f(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, pa nalazimo da je

$$\psi(x+n+1) \geqslant (x+1)\ln n! - x\ln(n-1)! = \ln n! + x\ln n.$$

Funkcija $t \mapsto e^t$ je monotono rastuća na $\mathbb{R}$, pa iz gornje nejednakosti slijedi

$$e^{\psi(x+n+1)} \geqslant e^{\ln n! + x\ln n},$$

odnosno

$$f(x+n+1) \geqslant n^x n!.$$

Odavde i iz (14) (ako stavimo $n+1$ umjesto n) dobivamo nejednakost

$$f(x) \geqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

pa na osnovu jednakosti

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

imamo

$$f(x) \geqslant \Gamma_n(x), \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Ako u (15) stavimo $u = n \in \mathbb{N}$, $v = n+1$, $t = x$, onda dobivamo

$$\psi(x+n) \leqslant (1-x)\psi(n) + x\psi(n+1).$$

Vrijedi $f(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\psi(x+n) \leqslant (1-x)\ln(n-1)! + x\ln n! = \ln(n-1)! + x\ln n,$$

odakle je

$$f(x+n) \leqslant n^x(n-1)!, \quad f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Odavde slijedi

$$f(x) \leqslant \Gamma_n(x)\cdot\frac{x+n}{n}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Dakle, vrijedi

$$\Gamma_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma_n(x)\cdot\frac{x+n}{n}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

pa iz

$$\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x), \quad x > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{x+n}{n} = 1$$

slijedi $f(x) = \Gamma(x)$, $x \in (0,1]$. $\square$

4. Dokaz jednakosti (5)

Vratimo se problemu za koji smo rekli na samom početku da ćemo se njime pozabaviti. Dakle, sada ćemo dokazati formulu (5).

Dokaz: Posmatrajmo funkciju

$$\varphi(z) = \Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)\cdot(\Gamma(mz))^{-1}, \quad z \in D.$$

Odavde imamo

$$\ln\varphi(z) = \ln\Gamma(z) + \ln\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right) + \cdots + \ln\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right) - \ln\Gamma(mz),$$

odnosno

$$\frac{d}{dz}[\ln\varphi(z)] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)} + \cdots + \frac{\Gamma'\left(z+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)} - \frac{\Gamma'(mz)}{\Gamma(mz)}\cdot m.$$

Sada na osnovu jednakosti (12) vrijedi

$$\frac{\Gamma'(mz)}{\Gamma(mz)}\cdot m=\frac{\frac{d}{dz}\Gamma(mz)}{\Gamma(mz)}\cdot m=\left|\begin{array}{c} mz=t \\ mdz=dt \\ \frac{dt}{dz}=m \end{array}\right|=\frac{\frac{d}{dt}\Gamma(t)\cdot m}{\Gamma(t)}\cdot m=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}\cdot m^2$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m^2}{(mz+k)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{k}{m}\right)^2}.$$

Slijedi da je

$$\frac{d^2}{dz^2}[\ln\varphi(z)]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{1}{m}+k\right)^2}+\cdots+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{m-1}{m}+k\right)^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{k}{m}\right)^2}.$$

Neka je

$$f(z)=\frac{d^2}{dz^2}[\ln\varphi(z)],\quad z\in D.$$

Tada za proizvoljan realan broj $x>0$ vrijedi

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{m}+k\right)^2}+\cdots+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{m-1}{m}+k\right)^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{k}{m}\right)^2}. \tag{18}$$

Uočimo da zadnju sumu u (18), tj. sumu $\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{l}{m}\right)^2}$, možemo napisati kao sumu m sabiraka A_n^k datih u Tabeli 1. Kako je to upravo zbir prvih m suma u (18) slijedi da je $f(x)=0$ za $x>0$.
Zaista, ako sve članove te sume napišemo u Tabelu 1, vidimo da je suma članova u koloni K_i jednaka $(i+1)$-voj sumi u (18) za $i=0,\ldots m-1$.

	Kolona K_0	Kolona K_1	$\cdots$	Kolona K_{m-1}
$l=0,...,m-1$	$\frac{1}{(x+0)^2}$	$\frac{1}{\left(x+0+\frac{1}{m}\right)^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\left(x+0+\frac{m-1}{m}\right)^2}$
$l=m,...,2m-1$	$\frac{1}{(x+1)^2}$	$\frac{1}{\left(x+1+\frac{1}{m}\right)^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\left(x+1+\frac{m-1}{m}\right)^2}$
$l=2m,...,3m-1$	$\frac{1}{(x+2)^2}$	$\frac{1}{\left(x+2+\frac{1}{m}\right)^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\left(x+2+\frac{m-1}{m}\right)^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l=km,...,km-1$	$\frac{1}{(x+k)^2}$	$\frac{1}{\left(x+k+\frac{1}{m}\right)^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\left(x+k+\frac{m-1}{m}\right)^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Suma kolona $K_i=A_i^k$, $i=0,...,m-1$	$A_0^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$	$A_1^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(x+k+\frac{1}{m}\right)^2}$	$\cdots$	$A_{m-1}^k=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\left(x+k+\frac{m-1}{m}\right)^2}$

Tabela 1

Dakle,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{k}{m}\right)^2} = \sum_{n=0}^{m-1} A_n^k = A_0^k + A_1^k + \cdots + A_{m-1}^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{m}+k\right)^2} + \cdots + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{m-1}{m}+k\right)^2},$$

što je i trebalo pokazati. Kako je $f(x) = 0$, to je i

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln \varphi(x)\right] = 0,$$

pa postoje konstante A, B takve da vrijedi

$$\frac{d}{dx}\left[\ln \varphi(x)\right] = A, \qquad \ln \varphi(x) = Ax + B.$$

Odavde je

$$\varphi(x) = a^x b,$$

gdje je $a = e^A$, $b = e^B$. Funkcije φ i $a^z b$ su analitičke na D, pa kako su identične na $\mathbb{R}$ za $x > 0$, na osnovu Teorema 1.3 (teorem o jedinstvenosti analitičke funkcije) imamo

$$\varphi(z) = a^z b,$$

odakle za $m \in \mathbb{N}$ i $z \in D$ slijedi

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = a^z b \cdot \Gamma(mz). \tag{19}$$

Još je potrebno odrediti konstante a i b. Koristit ćemo jednakost dokazanu u Primjeru 3 na str. 173 u [2]:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Sada na osnovu jednakosti (19), za $z = 1$, imamo:

$$ab\Gamma(m) = \Gamma(1) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{m}\right) = 1 \cdot \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \frac{2}{m}\Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \cdots \frac{m-1}{m}\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)$$
$$= \frac{(m-1)!}{m^{m-1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

a prema (20) slijedi

$$ab\Gamma(m) = \frac{(m-1)!}{m^{m-1}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.$$

S druge strane imamo da je

$$ab\Gamma(m) \overset{(8)}{=} ab(m-1)!.$$

Iz posljednje dvije nejednakosti dobijamo da je

$$ab = m^{-m+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{21}$$

Ako u (19) stavimo da je $z = 2$, dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
a^2 b\Gamma(2m) &= \Gamma(2) \cdot \Gamma\left(2 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(2 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \Gamma(1+1) \cdot \Gamma\left(1 + 1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 + 1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m+2}{m} \cdots \frac{2m-1}{m} \cdot \Gamma(1) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{(m+1) \cdots (2m-1)}{m^{m-1}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdots \frac{m-1}{m} \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{m(m+1) \cdots (2m-1)}{m^m} \cdot \frac{1 \cdots (m-1)}{m^{m-1}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),
\end{aligned}$$

odnosno

$$a^2 b\Gamma(2m) = \frac{(2m-1)!}{m^{2m-1}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Kako je

$$a^2 b\Gamma(2m) = a^2 b(2m-1)!,$$

to zadnje dvije jednakosti daju

$$a^2 b = m^{-2m+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{22}$$

Sada iz (21) i (22) slijedi

$$a = m^{-m}, \qquad b = m^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}},$$

pa je time dokazana jednakost (5). □

Literatura

[1] S. Kalabušić i M. Malenica: *Uvod u Gama funkciju*, Zbornik radova PMF Svezak Matematika, Vol 3, PMF Tuzla, Tuzla, 2007., 87-102.

[2] H. Kraljević, S. Kurepa: *Matematička ananliza 4/1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[3] A. M. Legegdre: *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France*, Pariz, 1809.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Laplaceova transformacija i primjena*, PrintCom, Tuzla, 2010.

[5] M. Šmigalović: *Cijele funkcije (Diplomski rad)*, PMF Tuzla, Tuzla, 2007.

[6] https://www.google.com/search?q=euler+and+Goldbach&tbm=isch&ved=2ahUKEwiFlPD3hvP9AhVCP-wKHfvoDNgQ2-cCegQIABAA&oq=euler+and+Goldbach&gs_lcp=CgNpbWcQA1AAWABgvgZoAHAAeACAAV2IAV2SAQExmAEAgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=eMwcZIX4J8L-sAf70bPADQ&bih=568&biw=1366&client=avast-a-2

[7] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Letter_Goldbach-Euler.jpg

[8] https://www.google.com/search?q=Adrien+Marie+Legegendre&tbm=isch&ved=2ahUKEwjnuc_rh_P9AhVExKQKHfNPBVIQ2-cCegQIABAA&oq=Adrien+Marie+Legegendre&gs_lcp=CgNpbWcQA1D1LljZhgFg-okBaABwAHgAgAGLAYgByQqSAQQxMS4zmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=a80cZKfYF8SIkwXzn5WQBQ&bih=568&biw=1366&client=avast-a-2&hl=en-GB#imgrc=fpOhgVY5XTXVHM

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 37–44

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Približne konstrukcije broja π

Šejla Jusić

Tehnički fakultet Bihać, Univerzitet u Bihaću

Sažetak: U ovom radu je prikazana teorijska osnova broja π, s naglaskom na njegovoj iracionalnosti i transcedentnosti. Prikazane su i približne konstrukcije broja π prilikom kojih se konstruišu odsječci čija se dužina poklapa s brojem π do određene decimale.

1. Uvod

Broj π, poznat još kao *Arhimedova* ili *Ludolfova* konstanta, jedna je od najpoznatijih matematičkih konstanti koja ima značajnu ulogu u geometriji.

Definicija 1.1. *Broj π je omjer obima kruga i dužine njegovog prečnika.*

Oznaku za ovu konstantu uveo je 1706. godine britanski matematičar William Jones, a dolazi od grčkog slova π kao prvog slova grčke riječi za obim $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$. Oznaku je popularizirao švicarski matematičar Leonard Euler u svojima djelima *Mechanica* (1736) i *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) [7]. Kako se broj π pojavljuje u mnogim računima vezanim za krugove, očekivano je veliko interesovanje koje od davnina vlada za taj broj. Ljudska radoznalost je uticala na želju za određivanjem što tačnije vrijednosti broja π. Prvi pokušaj izračunavanja se pojavio još u Egiptu prilikom rješavanja problema kvadrature kruga. Tako je Ahmes izračunao da omjer kruga i dužine njegovog prečnika iznosi $3,16049$, a Arhimed je 280. god. pr. n. e. upisivanjem pravilnih mnogouglova unutar i izvan jedinične kružnice dobio donju i gornju granicu broja π. Najprije je konstruisao pravilni šestougao, pa je u sljedećem koraku udvostručio broj stranica na 12, pa 24, 48 i sve do 96. Na taj način je svakim korakom dobijao sve preciznije rezultate i došao je do zaključka da je

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}, \quad \text{tj.} \quad 3,1408 < \pi < 3,1429.$$

Nedostatak ovog metoda je u tome što se za $n = 96$ dobije tačnost na samo dvije decimale, a tačnost na šest decimala se dobije tek za $n = 10000$. Otkrivanjem novih grana matematike, otkrivali su se novi i bolji načini izračuna broja π. Tako je francuski matematičar Viète 1593. godine došao do sljedećeg izraza za računanje broja π

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots .$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: broj π, približne konstrukcije
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: novembar, 2022.

Ludolph van Ceulen izračunao je vrijednost broja π bez tehničkih pomagala na 35 decimala. Godine 1706. je John Machin izračunao prvih 100 decimala koristeći formulu

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Z. Dachse je 1844. godine izračunao prvih 200 decimala. Godine 1735. Euler je došao do sljedeće formule koja omogućava računanje broja π

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots .$$

Kada su se otkrila i počela razvijati računala broj tačno izračunatih decimala je naglo porastao. Tako je danas poznato preko 50 trilijuna decimala.

1761. godine je J. H. Lambert pokazao iracionalnost broja π. To znači da je decimalan prikaz broja π beskonačan i neperiodičan. Međutim, broj π se na više načina može prikazati pomoću beskonačnog verižnog razlomka [8]. Tako vrijedi

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}, \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \ddots}}}}}.$$

F. von Lindemann je 1882. godine pokazao transcedentnost broja π. To znači da se broj π ne može dobiti kao rješenje algebarske jednačine oblika $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ sa cjelobrojnim koeficijentima $a_n \neq 0$. Dokaz transcedentnosti broja π predstavlja jedan od značajnijih otkrića 19. stoljeća i konačno pokazuje da broj π nije konstruktibilan.

2. Približne konstrukcije broja π

Definicija 2.1. *Kažemo da je realan broj b* konstruktibilan *ako je moguće lenjirom i šestarom u konačno mnogo koraka konstruisati odsječak dužine b.*

Bitno je napomenuti da se lenjir koristi isključivo kao instrument pomoću kojeg se može konstruisati prava linija, ali kojim se ne mjere dužine.

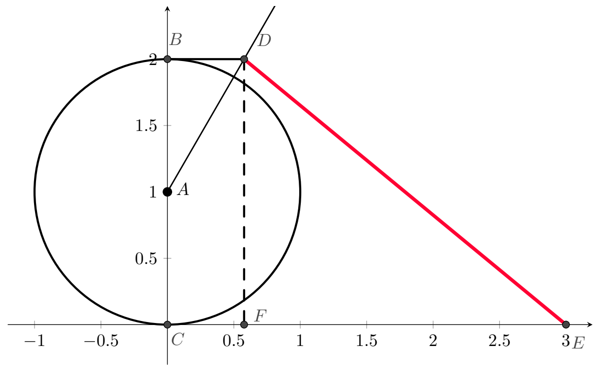
Teorem 2.2. *Svaki konstruktibilni broj je algebarski.*

Drugim riječima, svaki konstruktibilan broj je nula nekog polinoma s racionalnim koeficijentima. Dokaz ovog teorema se može pronaći u [2].

Kako je π transcendentan broj, to on nije algebarski, pa nije ni konstruktibilan. Međutim, postoje približne konstrukcije broja π, prilikom kojih se konstruišu odsječci čija se dužina poklapa s brojem π do određene decimale.

2.1. Konstrukcija Kochańskog

Poljski matematičar Adam Kochański (1631 − 1700) je dao konstruktivnu metodu za približnu konstrukciju broja π sa četiri tačne decimale. Kao što je prikazano u [1], on se koristio činjenicom da je $\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,14533$. Konstruiše se kružnica s centrom u tački A polupečnika 1, te polupravа Ap takva



Slika 1: Konstrukcija Kochańskog

da sa $\overline{AB}$ zaklapa ugao od 30°. Odredi se tačka D kao presjek poluprave Ap i prave koja prolazi tačkom B a paralelna je s Ox–osom. Vrijedi

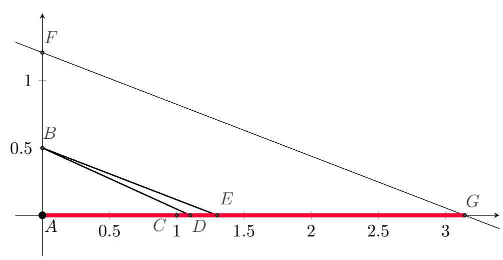
$$\tan 30^\circ = \frac{|BD|}{|AB|} \quad\Longrightarrow\quad |BD| = |AB| \cdot \tan 30^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Neka je E tačka na pozitivnom dijelu Ox–ose koja je od tačke C udaljena za 3 mjerne jedinice. Povucimo normalu iz tačke D na osu x, te njeno podnožje označimo sa F. Tada je $|DF| = |BC|$ i $|FE| = |EC| - |CF| = |EC| - |BD|$. Iz pravouglog trougla $\triangle DEF$ nalazimo dužinu duži $\overline{DE}$. Naime, vrijedi

$$|DE| = \sqrt{|CB|^2 + (|EC| - |BD|)^2} = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533.$$

2.2. Konstrukcija Spechta

Kao što je prikazano u [5], Specht je 1836. godine dao konstruktivnu metodu za približnu konstrukciju broja π, kojom se taj broj određuje na pet tačnih decimala.



Slika 2: Konstrukcija Spechta

Neka je $|AB| = 0,5$, $|AC| = 1$, $|CD| = 0,1$ i $|DE| = 0,2$. Stavi li se $|AF| = |BD|$, onda je

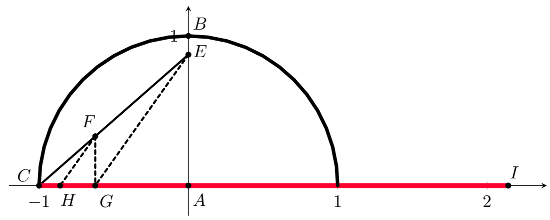
$$|AF| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{(|AC| + |CD|)^2 + |AB|^2} = \sqrt{1,1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{146}}{10}.$$

Neka je G tačka na Ox–osi takva da je $\overline{FG} || \overline{BE}$. Duž $\overline{AG}$ je približne dužine π. Naime, na osnovu Talesovog teorema (ili na osnovu sličnosti $\triangle AEB \sim \triangle AGF$) vrijedi

$$|AG| = \frac{|AF| \cdot |AE|}{|AB|} = \frac{13\sqrt{146}}{50} \approx 3,1415919.$$

2.3. Konstrukcija Geldera

Jacob de Gelder je 1849. godine predstavio približnu konstrukciju broja π, kojom se taj broj određuje na šest tačnih decimala, što je prikazano u [6].



Slika 3: Konstrukcija Geldera

Neka je $|AB| = |AC| = 1$, $|AE| = \frac{7}{8}$ i tačka F na duži $\overline{CE}$ tako da $|CF| = \frac{1}{2}$. Neka je G podnožje normale iz tačke F na Ox–osu. Primjenom Talesovog teorema (ili primjenom sličnosti $\triangle CGF \sim \triangle CAE$) vrijedi

$$|CG| = \frac{|CA| \cdot |CF|}{|CE|} = \frac{|CF|}{|CE|}. \tag{1}$$

Konstruiše se prava kroz tačku F paralelna s $\overline{EG}$. Neka je H presjek Ox–ose i te prave. Ponovnom primjenom Talesovog teorema (ili primjenom sličnosti $\triangle CHF \sim \triangle CGE$) je

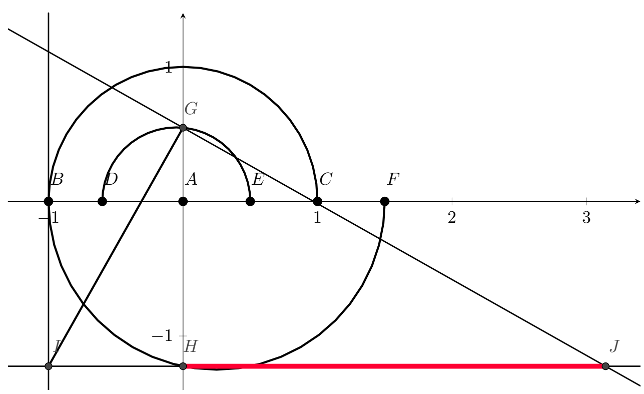
$$|CH| = \frac{|CG| \cdot |CF|}{|CE|}. \tag{2}$$

Uzimajući u obzir (2) i (1) dobijamo

$$|CH| = \frac{\frac{|CF|}{|CE|} \cdot |CF|}{|CE|} = \frac{|CF|^2}{|CE|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{16}{113}.$$

Neka je I tačka na Ox–osi takva da je $|HI| = 3$. Tada je $|CI| = |CH| + |HI| = \frac{16}{113} + 3 \approx 3.1415929$.

2.4. Konstrukcija Hobsona



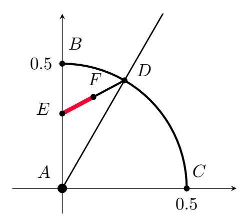
Slika 4: Konstrukcija Hobsona

Hobson je u [4] pokazao metodu približne konstrukcije broja π kojom se taj broj određuje na tri tačne decimale. Neka je $|AB| = |AC| = 1$, $|AD| = \frac{3}{5}$, $|AE| = \frac{1}{2}$ i $|AF| = \frac{3}{2}$. Konstruišu se dvije polukružnice. Jedna iznad Ox–ose s centrom u središtu duži $\overline{DE}$ prečnika dužine $|DE|$, a druga ispod Ox–ose sa centrom u središtu duži $\overline{BF}$ prečnika dužine $|BF|$. Neka je presječna tačka Oy–ose i prve polukružnice tačka G, a y–ose i druge polukružnice tačka H. Kako su $\measuredangle DGE$ i $\measuredangle BHF$ periferijski uglovi nad prečnikom kružnice, na osnovu Talesovog teorema su trouglovi $\triangle DGE$ i $\triangle BHF$ pravougli trouglovi. Konstruiše se prava p kroz tačku H paralelna s Ox–osom. Neka je I presječna tačka te prave s pravom $x = -1$. Kroz tačku G se konstruiše normala na $\overline{IG}$ i s J se označi presječna tačka te prave s pravom p. Dobija se duž $\overline{HJ}$ koja je približne dužine π. S obzirom da je trougao $\triangle GIJ$ pravougli i GH okomito na IJ, vrijedi da je $|GH|^2 = |IH| \cdot |HJ| = |HJ|$. Dalje je

$$|HJ| = (|GA| + |AH|)^2 = \left(\sqrt{|AD| \cdot |AE|} + \sqrt{|AB| \cdot |AF|}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{1 \cdot \frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} \approx 3,14164.$$

2.5. Konstrukcija Goodhue

Goodhue je 1974. godine dao konstruktivnu metodu za približno određivanje broja π kojom se taj broj određuje na pet tačnih decimala. Kao što je navedeno u [3], konstruiše se kružnica s centrom u koordinatnom ishodištu poluprečnika $\frac{1}{2}$ i s B i C se redom označe presječne tačke s y i Ox–osom. Konstruiše se poluprava Ap takva da sa pozitivnim smjerom Oy–ose zaklapa ugao od $30°$. Neka je D presječna tačka poluprave Ap i kružnice. Ako je $|AE| = \frac{3}{10}$ i ako je F središte duži $\overline{ED}$, onda je $\overline{EF}$ približne dužine $\pi - 3$.



Slika 5: Konstrukcija Goodhue

Primjenom Kosinusnog teorema na trougao $\triangle AED$ dobijamo

$$|ED|^2 = |EA|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |EA| \cdot |AD| \cdot \cos 30° = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{34 - 15\sqrt{3}}{100},$$

odnosno

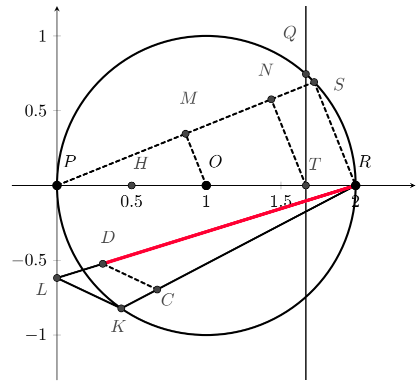
$$|ED| = \frac{\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}{10}.$$

Sada je

$$|EF| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}{20} \approx 0,1415913 \approx \pi - 3.$$

2.6. Konstrukcija Srinivase Ramanujana

Kao što je prikazano u [6], Srinivasa Ramanujan je došao do ideje za približnu konstrukciju broja $\sqrt{\pi}$. Neka je data kružnica s centrom u tački O poluprečnika $|PO| = |OR| = 1$ i neka je H središte duži $\overline{PO}$. Osim toga, neka je T tačka na Ox–osi takva da je $|TR| = \frac{1}{3}$, a p prava koja prolazi tačkom T i okomita na prečnik $\overline{PR}$ te neka je Q presječna tačka te prave i kružnice.



Slika 6: Konstrukcija Ramanujana

Vrijedi

$$|TQ| = \sqrt{|PT| \cdot |TR|} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Nacrta se tetiva $\overline{RS}$ takva da je $|RS| = |TQ|$. Trougao $\triangle PRS$ je, na osnovu Talesovog teorema, pravougli. Primjenom Pitagorinog teorema vrijedi

$$|PS| = \sqrt{|PR|^2 - |RS|^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Neka su N i M redom presječne tačke normala iz tačaka T i O na tetivu $\overline{SP}$. Dobijeni trouglovi $\triangle POM$, $\triangle PTN$ i $\triangle PRS$ su slični, odakle slijedi

$$|PM| : |PO| = |PS| : |PR| \quad \Longrightarrow \quad |PM| = \frac{|PO| \cdot |PS|}{|PR|} = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

i

$$|PN| : |PT| = |PS| : |PR| \quad \Longrightarrow \quad |PN| = \frac{|PT| \cdot |PS|}{|PR|} = \frac{5\sqrt{31}}{18}.$$

Dalje je

$$|MN| = |PN| - |PM| = \frac{5\sqrt{31}}{18} - \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{5\sqrt{31} - 3\sqrt{31}}{18} = \frac{\sqrt{31}}{9}.$$

Na donjoj polukružnici se odredi tačka K takva da je $|PK| = |PM|$ i tangenta t na datu kružnicu u tački P. Na tangenti t se označi tačka L takva da je $|PL| = |MN|$, a zatim se konstruišu duži $\overline{RL}$, $\overline{RK}$ i $\overline{LK}$. Primjenom Pitagorinog teorema na pravougle trouglove $\triangle PKR$ i $\triangle PLR$ dobijamo

$$|RK|^2 = |PR|^2 - |PK|^2 = |PR|^2 - |PM|^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2 = \frac{113}{36}$$

i

$$|RL|^2 = |PR|^2 + |PL|^2 = |PR|^2 + |MN|^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2 = \frac{355}{81}.$$

Na duži $\overline{RK}$ se odredi tačka C takva da je $|RC| = |RH|$, a onda se kroz tačku C konstruiše paralela u odnosu na duž $\overline{RL}$. Neka je presječna tačka te paralele i duži $\overline{RL}$ tačka D. Dužina duži $\overline{RD}$ je jednaka približnoj vrijednosti $\sqrt{\pi}$. Naime, zbog sličnosti trouglova $\triangle RKL$ i $\triangle RCD$ vrijedi

$$|RD| = \frac{|RL| \cdot |RC|}{|RK|} = \sqrt{\frac{355}{113}}.$$

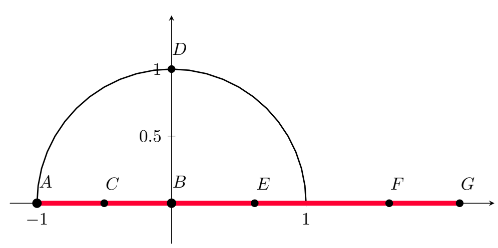
Kako je $|RD|^2 = \frac{355}{113} \approx 3.14159292$, to imamo da je dužina duži $\overline{RD}$ jednaka približnoj vrijednosti $\sqrt{\pi}$. Ako se može konstruisati $\sqrt{\pi}$ onda se može konstruisati i π.

2.7. Konstrukcija pomoću zlatnog presjeka

Pomoću zlatnog presjeka se može približno konstruisati broj π. Neka je $|AB| = |BD| = 1$ i C središte duži $\overline{AB}$. Neka je E tačka na Ox–osi takva da je $|CE| = |CD|$. Tada je $|AE| = \varphi$, gdje je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zlatni broj. Neka je F tačka na Ox–osi takva da je $|EF| = 1$ i tačka G takva da je $|FG| = \frac{1}{5}|AF|$. Kako je

$$|AG| = |AE| + 1 + \frac{1}{5}\left(1 + |AE|\right) = \frac{6}{5}(1 + |AE|) = \frac{6}{5}\left(1 + \varphi\right) \approx 3,1416,$$

to primjećujemo da se dužina duži $\overline{AG}$ podudara sa brojem π u tri decimale.



Slika 7: Približna konstrukcija broja π koristeći zlatni presjek

2.8. Konstrukcija Sokolowskog

Još jedna zanimljiva približna konstrukcija broja π je konstrukcija koju je dao Alex Sokolowski. Konstruiše se kružnica s centrom u koordinatnom ishodištu poluprečnika dužine 1, te četiri polukružnice poluprečnika dužine 1 ispod Ox–ose i četiri polukružnice poluprečnika dužine 1 s lijeve strane Oy–ose. Neka su tačke A, B, C, H i E označene kao na slici. Neka je D tačka na x–osi takva da je $|AD| = |AC|$. Tada je

$$|AD| = |AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Također je

$$|OD| = |OA| + |AD| = 3 + \sqrt{5}.$$

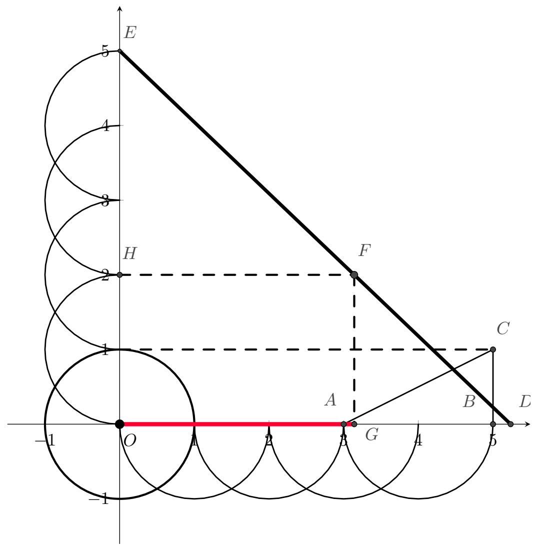
Neka je F tačka na duži $\overline{ED}$ takva da je tačka H njena ortogonalna projekcija na Oy–osu. Sa G označimo ortogonalnu projekciju tačke F na Ox–osu. Zbog sličnosti trouglova $\triangle ODE$ i $\triangle HFE$, te zbog činjenice da je $|HF| = |OG|$ vrijedi

$$|OD| : |OG| = |OE| : |HE|,$$

odnosno

$$|OG| = \frac{|OD| \cdot |HE|}{|OE|} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot 3}{5} \approx 3.14164.$$

Zaključujemo da se dužina duži $\overline{OG}$ podudara sa brojem π na tri decimale.



Slika 8: Konstrukcija Sokolowskog

Literatura

[1] B. Čekrlija: *Vremeplovom kroz matematiku*, GrafoMark, Banjaluka, 2001.

[2] R. Courant, H. Robbins: *What is Mathematics? : An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[3] J. P. Delahaye: π – *Die Story*, Birkhäuser Basel, 1999.

[4] E. W. Hobson: *Squaring the Circle: A History of the Problem*, Andesite Press, Cambridge, 2017.

[5] Z. Kurnik: *Geometrijske aproksimacije*, Matematičko fizički list, Izvanredni broj(J), 3–9

[6] A. Muminagić, J. Carstensen: *Kvadratura kruga*, Matka 25, br.100, 2016./2017.

[7] A. S. Posamentier, I. Lehmann: π*: A biography of the world's most mysterious number*, Prometheus Books, New York, 2004.

[8] T. Strmecki, B. Kovačić: *Matematičke konstante*, I. dio, Poučak 58, 73–77

EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 45–52

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Šah u škole!

Nermin Okičić

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla

Sažetak: U ovom radu se prezentuje igra šah kao odgojno-obrazovno sredstvo, ističući mnoge njegove prednosti i koristi koje ima i koje može dati u edukaciji. Specijalno, urađena je jedna takva prezentacija na primjeru geometrije na šahovskoj tabli.

1. Šah i škola

Šah je jednostavna igra za naučiti. Ona se može upražnjavati bez mnogo godina učenja i bez zahtjeva da se postane jak igrač. Sve što početnici moraju učiniti je naučiti pravila igre i osnovne strategije. Neki pretpostavljaju da oni moraju biti "pametni" da bi igrali ovu igru, ali to nije istina. Iako "veliki" šahisti imaju značajno visoku inteligenciju, mnoga istraživanja pokazuju da je praksa bolji prediktor šahovske vještine nego inteligencija.

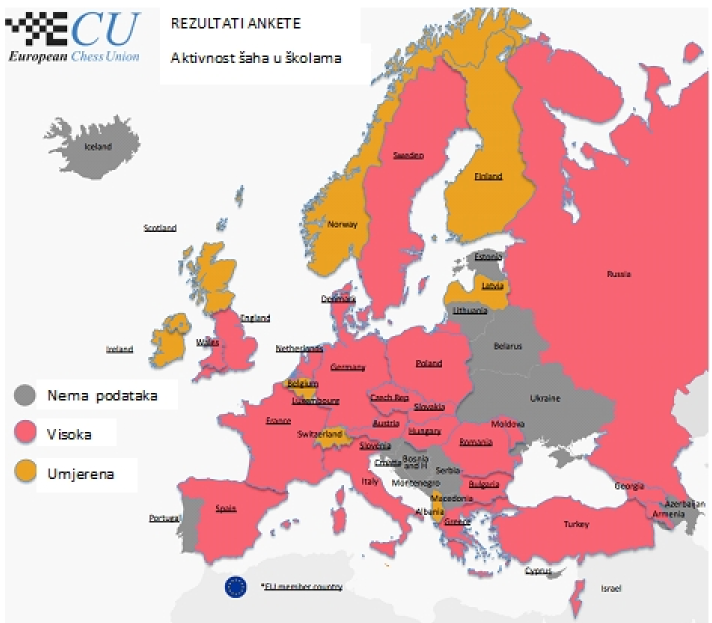
Šah je aktivnost koja daje beskrajan potencijal za um. Šah razvija mentalne aktivnosti koje se koriste tokom cijelog života. Možemo spomenuti neke od tih aktivnosti, kao što su rješavanje problema, kritičko razmišljanje, apstraktno zaključivanje, strateško planiranje, analiza, kreativnost, evaluacija i sinteza. Kao instrument za učiti rješavanje problema i apstraktnom rasuđivanju, šah možemo koristiti veoma učinkovito. Učenje kako riješiti neki problem je vjerovatno važnije od pronalaženja samog rješenja za određeni problem. Pomoću šaha učimo kako procijeniti kontekst, te u tom cilju razvijati osjećaj kako se usredotočiti na bitne faktore, a otklanjati nebitne. Šah je vrlo uticajan jer je samomotivirajući. Igra privlači ljude već oko 2000 godina i ciljevi napada i odbrane koji rezultiraju šah-mat, podstiču nas da prodremo u naše mentalne kapacitete ([4]). Međunarodni majstor i šahovski novinar Malcolm Pein u *Guardianu* je napisao: "Ne postoji ništa takvo što zahtijeva male troškove i malo organizacije, a uništava tolike barijere. Starost, spol, rasa, religija ... ne znače ništa u šahu. Svatko može uživati u ovoj igri."

Nekoliko studija je analiziralo kognitivne i obrazovne prednosti učenja šaha. *Parents* magazin je obradio rezultate iz škola New Yorka i Los Angelesa u kojima učenici koji su igrali šah postižu bolje ocjene iz jezika i matematike od onih koji ne igraju šah. Čak i doktorske disertacije su rađene na ovu temu i pokazuju da učenici koji su izabrali da igraju šah postižu bolje rezultate na psihološkim testovima, uključujući tu i poboljšano kritičko i kreativno mišljenje, od onih koji su izabrali aktivnosti kao što su rad s računarom, kreativno pisanje ili igranje kompjuterskih igara. Stručnjaci iz ove oblasti pokazuju i ističu kako igranje šaha može dati i druge koristi kod učenika, na primjer za poboljšanje vizualne memorije, pojačavanje pažnje i proširivanje sposobnosti rasuđivanja. Obrazovne i psihološke studije otkrivaju brojne pogodnosti za

Ciljna skupina: svi uzrasti
Ključne riječi: šah, geometrija, metrika
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

djecu koja igraju i uče šah. Te su prednosti vidljive kod kvocijenta inteligencije (IQ), vještine rješavanja problema, čitanja, pamćenja, jezičke i matematičke sposobnosti, kritičkog, kreativnog i originalnog razmišljanja, vještine odlučivanja, logike, koncentracije i sposobnosti da izazove i dostigne darovitost učenika bez obzira na njegove fizičke sposobnosti ili socioekonomske uslove sredine u kojoj živi.

2014. godine Evropska šahovska federacija (ECU) je pokrenula projekat za promociju i razvoj šaha kao dijela dječije edukacije i formirala "The Education Commission of the European Chess Union". Njena uloga je iznalaženje jakog i uspješnog programa u svakoj zemlji članici, razmjenom znanja i resursa, te poticanje međunarodne saradnje. Ona doprinosi i potpomaže javnu raspravu o ovome i lobiranju za šah. Kao svoju prvu zadaću komisija je 2015. sprovela anketu o količini aktivnosti šaha u školama u 54 članice šahovske federacije. Rezultati su prikazani na Slici 1 ([2]).



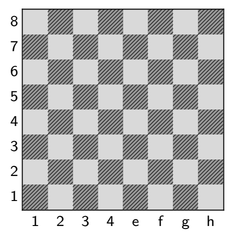
Slika 1: Zastupljenost šaha u školama.

2. Osnovno o šahu

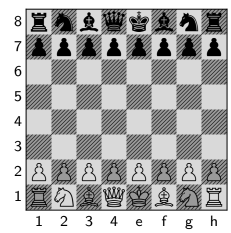
Šah je igra za dva igrača koja se igra na šahovskoj tabli, prema pravilima i zakonitostima koja su jedinstvena u cijelome svijetu, a propisala ih je Međunarodna šahovska federacija FIDE (eng. International Chess Federation, franc. Fédération Internationale des Échecs). Postoje mnoge teorije o porijeklu šaha. Glavni razlog za to je što su šahovske table i šahovske figure pronalažene čak u starim egipatskim i kineskim hramovima gdje su se očigledno koristile u pradavna vremena. Postojanje takvih artefakata ne znači obavezno i postojanje igre šaha kao takve pa je najraširenija, a i od FIDE (2009) priznata teorija, da je šah nastao u 6. vijeku u Indiji. Korijeni su mu u strateškoj igri koja se zvala *čaturanga*, što znači vojska. Tu vojsku su predstavljale figure koje su činile pješadiju, konjicu, slonove i bojna kola koja naravno danas možemo uporediti s pješacima, skakačima, lovcima i topovima u modernoj šahovskoj igri. U to doba igranje šaha se širi u Perziju i to pod nazivom *shatranj*. Arapskim osvajanjem Perzije šah postaje predmetom i njihova interesa. Šta više, šah se počinje proučavati iz matematičke i geometrijske perspektive, a sa time se pojavljuju i prvi teoretičari ove igre (Najstarija partija šaha koja je zabilježena, datirana je oko 900.-u godine, a odigrana je između jednog istoričara iz Bagdada i njegovog učenika.). Preko Bizanta i Mediterana, šah je u 9. vijeku stigao u zapadnu Evropu i u Rusiju a do 1000. godine šah se širi po cijeloj Evropi. Pravila igre su doživljavala određene transformacije. Tako je pravilo da polazni potez pješaka može biti jedno ili dva polja u naprijed uvedeno u Španiji u 13. vijeku. Današnja pravila svoju formu dobivaju krajem 15. vijeka. U početku to je bila igra koja se igrala na dvorovima i među plemićima, a od 18. vijeka počinje biti dostupna sve široj populaciji.

Rekviziti za šah su šahovska tabla i šahovske figure. Šahovska tabla je sastavljena od 64 polja, naizmjenično obojena (uobičajeno) crno-bijelo. Možemo reći i da je tabla sastavljena od osam vrsta i osam kolona. Kolone numerišemo slovima *a, b, c d, e, f, g* i *h*, s lijeva na desno. Vrste numerišemo brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8, odozdo prema gore. Time se dobija jedinstvena notacija svakog od 64 polja šahovske table (Slika 2 (a)).

Na šahovsku tablu postavljamo crne i bijele figure simetrično, kao što je pokazano na Slici 2 (b). U šahovskoj notaciji se koristimo i oznakama za figure: **K** - kralj, **Q** - dama (kraljica), **R** - top, **S** - skakač, **L** - Lovac. Za pješake ne koristimo nikakvu oznaku, osim polja na kome se nalazi.



(1) Šahovska tabla



(2) Figure na šahovskoj tabli

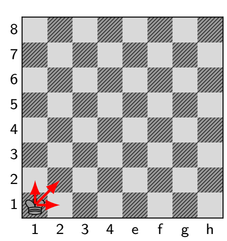
Slika 2: Šahovska tabla i šahovske figure.

Cilj igre je dovesti protivničkog kralja u poziciju da je napadnut, a da nema mogućnost pomjeranja. To je takozvana šah-mat pozicija, a ova terminologija dolazi iz perzijske fraze *Shah Mat* koja u prijevodu znači "kralj je mrtav". Igrač koji je doveden u šah-mat situaciju gubi partiju. Partija u kojoj ni jedan igrač nije doveden u šah-mat poziciju, takozvana remi pozicija, završava se remijem, to jest bez pobjednika.
Šahovska partija se neformalno dijeli u tri dijela: otvaranje, središnjica i završnica. Opet u neformalnom smislu, otvaranje predstavlja šahovsku teoriju, središnjica je mašta a završnica je matematika.

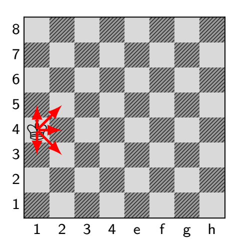
Odigrati prvi potez u šahu možemo na 20 različitih načina dakle, postoji 400 mogućih pozicija nakon odigravanja po jednog poteza svakog igrača. Nakon odigranih po dva poteza, mogućih pozicija je 72084, nakon tri odigrana poteza već je moguće preko 9 miliona pozicija. Prema izračunu *American foundation of chess* postoji oko 169 518 829 100 544 000 000 000 000 000 mogućih kombinacija za prvih 10 poteza u šahu.

3. Malo geometrije u šahu

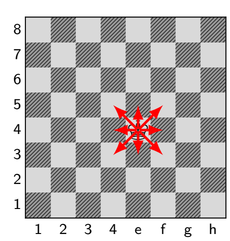
Kralj je najvažnija (ne obavezno i najjača) figura u šahu i koja najčešće igra najznačajniju ulogu u završnicama. Kralj se pomjera u jednom potezu jedno polje, u bilo kom od mogućih pravaca (Slika 3).



(1)



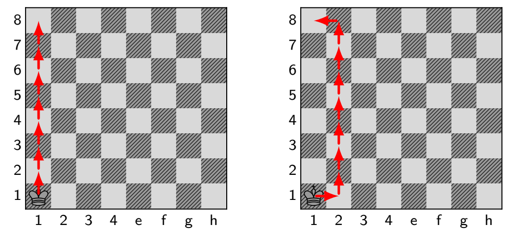
(2)



(3)

Slika 3: Kretanje kralja.

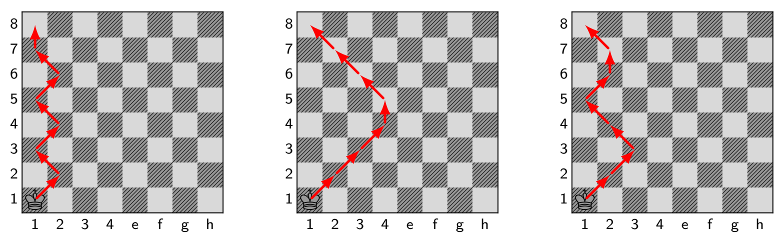
Ako se kralj nalazi na polju $a1$, šta je njegova najkraća putanja do polja $a8$? Doći do polja $a8$, rukovodeći se mogućnostima kretanja kralja, možemo doći na mnogo načina. Ne bismo bili u krivu, bar vizuelno, ako zamišljamo da je najkraća putanja prikazana na Slici 4 (a) jer je to očigledno "kraće" od putanje prikazane na istoj slici (b).



(1) (2)

Slika 4: Kretanje kralja od polja $a1$ do polja $a8$.

Međutim, šta možemo reći o "dužini" putanja prikazanih na Slici 5?

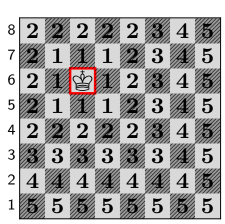


(1) (2) (3)

Slika 5: Još kretanja kralja od polja $a1$ do polja $a8$.

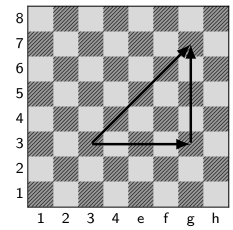
Treba primijetiti da u svim gornjim putanjama kralja od $a1$ do $a8$ (osim Slika 4 (b)), kralj napravi 7 poteza, te su u kontekstu "broja poteza" sve ove putanje "iste dužine". Ovo nas vodi ka jednoj ideji mjerenja rastojanja na šahovskoj tabli, gdje su objekti između kojih mjerimo rastojanje šahovska polja. Neka su x i y polja šahovske table (numerisana po kolonama slijeva udesno slovima od a do h i po vrstama odozdo ka gore brojevima od 1 do 8). Označimo udaljenost između ovih polja sa $d(x, y)$, a definišimo je sa

$$d(x, y) = \text{minimalan broj poteza da kralj sa polja } x \text{ dođe do polja } y.$$



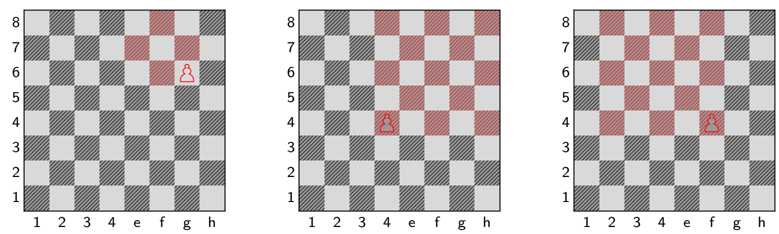
Na dijagramu lijevo su za primjer prikazane udaljenosti polja $c6$ od svih ostalih polja na tabli. Ovakvo mjerenje rastojanja između šahovskih polja ima za posljedicu da poznata nam Pitagorina teorema ovdje ne vrijedi.

Zaista, ako posmatramo polja $c3$, $g3$ i $g7$, onda imamo sljedeće: $d(c3, g3) = 4$, $d(g3, g7) = 4$, ali i $d(c3, g7) = 4$. Dakle, sva tri ova rastojanja su jednaka te očigledno nešto ne štima sa Pitagorinom teoremom (Kvadrat nad hipotenuzom to zna svako dijete jednak je zbiru kvadrata nad obje katete)! Ovo ipak ne treba da nas niti čudi niti zabrinjava. Ovakav dogovor o mjerenju rastojanja je sasvim u redu.



Šta više, ovakva metrika je veoma poznata i naziva se Chebyshevljeva metrika, a uobičajena je na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima i zadata je kao najveća vrijednost koordinatnih razlika za dvije tačke čije rastojanje mjerimo.

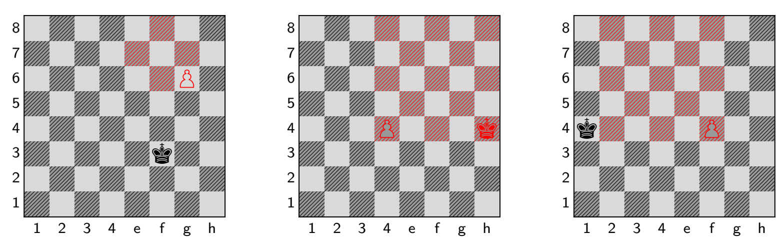
Ovo razmatranje o mjerenju rastojanja na šahovskoj tabli koristimo u šahovskim završnicama kada određujemo da li kralj može "stići" protivničkog pješaka. U pitanju je poznato šahovsko *pravilo kvadrata*. Markiramo polja na tabli koja čine kvadrat, određen sa brojem polja potrebnih za izlazak (promociju) pješaka na završni red (Slika 6).



(1) (2) (3)

Slika 6: Određivanje kvadrata u odnosu na pješaka.

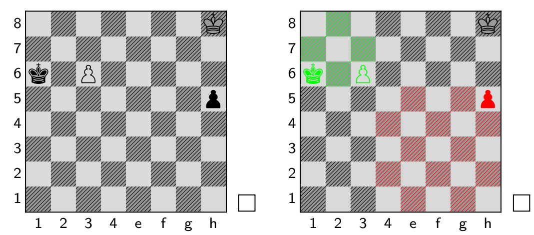
Pravilo kvadrata govori da kralj može stići protivničkog pješaka prije promocije ako i samo ako se nalazi unutar ovim pravilom određenog kvadrata. Da je to tako, treba samo primijetiti da je broj poteza kralja iz bilo kojeg polja markiranog kvadrata do polja promocije pješaka (udaljenost kralja od polja promocije) manji ili jednak broju poteza pješaka do njegove promocije (udaljenost polja na kome se nalazi pješak do polja za promociju)(Slika 7).



(1) Crni kralj ne "stiže". (2) Crni kralj "stiže". (3) Crni kralj ne "stiže".

Slika 7: Položaj kralja u odnosu na kvadrat.

Naravno da su ovakva geometrijska pravila od izuzetne važnosti za dobro igranje šaha. Ona nam prije svega daju kvalitetniji način razmišljanja, ali nam i olakšavaju "račun" u šahu (prisjetimo se da je završnica šahovske partije matematika). Posmatrajmo na Slici 8 (a) poznatu Retijevu kompoziciju,



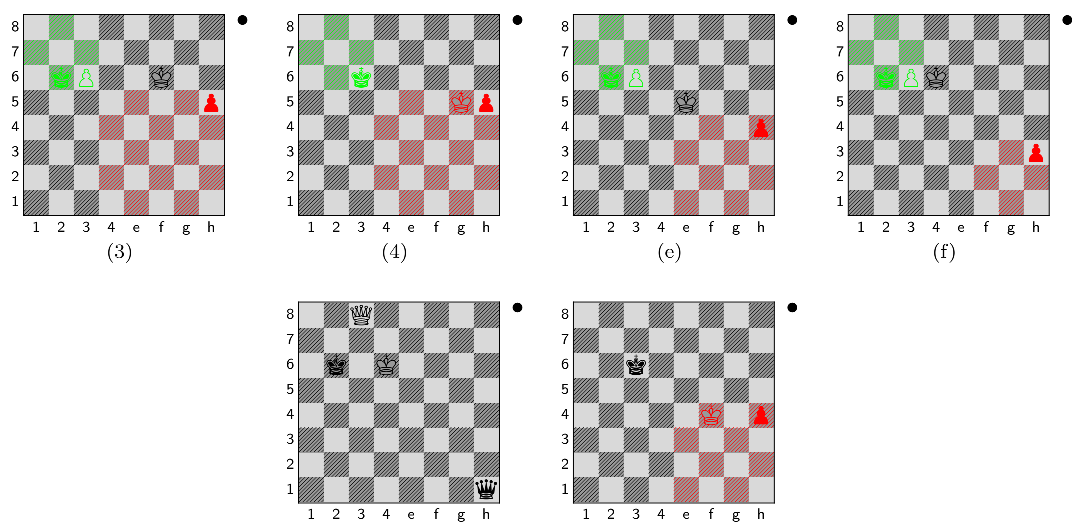
(1) (2)

Slika 8: Bijeli vuče i remizira.

Pravilo kvadrata nam govori da se crni kralj nalazi unutar kvadrata bijelog pješaka, ali bijeli kralj se nalazi van kvadrata crnog pješaka (Slika 8 (b)).

Prvi potez bijelog kralja ima za cilj kretanje ka kvadratu crnog pješaka, ali i ka bijelom pješaku. To se ostvaruje sa potezom 1.**Kg7**. Sada ćemo posmatrati dva nastavka.

I varijanata: Ako crni odigra 1**.... Kb6**. Tada bijeli igra 2.**Kf6** sa istim ciljem kao i u prvom potezu (Slika 9 (c)). Ako sada crni uzme bijelog pješaka na **c6** (2....**Kc6:**), bijeli igra 3.**Kg5** i osvaja crnog pješaka (Slika 9 (d)). Zato crni neće igrati 2....**Kc6** nego 2....**h4** sa čime se njegov kvadrat pomjera (Slika 9 (e)).



(3) (4) (e) (f)

(g) (h)

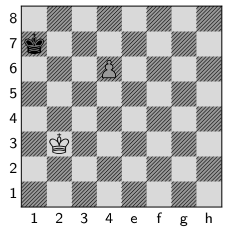
Slika 9: Rješenje Retijevog problema.

I treći potez bijeloga je određen istim ciljevima kao u prvom i drugom potezu, 3.**Ke5** (Slika 9 (e)). Ukoliko crni igra 3....**h3**, jasno je da bijeli kralj više ne može ući u kvadrat crnog pješaka, ali on tada kreće ka bijelom pješaku i igra 4.**Kd6** (Slika 9 (f)). Ako crni igra 4....**h2**, bijeli će igrati 5.**c7** i vidimo da oba igrača promoviraju pješake u isto vrijeme te se partija završava remijem (Slika 9 (g)). Ako crni u trećem potezu odigra 3....**Kc6:**, jasno je da tada bijeli igra 4.**Kf4** i time ulazi u kvadrat crnog pješaka (Slika 9 (h)).

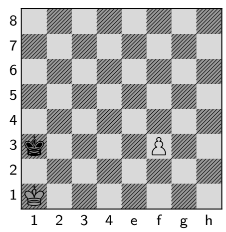
II varijanata: Crni je naravno mogao odmah u prvom potezu razmišljati da ide svojim pješakom u promociju, 1....**h4**. Tada bi bijeli nastavio istim razmišljanjem i odigrao bi 2.**Kf6**. Ako crni nastavi sa 2....**h3**, tada 3.**Ke7**, **h2**, 3.**c7**, **Kb7**. Bijeli tada igra 3.**Kd8** i oba pješaka se promoviraju u dame istovremeno.

U narednim problemima koji su dati za vježbu, treba razmišljati "po principu kvadrata", to jest kako odigrati, a da kralj dođe u kvadrat protivničkog pješaka.

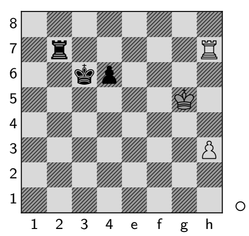
Zadatak 3.1. *Ako je bijeli na potezu dobija, ako je crni na potezu remizira!*



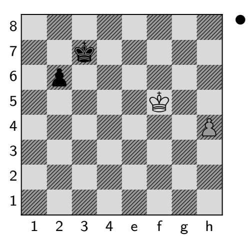
Zadatak 3.2. *Da li završetak ove partije zavisi od toga ko je prvi na potezu?*



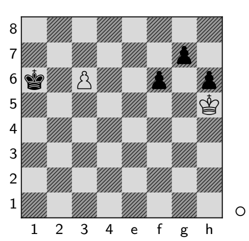
Zadatak 3.3. *Bijeli je na potezu. Da li mu odgovara izmjena topova?*



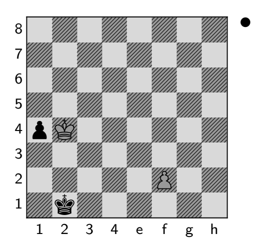
Zadatak 3.4. *Crni vuče i remizira!*



Zadatak 3.5. *Bijeli vuče i remizira!*



Zadatak 3.6. *Crni vuče i remizira!*



4. Zaključak

Zahvaljujući svom pedagoškom potencijalu, šah se sve više koristi kao odgojno-obrazovno sredstvo te se kao takvo primjenjuje u mnogim školama u svijetu (primjer Armenije, gdje je šah obavezan predmet). Budući da je potvrđena (razne ankete, stručni radovi pa i doktorske disertacije [3], [4], [5], [6],[7]) korist koju bavljenje šahom može imati kod učenika, treba težiti ka tome da što više škola u ponudu svojih izvan nastavnih aktivnosti uključi i šah, što je tendencija u mnogim državama u Evropi, pa i u svijetu. Jedna od glavnih teškoća u ostvarivanju tog cilja je osposobljavanje i/ili obrazovanje šahovskih učitelja, koji bi bili osposobljeni za vođenje šahovske aktivnosti u školi. Kao što je to i nekada bilo, a i danas, šah uglavnom podučavaju uposlenici škola koji su inače zaljubljenici u ovu drevnu igru. Ponekad je argumentacija nemanja ove aktivnosti problem nedovoljne tehničke opremljenosti za šah, ali s obzirom na skromne financijske zahtjeve šaha, to je svakako manji problem, koji bi sve škole trebale moći riješiti uz minimalnu pomoć nadležnog ministarstva, postojećih šahovskih klubova lokalne zajednice ali i sa projektima prema Evropskoj šahovskoj federaciji.

Kao što se vidi iz [2], BiH odnosno šahovska zajednica BiH nije bila uključena u ispitivanjima. Na žalost, stanje šaha u BiH moglo bi se nazvati poražavajućim. Počev od činjenice da ne postoji krovna šahovska organizacija na nivou BiH (postoje tri odvojene), a time i potpuni nedostatak interesa za aktiviranjem šaha u školama, do toga da se organizacija takmičenja bilo kog nivoa i turnira vodi više stihijski nego planski, i ne čudi što je stanje takvo. Upravo činjenica da su rijetke (izuzetno rijetke) škole u kojima se šah upražnjava u bilo kom obliku, dovodi do toga da se ne stvaraju ni nove generacije šahista, a time i do "izumiranja" šaha, te drevne igre.

Literatura

[1] Assaf Winninger : Chess classes in the education system, The Knesset Research and Information Center, 10 June 2018.

[2] J. Foley, J. Hall : ECU Education Commission, Survey on Chess in Schools 2015/16, http://www.europechess.org/commissions/educational-commission/

[3] D. Brenda : Chess, anyone? Chess as an essential teaching tool. Retrieved May 18, 2004, from http://www.educationworld.com/a_curr/profdev031.shtml.

[4] J. Celone : The effects of a chess program on abstract reasoning and problem-solving in elementary school children. Ann Arbor, MI. Bell & Howell Information and Learning Co. 2001.

[5] F. Kazemia, M. Yektayarb, A.M.B. Abad : Investigation the impact of chess play on developing meta-cognitive ability and math problem-solving power of students at different levels of education, Procedia - Social and Behavioral Sciences 32 (2012) 372-379, 2011.

[6] John Jerrim et al.: Chess in Schools: Evaluation Report and Executive Summary, Education Endowment Foundation, July 2016.

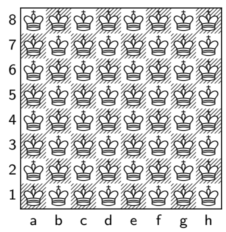
[7] G. Sala, F. Gobet: "Do the Benefits of Chess Instruction Transfer to Academic and Cognitive Skills? A Meta-Analysis" Educational Research Review, 18 (2016): 46â€“57.

2

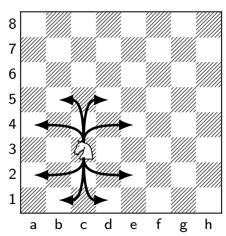
KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

Zadatak 1. *Svako polje šahovske ploče zauzima kralj. Svaki (baš svaki) se kralj nasumično pomiče na neko susjedno polje. Pretpostavimo da svako polje može primiti više od jednog kralja. Koji bi najveći broj praznih polja mogao ostati?*

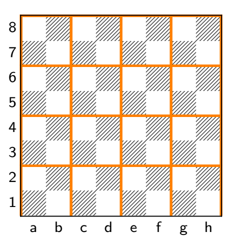


Zadatak 2. *Postaviti dvanaest skakača na šahovsku tablu, tako da svako polje table bude "napadnuto" ili zauzeto skakačem.*



Kretanje skakača!

Zadatak 3. *Podjeliti šahovsku tablu na 16 kvadrata tako: da svi kvadrati budu istih dimenzija* $n \times n$*, da ima bar jedan kvadrat dimenzije* 7×7*, da ima bar po jedan kvadrat dimenzija* 5×5 *i* 3×3 *i da ima osma kvadrata dimenzije* 2×2*. (Smisliti još neki način podjele!)*



Jedna od podjela sa kvadratima 2×2*.*

Zadatak 4. *Jedna šahovska ploča ima površinu 17* dm^2 *i 64* cm^2*. Kolika je površina i koliki je obim jednog polja ako udaljenost između rubova šahovske ploče i rubova krajnjih polja iznosi 1 cm?*

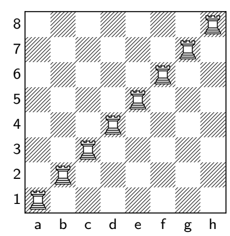
Zadatak 5. *Na koliko se načina može izabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči tako da se ne nalaze u istoj vrsti niti u istoj koloni?*

Ciljna skupina: svi uzrasti

Nagradni zadatak: Topovi

Na koliko načina možemo rasporediti 8 topova na šahovsku tablu, tako da se oni međusobno ne napadaju? Ovaj zadatak je klasičini kombinatorni problem na šahovskoj tabli. Do rješenja dođimo postupno. Naime, razmišljajmo o postavci prvog topa, dakle na praznu tablu. Postaviti ga možemo na 64 načina, i pri tome je $64 = 8^2$. Postavljeni prvi top zauzima jednu vrstu i jednu kolonu šahovske table, tako da u tu vrstu i kolonu ne možemo postavljati više topova. Time je zauzeto $8 + 8 - 1 = 15$ polja, pa drugog topa možemo postaviti na preostalih $64-15 = 49$ polja, to jest na $49 = 7^2$ načina. Sa tim će biti zauzeto još $7+7-1 = 13$ polja. Dakle, trećeg topa možemo postaviti na $49 - 13 = 36 = 6^2$ polja. Potpuno analognim razmišljanjem imamo da četvrtog topa možemo postaviti na $25 = 5^2$ polja, petog na $16 = 4^2$ polja, šestog na $9 = 3^2$ polja, sedmog na $4 = 2^2$ polja i posljednjeg osmog na $1 = 1^2$ polje.
Kako topovi nisu ničim označini, to je onda broj mogućih rasporeda dat sa

$$\frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2}{8!} = \frac{(8!)^2}{8!} = 40320.$$



Zadatak. *Upišimo na 64 polja šahovske ploče redom brojeve od 1 do 64, tako da u prvu vrstu upišemo brojeve od 1 do 8, u drugu vrstu brojeve od 9 do 16 (slijeva udesno) i tako do osme vrste. Proizvoljno postavimo 8 topova (na jedan od 40 320 načina) tako da nijedan ne napada drugoga. Koliki je zbir brojeva onih polja koja zauzimaju postavljeni topovi?*

Za nagradni zadatak iz prethodnog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno tačno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni.

Ciljna skupina: svi uzrasti
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.06.2023. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.