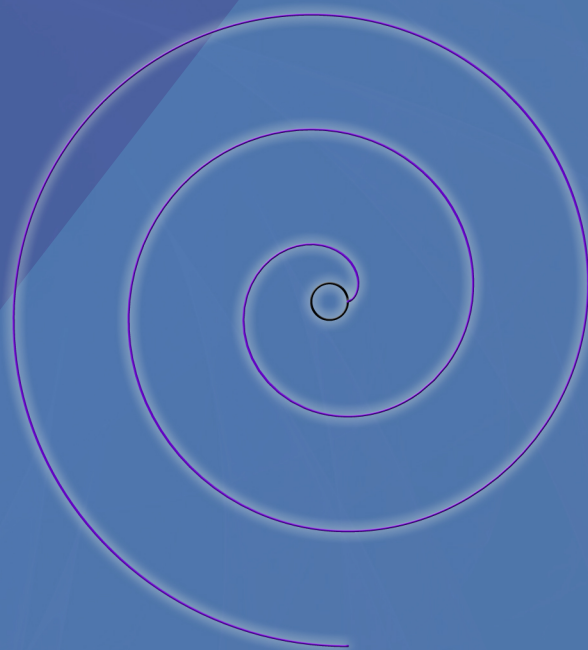


ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA



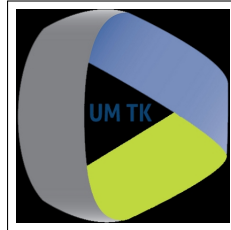
EVOLVENTA



ISSN 2637-2126

Vol. 6, No. 1, TUZLA 2023.

JAMTK
Journal of the Association of mathematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK



EVOLVENTA

Vol. 6, No. 1, 2023

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of mathematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info ili direktno na <https://evolventa.ba>

Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Glavni urednik:

Dr. Sc. Mehmed Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
mehmed.nurkanovic@untz.ba

Tehnički urednik:

Dr. Sc. Nermin Okićić, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
nermin.okicic@untz.ba

Urednički odbor:

Dr. Sc. Enes Duvnjaković, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Zehra Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Muharem Avdispahić, PMF Sarajevo, Odsjek za matematiku
Dr. Sc. Hasan Jamak, PMF Sarajevo, Odsjek matematika
Dr. Sc. Senada Kalabušić, PMF Sarajevo, Odsjek za matematiku
Dr. Sc. Ramiz Vugdalić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Nermin Okićić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Vedad Pašić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. Sc. Hariz Agić, Pedagoški zavod Tuzla
Marko Pavlović, KŠC "Sveti Franjo" Tuzla

Adresa:

Univerzitetska 4, 75000
Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank - Poslovnica Tuzla)

Sadržaj

1	ČLANCI	1
	Mehmed Nurkanović, Mirsad Trumić <i>Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednažbi s varijabilnim koeficijentima</i>	2
	Alija Muminagić, Jens Carstensen <i>Geometrijski dokazi trigonometrijskih jednakosti</i>	10
	Sanela Halilović, Šejla Jusić <i>Magičnost zvjezdastih poligona</i>	18
	Vesna Divković, Laura Lukić, Elvir Memić, Samir Karasuljić <i>O numeričkom rješavanju Cauchyjevog problema Runge-Kutta metodama na Shishkinovoj mreži</i>	33
2	KUTAK ZA ZADATKE	47
	Zabavna matematika	48
	Nagradni zadatak: Šifra	49
	Rješenje i rješavatelji nagradnog zadatka iz Evolvente 5 (2) 2022.	50

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK)*. Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu <https://en.wikipedia.org/wiki/Involute>).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki način povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sadržaji zabavna matematika i nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturalnih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je financiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.evolventa.ba. U 2019. godini, kao i u 2020. godini, časopis ima samo po jedno izdanje. Razlog tome je što smo čekali registraciju časopisa u NUB BiH i dodjelu ISSN broja, a što je pozitivno riješeno u septembru 2020. godine. Ubuduće planiramo da će časopis imati minimalno dva izdanja godišnje.

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegicama i kolegama, nastavnicima i asistentima, s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa*.

U Tuzli, novembar 2023. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima

Mehmed Nurkanović¹, Mirsad Trumić²

¹*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*

²*JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se razmatra mogućnost primjene metoda snižavanja reda linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima kao analogona istoimenog metoda pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Metod je ilustriran na nekoliko odgovarajućih primjera.

1. Uvod

Pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi, bilo s konstantnim ili varijabilnim koeficijentima, uglavnom se koriste standardni metodi rješavanja: metod neodređenih koeficijenata, metod varijacije konstanti, metod generirajućih funkcija, metod stepena padajućih faktorijela, metod Z-transformacije. Međutim, osim tih metoda, moguće je koristiti metode diferencijalnih jednadžbi, kao što su: snižavanje reda jednadžbe, opći metod faktorizacije operatora, metod invarijanti ili Lieve simetrije [1, 2, 4, 5, 7, 8]. Tako je u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi poznato da se pogodnom smjenom linearna diferencijalna jednadžba k -tog reda može svesti na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k - 1$, to jest moguće joj je sniziti red. Naime, ako je linearna diferencijalna jednadžba oblika

$$y^{(k)} + p_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + p_k(x)y = b(x) \quad (1)$$

i ako nam je $f(x)$ rješenje njoj odgovarajuće homogene jednadžbe, onda se smjenom $y = f(x)z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (1) svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k - 1$. Pokazat ćemo da se isti metod može primijeniti i na slučaj obične linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima [1, 7]. Uzmimo jednostavan slučaj takve jednadžbe drugog reda

$$u_{n+2} + a_n u_{n+1} + b_n u_n = r_n, \quad b_n \neq 0. \quad (2)$$

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: diferentne jednadžbe, metod snižavanja reda, konvergencija

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: august, 2023.

Pretpostavimo da je f_n neko rješenje odgovarajuće homogene diferentne jednačbe tako da f_n i f_{n+2} nisu nule za sve $n = 0, 1, \dots$. Zamjenom $u_n = f_n v_n$ u (2) dobijamo

$$f_{n+2}v_{n+2} + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n v_n = r_n, \quad (3)$$

što nije jednostavnije od diferentne jednačbe (2). Zato uvođenjem smjene $\omega_n = \Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ u (3) dobijamo

$$\begin{aligned} f_{n+2}(\omega_{n+1} + v_{n+1}) + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n(v_{n+1} - \omega_n) \\ = f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n + (f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n)v_{n+1} = r_n. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke za f_n vrijedi

$$f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n = 0.$$

Time će se (3) svesti na diferentnu jednačbu

$$f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n = r_n,$$

što je linearna diferentna jednačba prvog reda (dakle, snizili smo red jednačbe (2) za jedan), koju možemo riješiti na uobičajeni način.

Naravno da je ovdje jedan od ključnih problema pogoditi niz f_n .

2. Primjeri primjene metoda snižavanja reda

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednačbi s varijabilnim koeficijentima ilustrirat ćemo na par primjera koji su navedeni kao problemi za rješavanje u [1].

Primjer 2.1. ([1], Problem 1.12 (c)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)u_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Rješenje: Uz malo truda moguće je uočiti da je jedno rješenje odgovarajuće homogene jednačbe za datu jednačbu oblika $f_n = n+1$, budući da se homogena jednačba može napisati u pogodnijem obliku

$$nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 0$$

Uvođenjem smjene $u_n = (n+1)v_n$ u (4) se dobije jednačba

$$(n+3)v_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)(n+2)v_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)v_n = \frac{1}{n},$$

odnosno

$$(n+3)(v_{n+2} - v_{n+1}) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{n}.$$

Nakon smjene $\omega_n = v_{n+1} - v_n$, dobije se

$$(n+3)\omega_{n+1} - 2\frac{(n+1)(n+1)}{n}\omega_n = \frac{1}{n},$$

odakle je

$$\omega_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(n+3)n}\omega_n + \frac{1}{n(n+3)}.$$

Posljednja jednačba je linearna diferentna jednačba prvog reda sa varijabilnim koeficijentima čije je opće rješenje oblika (v. [2–6])

$$\omega_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)}. \quad (5)$$

Sređivanjem prvog sumanda u posljednjoj jednačbosti dobijamo

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \omega_1 = \frac{2^{n-1}n!n!}{\frac{(n+2)!}{3!}(n-1)!} \omega_1 = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1.$$

S druge strane, za drugi sumand vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{n-k-1}(n!)^2 k!(k+3)!}{((k+1)!)^2 (n-1)!(n+2)!} \frac{1}{k(k+3)} \\ &= \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(n-1)!(n+2)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k} k!(k+3)!}{((k+1)!)^2} \frac{1}{k(k+3)} \\ &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Metodom parcijalnog sumiranja (v. [2, 4]) odredimo sumu u (6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (k+2) \implies \Delta x_k = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (k+1) \\ \Delta y_k = \frac{1}{k(k+1)} = (k-1)^{(-2)} \implies y_k = -\frac{1}{k} \end{array} \right\| \\ &= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k+2}{k} \right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (k+1) \frac{1}{k+1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n+2}{n} + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n+2}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}n} + 1. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)} \left(-\frac{1}{2^{n-1}n} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

pa je

$$\omega_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}.$$

S obzirom da je $\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$, dalje imamo

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{n+1} u_n &= \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\ \implies \frac{1}{n+1} u_n &= 3\omega_1 \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\ \implies \frac{1}{n+1} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Koristeći činjenicu (v. [2, 4])

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = a_n \implies \Delta^{-1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + C,$$

i uzimajući za $C = 0$, što je moguće jer je u (8) već uključena odgovarajuća konstanta, imamo

$$\Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)},$$

odakle primjenom metoda parcijalnog sumiranja dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = k2^k \implies \Delta x_k = (k+2)2^k \\ \Delta y_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = k^{(-2)} \implies y_k = -\frac{1}{k+1} \end{array} \right\| \\ &= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\frac{k2^k}{k+1} \right]_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+2)2^k}{k+2} \\ &= -\frac{n2^n}{n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = -\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1. \end{aligned}$$

S druge strane, prema definiciji padajućeg faktorijela s negativnim eksponentom (v. [2, 4]), imamo

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = n^{(-2)}$$

te koristeći osobinu inverznog delta operatora Δ^{-1} : $\Delta^{-1}(t^{(a)}) = \frac{t^{(a+1)}}{a+1}$, $a \neq -1$ i izostavljanjem dodatne konstante, dobije se da vrijedi

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[-\frac{1}{k+1} \right]_1^n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem dobijenih rezultata u (8) dobijamo

$$\frac{1}{n+1}u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) (2^n - (n+1)) + 1 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) 2^n - (3\omega_1 - 1)(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Zamjenom konstante $\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{u_2}{3} - \frac{u_1}{2}$ dobijamo konačnu formu rješenja date jednačbe

$$u_n = \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}\right) 2^n - \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 - 1\right) (n+1) + 1.$$

□

Primjer 2.2. ([1], Problem 1.12 (a)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}u_n = 1, \quad n \geq 0. \quad (9)$$

Rješenje: Pripadajuća homogena jednačba ima jedno rješenje $f_n = 1$. Uvedeći smjene $u_n = v_n$ i $\omega_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, onda (9) dobija sljedeći oblik

$$u_{n+2} - u_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}(u_{n+1} - u_n) = 1,$$

odnosno

$$\omega_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\omega_n + 1.$$

Dobili smo linearnu diferentnu jednačbu prvog reda čije je opće rješenje oblika

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2}\right) \omega_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{i+1}{i+2}\right) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) = \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{(n-1)n}{2} + 2n\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{n(n+3)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smjene se dobija

$$\Delta u_n = \frac{1}{n+1}(u_1 - u_0) + \frac{n(n+3)}{2(n+1)},$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0)\Delta^{-1} \left(\frac{1}{n+1}\right) + \Delta^{-1} \left(\frac{n(n+3)}{2(n+1)}\right) = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)}. \quad (10)$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k+2 - \frac{2}{k+1} \right) = \frac{n(n-1)}{2} + 2n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

iz (11) se dobija

$$u_n = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+3)}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right),$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{n(n+3)}{4}.$$

□

Primjer 2.3. ([1], Problem 1.12 (b)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n}{n+1}u_n = 3(n+3), \quad n \geq 0. \quad (11)$$

Rješenje: Nije teško zaključiti da je $f_n = n+1$ rješenje odgovarajuće homogene jednačbe za datu jednačbu. Uvođenjem smjene $u_n = f_n v_n = (n+1)v_n$ dobija se jednačba

$$(n+3)v_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}(n+2)v_{n+1} + \frac{n}{n+1}(n+1)v_n = 3(n+3),$$

odnosno

$$(n+3)v_{n+2} - (2n+3)v_{n+1} + nv_n = 3(n+3).$$

To se može pisati i u obliku jednačbe po Δv_n

$$(n+3)(v_{n+2} - v_{n+1}) - n(v_{n+1} - v_n) = 3(n+3),$$

odnosno u obliku linearne diferentne jednačbe po ω_n

$$(n+3)\omega_{n+1} - n\omega_n = 3(n+3)$$

ili

$$\omega_{n+1} = \frac{n}{n+3}\omega_n + 3.$$

Njeno opće rješenje je

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+3} \right) \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{i}{i+3} \right) \cdot 3 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} \right) \omega_1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k+4} \cdot \frac{k+2}{k+5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} \right) \\ &= \frac{6(n-1)!}{(n+2)!} \omega_1 + 3 \frac{(n-1)!}{(n+2)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+3)!}{k!} \\ &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n} \omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+3)(k+2)(k+1). \end{aligned}$$

Kako je koristeći osobinu djelovanja inverznog delta operatora na stepen padajućeg faktorijela (v. [2, 4])

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+3)(k+2)(k+1) = \Delta^{-1}(k+3)^{(3)} \Big|_1^n = \frac{1}{4}(k+3)^{(4)} \Big|_1^n = \frac{1}{4}(n+3)^{(4)} - 6,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n} \omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n} \left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - 6 \right] \\ &= \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3). \end{aligned}$$

Zamjenom

$$\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$$

iz posljednje jednakosti slijedi

$$\Delta \frac{1}{n+1} u_n = \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3),$$

odakle je

$$\frac{1}{n+1} u_n = (6\omega_1 - 18) \Delta^{-1} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4} \Delta^{-1} n + \frac{9}{4} \Delta^{-1} 1. \quad (12)$$

Kako je (v. [2, 4])

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = -\frac{1}{2}(k-1)^{(-2)} \Big|_1^n = -\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{4},$$

$$\Delta^{-1} n = \frac{1}{2} n(n-1),$$

$$\Delta^{-1} 1 = n-1,$$

zamjenom u (12) dobije se

$$\frac{1}{n+1} u_n = -(6\omega_1 - 18) \left(\frac{1}{2(n+1)n} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{9}{4} (n-1),$$

odnosno

$$u_n = -(6\omega_1 - 18) \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}(n+1) \right) + \frac{3}{8} (n+1)n(n-1) + \frac{9}{4} (n+1)(n-1).$$

Imajući na umu da je

$$\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3} u_2 - \frac{1}{2} u_1,$$

konačno dobijamo traženo rješenje

$$u_n = (2u_2 - 3u_1 - 18) \frac{(n-1)(n+2)}{4n} + \frac{3}{8} (n+1)n(n-1) + \frac{9}{4} (n+1)(n-1).$$

□

Primjedba 2.4. Uočimo da za nizove koji su rješenja jednadžbi u prethodnim primjerima možemo zaključiti da divergiraju ka $+\infty$.

Literatura

- [1] P.E. Hydon, *Difference Equations by Differential Equation Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [2] M. Nurkanović: *Diferentne jednačbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, vol. 1, no. 1 (2018), 2-5.
- [4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednačbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.
- [5] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama, *Evolventa*, vol. 4, no. 1 (2021), 25-37.
- [6] M. Nurkanović, M. Trumić: Computing indefinite integrals by difference equations. *The Mathematical Gazette*, vol. 107, no. 570 (2023), 474-487. <https://doi.org/10.1017/mag.2023.99>
- [7] M. Trumić: *Primjena diferentnih jednačbi u nastavi matematike*, Doktorska disertacija, PMF Sarajevo, 2023.
- [8] M. Trumić: Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima, *Evolventa*, vol. 4, no.2 (2021), 2-11.

Geometrijski dokazi trigonometrijskih jednakosti

Alija Muminagić¹, Jens Carstensen²

¹penzioner, Danska

²penzioner, Danska

Sažetak: U ovom radu dajemo dokaze nekih trigonometrijskih jednakosti geometrijskim metodom, što u redovnoj nastavi činimo vrlo rijetko.

1. Uvod

Napomenimo da je trigonometrija važan i jak alat za nauku i tehniku. Međutim, u posljednje vrijeme autori programa iz matematike nalaze prostor za uvođenje "novih stvari", izbacivanjem nekih trigonometrijskih sadržaja. Istina, uvođenjem digitrona i računara, opravdano su izostala izračunavanja upotrebom tablica, a sredstva za crtanje grafova pružaju dinamičke alate koji učenicima znatno olakšavaju izučavanje trigonometrije. Pitanje je da li je dovoljno provjeravati (dokazivati) samo osnovne trigonometrijske identitete ili i komplikovanije, što se sada izbjegava.

Poznati francuski matematičar Jean Alexandre Evgène Dieudonne (1906.-1992.) je rekao da je većina trigonometrijskog sadržaja važna za samo tri zanimanja: astronome, geometre i pisce udžbenika iz trigonometrije.

Ovdje želimo pokazati kako trigonometrija može pružiti estetsku privlačnost mnogim učenicima, zainteresovanim za njezino proučavanje.

2. Primjeri dokaza trigonometrijskih jednakosti geometrijskim metodom

Primjer 2.1. Dokazati da je $\frac{1}{2}\text{tg } 40^\circ + \text{tg } 10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2}\text{tg } 60^\circ$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ABC$, sa uglovima $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Neka je $|AB| = c$, $|AC| = b$ i $|CB| = a$ (Slika 1). Trougao $\triangle ABC$ je polovina jednakostraničnog trugla, pa je

$$c = 2b. \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: trigonometrijske jednakosti, geometrijski metod

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: august, 2023.

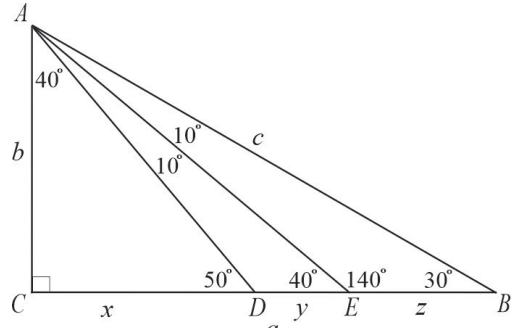
Odaberimo tačke D i E na kateti BC , tako da je $\sphericalangle CAD = 40^\circ$ i $\sphericalangle DAE = \sphericalangle EAB = 10^\circ$, i neka je $|CD| = x$, $|DE| = y$ i $|EB| = z$ (vidi sl. 1.). Tako je

$$|BC| = a = x + y + z. \quad (2)$$

U pravouglom trouglu $\triangle ACD$ je:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{b} \iff x = b \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \quad \text{i} \quad (3)$$

$$\cos 40^\circ = \frac{b}{|AD|} \iff |AD| = \frac{b}{\cos 40^\circ}. \quad (4)$$



Slika 1.

Sinusna teorema primijenjena na trouglove $\triangle ADE$ i $\triangle AEB$ daje:

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sin 10^\circ} &= \frac{|AD|}{\sin 40^\circ} \iff y = \frac{|AD| \cdot \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} \stackrel{(4)}{=} \frac{\frac{b}{\cos 40^\circ} \cdot \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} \\ &= \frac{2b \cdot \sin 10^\circ}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{2b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2b \cdot \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 2b \cdot \operatorname{tg} 10^\circ, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{z}{\sin 10^\circ} = \frac{c}{\sin 140^\circ} \iff z = \frac{c \cdot \sin 10^\circ}{\sin 140^\circ} = (\text{zbog (1) i } \sin 140^\circ = \sin 40^\circ) = \frac{2b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}. \quad (6)$$

U trouglu $\triangle ABC$ je

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{b} \iff a = b \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

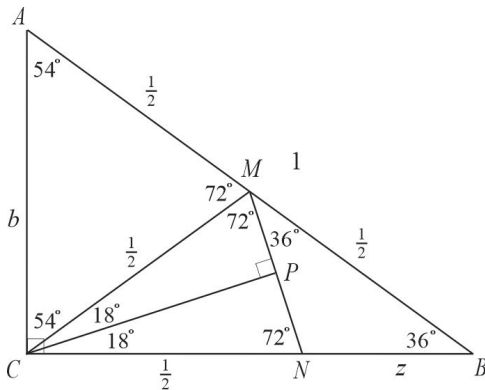
$$(\text{zbog } a = x + y + z) \iff x + y + z = b \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$((3), (5) \text{ i } (6)) \iff b \cdot \operatorname{tg} 40^\circ + 2b \cdot \operatorname{tg} 10^\circ + \frac{2b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = b \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\iff \frac{1}{2} \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ, \quad \text{q.e.d.} \quad \square$$

Primjer 2.2. Dokazati da je $\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \frac{1}{2}$.

Rješenje: Neka je trougao $\triangle ABC$ pravougli sa uglovima $\sphericalangle BAC = 54^\circ$, $\sphericalangle CBA = 36^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ (Slika 2). Dalje, neka je hipotenuza $|AB| = 1$ i tačka M središte hipotenuze, tj. $|AM| = |BM| = \frac{1}{2} = |CM|$.



Slika 2.

Na kateti BC odredimo tačku N , tako da je $|MC| = \frac{1}{2} = |CN|$. Dakle, $|CN| = |MC| = |MB| \frac{1}{2}$. To povlači da je trougao $\triangle BMC$ jednakokraki i $\sphericalangle BCM = 36^\circ$, $|MB| = \frac{1}{2}$. Neka je P projekcija tačke C na MN . Trougao $\triangle MCN$ je jednakokraki (zbog $|CN| = |MC|$), pa je $\sphericalangle MCP = \sphericalangle NCP = 18^\circ$ (vidi sl. 2). Lako vidimo da je $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM = 72^\circ$. U jednakokrakom trouglu $\triangle AMC$, je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAC = 54^\circ$ i $\sphericalangle AMC = 72^\circ$. Dalje je $\sphericalangle BMN = 180^\circ - \sphericalangle CMN - \sphericalangle AMC} = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. To znači da je trougao $\triangle BMN$ jednakokraki i

$$|BN| = |NM| = 2 \cdot |MP|. \tag{7}$$

S druge strane, u trouglu $\triangle MCP$ je

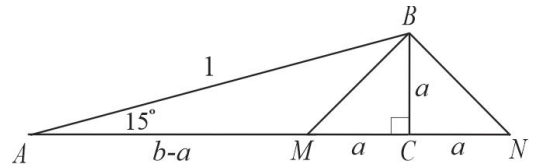
$$\sin 18^\circ = \frac{|MP|}{|CM|} \iff \sin 18^\circ = \frac{|MP|}{\frac{1}{2}} \iff \sin 18^\circ = 2 \cdot |MP| \stackrel{(7)}{=} |BN|. \tag{8}$$

Konačno je (v. $\triangle ABC$)

$$\sin 54^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CN| + |BN|}{1} = \frac{1}{2} + |BN| \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{2} + \sin 18^\circ. \quad \square$$

Primjer 2.3. Dokazati da je $\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ABC$ sa uglovima $\sphericalangle BAC = 15^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ i hipotenuzom $|AB| = 1$ (v. Sliku 3). Tada je $\sin 15^\circ = \frac{a}{1} = a = |BC|$ i $b = |AC| = \cos 15^\circ$. Na kateti AC i njezinom produžetku (preko tačke C) uzmimo tačke M i N , tako da je $|CM| = |CN| = a$. Sada je $|AN| = a + b$ i $|AM| = b - a$. Lako dobijamo da je $\sphericalangle ABM = 30^\circ$.



Slika 3.

Primjenom sinusne teoreme na trouglove $\triangle ABM$ i $\triangle ABN$ dobijamo:

$$\frac{|BM|}{\sin 15^\circ} = \frac{|AM|}{\sin 30^\circ} \text{ i } \frac{|BN|}{\sin 15^\circ} = \frac{|AN|}{\sin 120^\circ},$$

pa, zbog $|BM| = |BN|$, slijedi

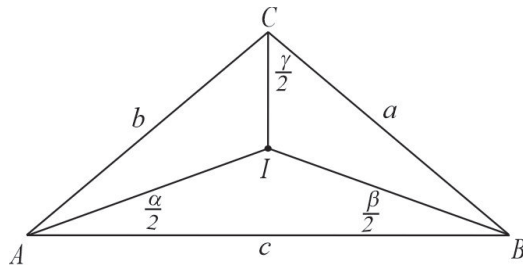
$$\frac{|AM|}{\sin 30^\circ} = \frac{|AN|}{\sin 120^\circ} \iff \frac{b - a}{\sin 30^\circ} = \frac{b + a}{\sin 120^\circ} \iff \frac{b + a}{b - a} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ},$$

odakle je

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Još jedno rješenje može se vidjeti u [2]. □

Primjer 2.4. Dokazati da u svakom trouglu vrijedi $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, gdje su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla.



Slika 4.
 $\sin \sphericalangle AIC = \cos \frac{\alpha}{2}$ i $\sin \sphericalangle BIC = \cos \frac{\beta}{2}$.

Rješenje: Posmatrajmo proizvoljan trougao $\triangle ABC$ i uvedimo oznake kao na Slici 4. I je centar upisane kružnice u trougao. Kako je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, to je

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

pa je $\sin \sphericalangle AIB = \cos \frac{\gamma}{2}$, i slično

Primjenom sinusne teoreme u trouglovima $\triangle AIC$ i $\triangle BIC$ dobijamo:

$$\frac{|IA|}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cos \frac{\beta}{2}} \iff |IA| = \frac{b \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{|IB|}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \iff |IB| = \frac{a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Kako je, s jedne strane, površina P trougla $\triangle AIB$ data s

$$P = \frac{1}{2}|IA| \cdot |IB| \cdot \sin \sphericalangle AIB = \frac{1}{2}|IA| \cdot |IB| \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

a s druge strane $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$, nakon dijeljenja dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\triangle}(AIB)}{P_{\triangle}(ABC)} &= \frac{\frac{1}{2}|IA| \cdot |IB| \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma} = \left(\text{zbog } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\frac{b \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2ab \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \\ \iff P_{\triangle}(AIB) &= \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \cdot P_{\triangle}(ABC) \end{aligned}$$

i slično

$$P_{\triangle}(AIC) = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot P_{\triangle}(ABC)$$

$$P_{\triangle}(BIC) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot P_{\triangle}(ABC)$$

Sabiranjem posljednje tri jednakosti, zbog

$$P_{\triangle}(ABC) = P_{\triangle}(AIB) + P_{\triangle}(AIC) + P_{\triangle}(BIC),$$

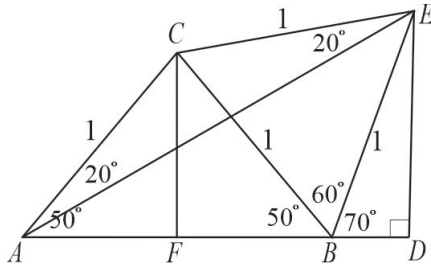
dobijamo

$$1 = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}},$$

odakle slijedi

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad q.e.d. \quad \square$$

Primjer 2.5. Dokazati da je $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.



Slika 5.

Rješenje: Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ u kojem je

$$|CA| = |CB| = 1 \text{ i } \sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 50^\circ \text{ (v. Sliku 5).}$$

Nad stranicom BC konstruišemo jednakokranični trougao $\triangle BCE$. Tada je $|BC| = |CE| = |EB| = 1$ i $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEB = \sphericalangle EBC = 60^\circ$.

Neka je tačka D podnožje normale iz tačke E na AB i neka je CF visina u trouglu $\triangle ABC$ (vidi sl. 5).

Lako se dokazuje da je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 20^\circ$ i $\sphericalangle EAD = 30^\circ$. Sada imamo:

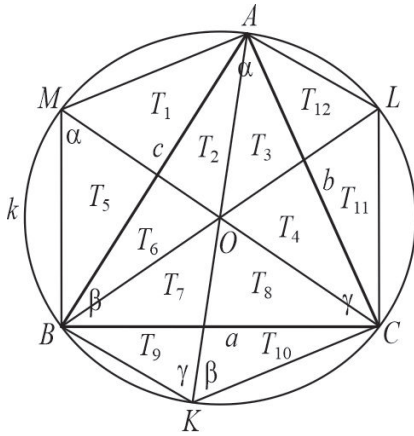
$$\text{(v. } \triangle AFC) \cos 50^\circ = \frac{|AF|}{|AC|} = |AF| = |FB|,$$

$$\text{(v. } \triangle BDE) \sin 70^\circ = \frac{|ED|}{|BE|} = |ED| \text{ i } \cos 70^\circ = \frac{|BD|}{|BE|} = |BD|$$

i konačno

$$\text{(v. } \triangle AED) \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|ED|}{|AD|} = \frac{|ED|}{|AF|+|FB|+|BD|} = \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 50^\circ + \cos 70^\circ}. \quad \square$$

Primjer 2.6. Dokazati da u nepravouglom trouglu vrijedi $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.



Slika 6.

Rješenje: Neka je $\triangle ABC$ nepravougli i neka je $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$ i neka su α, β i γ unutrašnji uglovi tog trougla. Neka je O centar opisane kružnice k oko $\triangle ABC$ i neka su presječne tačke pravih AO, BO i CO s kružnicom k , redom tačke K, L i M . Na taj način je šesterougao $AMBKCL$ podijeljen na 12 malih trouglova, čije površine označimo sa T_1, T_2, \dots, T_{12} kao na Slici 6. Na toj slici možemo uočiti šest trouglova sa prečnikom kružnice kao jednom stranicom. Svaki od tih trouglova podijeljen je na dva manja trougla čije su površine jednake (zašto?). Dakle imamo:

$$\begin{aligned} T_3 + T_4 &= T_8 + T_{10} & T_2 + T_6 &= T_3 + T_{12} \\ T_2 + T_6 &= T_7 + T_9 & T_7 + T_8 &= T_5 + T_6 \\ T_7 + T_8 &= T_4 + T_{11} & T_3 + T_4 &= T_1 + T_2 \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo:

$$2(T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) = (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) + (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12}) \text{ tj.}$$

$$\underbrace{T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8}_{P_{\Delta}(ABC)} = \underbrace{(T_1 + T_5)}_{P_{\Delta}(ABM)} + \underbrace{(T_9 + T_{10})}_{P_{\Delta}(BCK)} + \underbrace{(T_{11} + T_{12})}_{P_{\Delta}(ACL)} \text{ ili}$$

$$P_{\Delta}(ABC) = P_{\Delta}(ABM) + P_{\Delta}(BCK) + P_{\Delta}(ACL) \quad (9)$$

Iz podudarnosti trouglova $\triangle OLC \cong \triangle OMB$ slijedi

$$|LC| = |MB| \text{ i slično } |KC| = |MA| \text{ i } |AL| = |BK| \quad (10)$$

Poznato je da je $P_{\Delta}(ABC) = \frac{abc}{4R}$ i analogno $P_{\Delta}(ABM) = \frac{|AB| \cdot |AM| \cdot |BM|}{4R} = \frac{c \cdot |AM| \cdot |BM|}{4R}$,
 $P_{\Delta}(BCK) = \frac{|BC| \cdot |CK| \cdot |KB|}{4R} = \frac{a \cdot |CK| \cdot |KB|}{4R}$ i $P_{\Delta}(ACL) = \frac{|AC| \cdot |CL| \cdot |LA|}{4R} = \frac{b \cdot |CL| \cdot |LA|}{4R}$, pa jednaost (9) možemo pisati kao

$$abc = c \cdot |AM| \cdot |BM| + a \cdot |CK| \cdot |KB| + b \cdot |CL| \cdot |LA|. \quad (11)$$

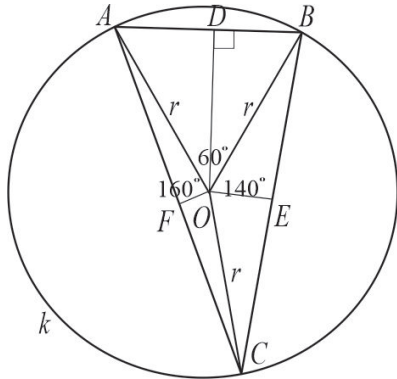
Dalje je $\sphericalangle CMB = \alpha$ (kao periferijski uglovi nad lukom \widehat{BC}), a u pravouglom trouglu $\triangle CMB$ ($\sphericalangle CBM = 90^\circ$, kao ugao nad prečnikom) je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sphericalangle CMB &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|BM|} = \frac{a}{|BM|} \text{ i slično} \\ \operatorname{tg} \sphericalangle AKC &= \operatorname{tg} \beta = \frac{|AC|}{|KC|} \stackrel{(10)}{=} \frac{b}{|MA|}; \quad \operatorname{tg} \sphericalangle AKB = \operatorname{tg} \gamma = \frac{|AB|}{|BK|} = \frac{c}{|BK|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{a}{|BM|} + \frac{b}{|MA|} + \frac{c}{|BK|} \\ &= \frac{a \cdot |MA| \cdot |BK| + b \cdot |BM| \cdot |BK| + c \cdot |BM| \cdot |MA|}{|BM| \cdot |MA| \cdot |BK|} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{a \cdot |KC| \cdot |BK| + b \cdot |CL| \cdot |AL| + c \cdot |BM| \cdot |MA|}{|BM| \cdot |MA| \cdot |BK|} \stackrel{(11)}{=} \frac{abc}{|BM| \cdot |MA| \cdot |BK|} \\ &= \frac{a}{|BM|} \cdot \frac{b}{|MA|} \cdot \frac{c}{|BK|} \stackrel{(12)}{=} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad \square \end{aligned}$$

Primjer 2.7. Dokazati da je $\sin 60^\circ + \sin 140^\circ + \sin 160^\circ = 4 \sin 80^\circ \sin 70^\circ \sin 30^\circ$.



Slika 7.

Rješenje: Neka je O centar kružnice k čiji je poluprečnik r , i neka su tačke A, B i C na kružnici tako da je $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, $\sphericalangle BOC = 140^\circ$ i $\sphericalangle COA = 160^\circ$. Spojimo dužima tačke A i B, B i C i C i A (v. Sliku 7).

U trouglovima $\triangle BDO, \triangle EBO$ i $\triangle FCO$ je $\sin 30^\circ = \frac{|BD|}{r}$ i slijedi da je $|AB| = 2 \cdot |BD| = 2r \cdot \sin 30^\circ$ i slično $|BC| = 2 \cdot |BE| = 2r \cdot \sin 70^\circ$ i $|AC| = 2 \cdot |AF| = 2r \cdot \sin 80^\circ$.

Površina trougla $\triangle ABC$ je

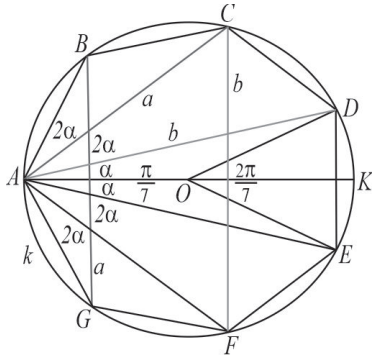
$$\begin{aligned} P_{\Delta}(ABC) &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \sphericalangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin 30^\circ \cdot 2r \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ \\ &= 2r^2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ. \end{aligned} \quad (13)$$

S druge strane je

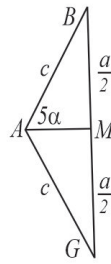
$$\begin{aligned} P_{\Delta}(ABC) &= P_{\Delta}(AOB) + P_{\Delta}(BOC) + P_{\Delta}(AOC) \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} r^2 \sin 140^\circ + \frac{1}{2} r^2 \sin 160^\circ. \end{aligned} \quad (14)$$

Iz (13) i (14) slijedi tvrđenje. □

Primjer 2.8. Dokazati da je $\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.



Slika 8.



Slika 9.

Rješenje: Konstruišemo pravilan sedmougao $ABCDEF G$, upisan u kružnicu k prečnika $|AK|$. Neka je $\sphericalangle DOE = \frac{2\pi}{7} = 4\alpha$, a $\sphericalangle DAK = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$ (kao centralni i periferijski uglovi), tj. $\alpha = \frac{\pi}{14}$ (v. Sliku 8).

Tako je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC = \sphericalangle EAD = \sphericalangle FAE = \sphericalangle GAF = 2\alpha$ i neka je $|BG| = |CA| = a$, $|CF| = |DA| = b$ i $|AB| = |BC| = |CD| = |EF| = |FG| = |GA| = c$.

Trougao $\triangle ABG$ je jednakokraki (v. Sliku 9),

pa je u $\triangle ABM$

$$\sin 5\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{c} = \frac{a}{2c} \iff a = 2c \cdot \sin 5\alpha = 2c \cdot \sin 5 \frac{\pi}{14}.$$

Slično je u $\triangle ACF$: $b = 2a \cdot \sin 3\alpha = 2a \cdot \sin \frac{3\pi}{14}$, a u $\triangle ADE$: $c = 2b \cdot \sin \alpha = 2b \cdot \sin \frac{\pi}{14}$. Nakon množenja tri posljednje jednakosti dobijamo:

$$a \cdot b \cdot c = 8a \cdot b \cdot c \cdot \sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} \iff \frac{1}{8} = \sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14}. \quad \square$$

Primjer 2.9. Dokazati da je $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$.

Rješenje: Neka je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki $|AC| = |BC|$, $\sphericalangle ACB = \alpha = 36^\circ$, $|AB| < |AC|$ i $2 \cdot |AB| > |AC|$. Lako nalazimo da je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 72^\circ = 2\alpha$ (v. Sliku 10). Na kraku BC odredimo tačku D tako da je $|AB| = |AD|$. Tada je $|AD| = |CD|$ (zašto?). Neka je $x = |AD| = |CD| = |AB|$. Sada imamo: $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle ADB = 2\alpha = \sphericalangle DBA = 72^\circ$, pa je i $\sphericalangle BAD = \alpha$. Neka je $|CD| = 1$. Povucimo visinu DE u trouglu $\triangle ADC$. Tada je $|AC| = 2 \cdot |CE| = 2 \cdot \cos \alpha =$ (u pravouglom trouglu $\triangle DEC$ je $\cos \alpha = \frac{|CE|}{1} \iff \cos 36^\circ = \frac{|CE|}{1} = |CE|) = 2 \cdot \cos 36^\circ$.

Povucimo sada visinu AF u trouglu $\triangle ABD$. U tom slučaju je

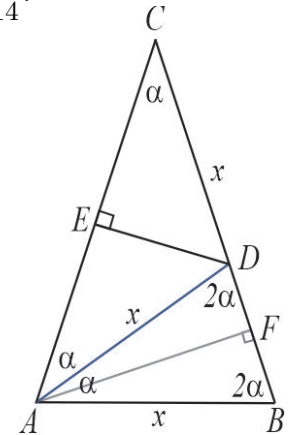
$$|BD| = 2 \cdot |BF| = (\text{u pravouglom trouglu } \triangle ABF \text{ je } \cos 2\alpha = \frac{|BF|}{x} \iff \cos 72^\circ = \frac{|BF|}{1} = |BF|) = 2 \cdot \cos 72^\circ.$$

Konačno je

$$|BC| = |BD| + |DC| \iff |AC| = |BD| + |DC| \iff 2 \cdot \cos 36^\circ = 2 \cdot \cos 72^\circ + 1 \iff \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}, \text{ q.e.d.} \quad \square$$

Primjer 2.10. Dokazati da je $\frac{1}{\sin (25\frac{5}{7})^\circ} = \frac{1}{\sin (51\frac{3}{7})^\circ} + \frac{1}{\sin (77\frac{1}{7})^\circ}$.

Rješenje: Neka je $\alpha = (25\frac{5}{7})^\circ = (\frac{180}{7})^\circ$. Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$), $\sphericalangle ACB = \alpha$, ($|AB| < |CB|$) (v. Sliku 11). Odredimo na kraku BC , tačku D tako da je $|BD| = |AB| = y$. U trouglu $\triangle ABC$ je



Slika 10.

$$2 \cdot \sphericalangle BAC + \alpha = 180^\circ \iff \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - \left(\frac{180}{7}\right)^\circ}{2} = 3 \cdot \left(\frac{180}{7}\right)^\circ = 3\alpha$$

Kako je trougao $\triangle ABD$ jednakokraki, slijedi da je

$$2 \cdot \sphericalangle BAD = 180^\circ - 3\alpha \iff \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = \frac{180^\circ - 3\left(\frac{180}{7}\right)^\circ}{2} = 2 \cdot \left(\frac{180}{7}\right)^\circ = 2\alpha .$$

Sa Slike 11 vidimo da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB - \sphericalangle BAD = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$, pa zbog $\sphericalangle ACD = \alpha$ trougao $\triangle ACD$ je jednakokraki i $|AD| = |CD| = x$. Neka je E projekcija tačke A na BD i neka je $|AE| = 1$. Sada imamo da je u pravouglom trouglu $\triangle AEC$:

$$\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{|AC|}, \text{ tj. } |AC| = \frac{1}{\sin \alpha} = |BC| . \quad (15)$$

U pravouglom trouglu $\triangle AED$ je

$$\sin 2\alpha = \frac{|AE|}{|AD|} \iff |AD| = \frac{|AE|}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} , \quad (16)$$

a u pravouglom trouglu $\triangle AEB$ je

$$\sin 3\alpha = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{1}{|AB|} \iff |AB| = \frac{1}{\sin 3\alpha} . \quad (17)$$

Zbog, $|BC| = |BD| + |DC| = |AB| + |AD|$ je prema (15), (16) i (17)

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha} ,$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ} = \frac{1}{\sin \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \frac{1}{\sin \left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}, \quad q.e.d. \quad \square$$

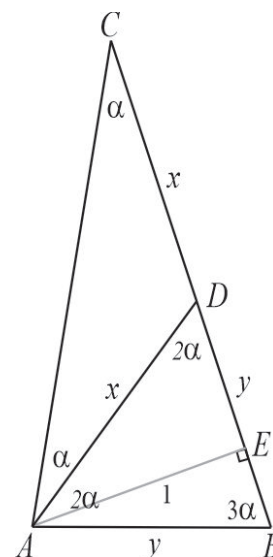
Zaključak

Ovaj članak smo napisali zato što mislimo, da kada god u nastavi matematike imamo priliku da nešto prikažemo geometrijski, tu priliku ne treba propuštati, jer mišljenje u slikama pomaže u pojednostavljenju i razumijevanju. Ako i čitaoci misle tako, onda je ovaj članak ispunio cilj. Čitaocima predlažemo da zadatke riješe i na neke druge načine, a napominjemo da je takvih drugih načina puno.

Možda, neko od čitaoca riješi ove zadatke na neke druge načine i napiše članak za EVOLVENTU s tim rješenjima?

Literatura

- [1] J. Carstesen and A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, Vol. 1 (1997), No. 2, 87-88.
- [2] A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Nastava matematike (Beograd), LVIII, Vol. 58 (2013), 31-34.
- [3] A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekaterih trigonometrijskih enakosti*, Presek 41 (2013—2014), 1, 1-4.



Slika 11.

Magičnost zvjezdastih poligona

Sanela Halilović¹, Šejla Jusić²

¹ *Privodno-matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli*

² *Tehnički fakultet, Univerzitet u Bihaću*

Sažetak: U ovom radu je obrađena tematika zvjezdastih poligona, koji su zbog svog specifičnog izgleda dugo vremena privlačili pažnju umjetnika i matematičara. Kod ovih poligona smo određivali unutrašnje uglove, sumu unutrašnjih uglova i površinu poligona. Također su navedeni neki posebni zvjezdasti poligoni kao što su pentagram, heksagram, oktagram i Lakshmi zvijezda. Pokazali smo da se kod pravilnih zvjezdastih poligona pojavljuju zlatni, srebrni i Córdoba omjer, te su korišteni kao uzorci u mnogim djelima likovne umjetnosti i arhitekture. U završnom dijelu rada pažnja je posvećena magičnim zvjezdastim poligonima.

1. Uvod

Zvjezdasti poligoni su jedna posebna vrsta nekonveksnih poligona. Zanimljivi su po svojoj geometrijskoj strukturi, vezi sa poznatim veličinama zlatnog i srebrnog omjera, pa ih susrećemo u raznim matematičkim problemima. Od davnina privlače pažnju umjetnika, te su se kao uzorci koristili u ukrašavanju poznatih historijskih građevina. Pojedini zvjezdasti poligoni koji su dobili i posebne nazive (pentagram, Davidova zvijezda, zvijezda Lakshmi, oktagram itd.) predstavljaju značajne simbole u pojedinim kulturama, a pripisuju im se i neke magične moći. Da bismo definisali poligon, prisjetimo se najprije nekih matematičkih definicija i činjenica.

Definicija 1.1. *Izlomljena linija je unija od konačno mnogo različitih duži $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ u ravni, zadanih u određenom poretku, tako da se jedan kraj svake duži (osim zadnje) podudara s jednim krajem naredne duži. Duži koje čine izlomljenu liniju zovu se njezine **stranice**, njihovi krajevi su njeni **vrhovi**. S obzirom na dani poredak duži i vrhova, prvi vrh prve duži A_1 je početak, a drugi vrh zadnje duži A_n je kraj izlomljene linije.*

Izlomljena linija koja se sastoji od duži $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ zapisuje se samo pomoću vrhova $A_1A_1 \dots A_n$.

Izlomljena linija je *zatvorena* ako joj se početak i kraj podudaraju.

Izlomljena linija je *jednostavna* ako svaka njena tačka leži ili na samo jednoj njenoj stranici ili na samo dvjema stranicama kod kojih je ta tačka jedan kraj. U suprotnom se izlomljena linija zove *samopresijecajuća* izlomljena linija.

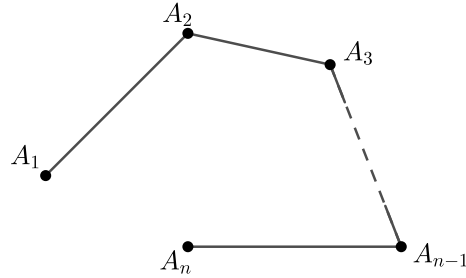
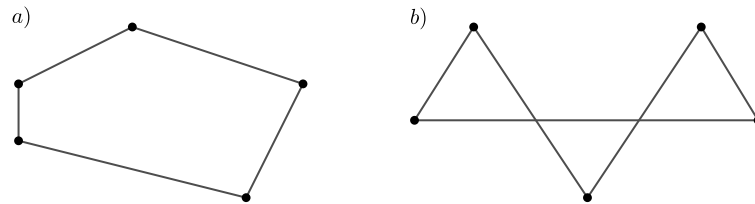
Zatvorena izlomljena linija se zove još i *jednodimenzionalni poligon*. Ako je ta linija i jednostavna onda se takav poligon zove *jednostavan poligon* ili *poligonalna kružnica*, a inače je *nejednostavan* ili *zvjezdast* poligon.

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet

Cljučne riječi: zvjezdasti poligon, pentagram, zlatni rez, srebrni omjer, Córdoba omjer, magična zvijezda

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 2023.

Slika 1: Izlomljena linija $A_1A_2 \dots A_n$ 

Slika 2: a) Jednostavan jednodimenzionalni poligon i b) nejednostavan (zvjezdast) poligon

Jednostavni dvodimenzionalni poligon je unija jednostavnog jednodimenzionalnog poligona i njegove unutrašnjosti. Jednostavni jednodimenzionalni poligon se tada zove *rub* ili *obod* (*kontura*) danog dvodimenzionalnog poligona. Jednostavni dvodimenzionalni poligon ćemo kraće zvati *poligon* ili *mnogougao*, a ukoliko ima n vrhova zvat ćemo ga n -*tougao*.

Jedna od podjela poligona je na

- konveksne i
- nekonveksne (konkavne) poligone.

Poligon je *konveksan* ako se sve tačke duži čiji vrhovi pripadaju poligonu, također pripadaju tom poligonu.

Prije nego što iskažemo sljedeću teoremu najprije ćemo se prisjetiti šta znači da je skup konveksan. Naime, za skup S u ravni kažemo da je konveksan ako vrijedi $A, B \in S \Rightarrow \overline{AB} \subseteq S$.

Teorem 1.2. *Konveksni poligon u ravni je konveksan skup.*

Dokaz: Neka je M_i poluravan u kojoj se nalazi poligon $P = A_1A_2 \dots A_n$ određena stranicom $\overline{A_iA_{i+1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($A_{n+1} = A_1$). M_i je konveksan skup, a konveksni poligon je očito jednak presjeku $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$. Kako je presjek konveksnih skupova ponovo konveksan skup, to je tvrdnja dokazana. \square

Važna vrsta poligona su *pravilni* poligoni. Pravilni poligoni su oni poligoni koji imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve uglove. Treba imati na umu, da samo za trougao iz jednakosti stranica slijedi jednakost uglova i obratno. Naime, za svaki $n \geq 4$ postoji n -*tougao* kojem su sve stranice jednake, a uglovi različiti i obratno.

2. Zvjezdasti poligoni

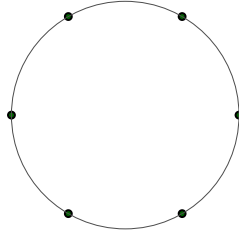
Posebna vrsta nekonveksnog (konkavnog) poligona jeste zvjezdasti poligon. Samo pravilni zvjezdasti poligoni su detaljnije istraženi. Zbog svog izgleda, pravilni zvjezdasti poligoni su stoljećima privlačili pažnju

umjetnika i matematičara. Prvi koji je proučavao njihova geometrijska svojstva je bio engleski nadbiskup od Cathenburyja, matematičar i filozof Thomas Bradwardin. Međutim, njegove bilješke su ostale neotkrivene godinama nakon njegove smrti. Johannes Kepler ih je također opisivao u prvom i drugom poglavlju knjige *Harmonije svijeta*. U 19. stoljeću je poznati matematičar Coxeter predstavio detaljnu teoriju pravilnih zvjezdastih poligona dokazavši brojna geometrijska svojstva.

Definicija 2.1. Neka su n i p prirodni brojevi, $n \geq 3$, te neka je na kružnici k na međusobno jednakim udaljenostima raspoređeno n tačaka. Povezivanjem svake p -te tačke dobija se figura koju zovemo **pravilni poligon**. Ako je $p \geq 2$ i $p \neq \frac{n}{2}$ onda dobijamo **pravilni zvjezdasti poligon**. Broj p se zove **gustoća** ili **kružna opisanost** poligona. Kažemo još da poligon ima p **opisanost**.

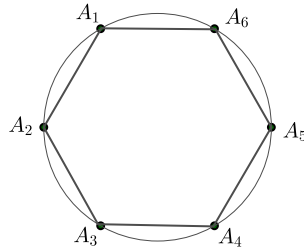
Pravilni zvjezdasti poligon se obilježava sa Schäffi simbolom $\left\{ \frac{n}{p} \right\}$.

Kad bi bilo $p = 0$ onda vrhovi ne bi bili spojeni i ne bismo mogli definisati niti unutrašnji ugao, niti bismo mogli računati površinu. Ipak, takav poligon zovemo *diskretnom zvijezdom*.



Slika 3: Diskretna zvijezda

Kad bi bilo $p = 1$ onda bismo spajali svaki susjedni vrh i dobili bismo pravilni konveksni poligon s n vrhova i označavamo ga onda s $\{n\}$.

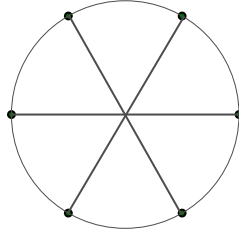
Slika 4: Pravilni poligon $\{6\}$

Primjedba 2.2. Kod označavanja tačaka poligona koristimo smjer obrnut kretanju kazaljke na satu, tzv. pozitivna orijentacija.

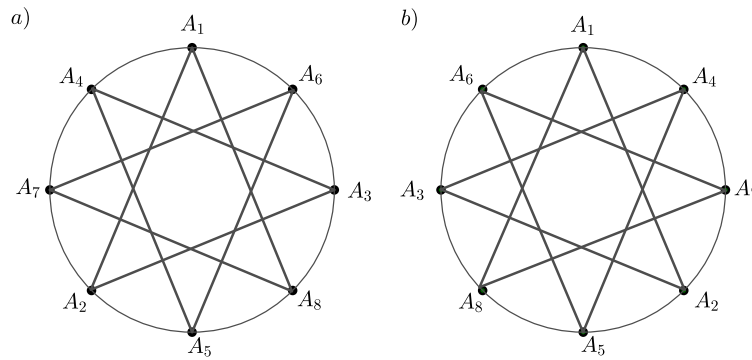
Kad bi bilo $p = \frac{n}{2}$ i n paran broj, onda bismo spajali samo suprotne vrhove i dobili bismo figuru koju nazivamo *asteriks* (Slika 5).

Posmatrajmo zvjezdaste poligone $\left\{ \frac{8}{3} \right\}$ i $\left\{ \frac{8}{5} \right\}$ (Slika 6). Vidimo da su $\left\{ \frac{8}{3} \right\}$ i $\left\{ \frac{8}{5} \right\}$ dva ista zvjezdasta poligona. Naime, spajanjem svake p -te tačke i spajanjem svake $(n - p)$ -te tačke dobijamo isti poligon.

Zbog svega navedenog možemo smatrati da je $p < \frac{n}{2}$ bez ikakvog smanjenja općenitosti. Broj p se naziva *kružna opisanost* jer predstavlja broj krugova koji se opišu kad obilazimo kružnicu redom od tačke A_1 do tačke A_n i onda se vratimo na A_1 . Tako za pravilne konveksne poligone vrijedi $p = 1$. Za zvjezdaste poligone



Slika 5: Asteriks

Slika 6: Pravilni zvjezdasti poligoni a) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$, b) $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

na Slikama 6 a) i 7 vidimo da se običu 3 kruga za poligon $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ i 2 kruga za poligon $\left\{\frac{8}{2}\right\}$ kad obilazimo redom tačke $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_7 - A_8 - A_1$.

Posmatrajmo sad konstrukciju poligona $\left\{\frac{8}{2}\right\}$.

Vidimo da u nekim slučajevima, kao npr. $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ možemo obići sve vrhove u jednom potezu, dok u drugim slučajevima kao npr. $\left\{\frac{8}{2}\right\}$ crtanje pravilnog zvjezdastog poligona završi već nakon par koraka iako nisu svi vrhovi posjećeni. Razlika je u tome što su u prvom slučaju brojevi $n = 8$ i $p = 3$ relativno prosti, a u drugom slučaju $n = 8$ i $p = 2$ nisu relativno prosti. Ukoliko svi vrhovi nisu posjećeni, onda u sljedećem koraku odaberemo prvi sljedeći slobodan vrh i ponavljamo postupak sve dok svi vrhovi ne budu posjećeni tačno jedanput.

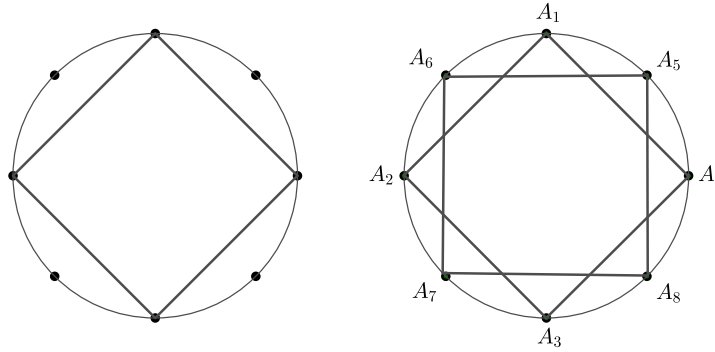
Dakle, ako n i p imaju najveći zajednički djelitelj $d > 1$ onda se $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ sastoji od d poligona $\left\{\frac{n/d}{p/d}\right\}$. Tada kažemo da je $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ višestruki poligon.

Ukoliko su n i p relativno prosti, tada takve zvjezdaste poligone nazivamo *jednostavnim pravilnim zvjezdastim poligonima*.

Primjedba 2.3. Presječne tačke u kojima se stranice mnogougla međusobno presijecaju ne ubrajamo u vrhove mnogougla.

Za svaki prirodan broj $n \geq 3$ postoji tačno jedan poligon s n vrhova kod kojeg su sve stranice jednakih dužina, svi uglovi jednaki i ima opisanost 1. Takav poligon je konveksan, tj. za svake svoje dvije tačke sadrži i sve tačke koje se nalaze između njih. Svi ostali poligoni s n vrhova koji imaju sve stranice jednakih dužina i sve jednake uglove su nekonveksni i imaju opisanost veću od 1.

Konveksni poligon koji ima sve stranice jednake dužine i sve jednake uglove nazivamo *pravilni konveksni poligon*. Sve ostale poligone koji imaju jednake stranice i jednake uglove ćemo zvati *pravilnim nekonveksnim poligonom* ili *zvjezdastim pravilnim poligonom*.

Slika 7: Konstrukcija pravilnog zvjezdastog poligona $\left\{\frac{8}{2}\right\}$

Definicija 2.4. Funkcija $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, koja prirodnom broju n pridružuje broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n , koji su relativno prosti s n , naziva se **Eulerova funkcija**.

Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.5. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Broj svih pravilnih poligona (konveksnih ili nekonveksnih) s n vrhova jednak je $\frac{\varphi(n)}{2}$.

Dokaz: Dokaz se može pronaći u [7]. \square

2.1. Unutrašnji ugao pravilnih zvjezdastih poligona

Za veličinu unutrašnjeg ugla pravilnog zvjezdastog poligona vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.6. Unutrašnji ugao pri vrhu pravilnog $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdastog poligona iznosi $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}p$.

Dokaz: Tačka T_0 se rotacijom za $\frac{360^\circ}{n} \cdot 2p$ oko središta S kružnice na kojoj leže vrhovi posmatrane figure preslika u tačku T_{2p} . Tada je

$$\angle T_0ST_{2p} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot 2p.$$

Na Slici 8 vidimo da se zaista tačka T_0 rotacijom za $\frac{360^\circ}{12} \cdot 2 \cdot 5 = 300^\circ$ preslika u tačku $T_{2 \cdot 5} = T_{10}$. Kako je $\angle T_0ST_{2p}$ centralni ugao nad tetivom $\overline{T_0T_{2p}}$ i $\angle T_0T_pT_{2p}$ periferijski ugao nad istom tom tetivom, to je

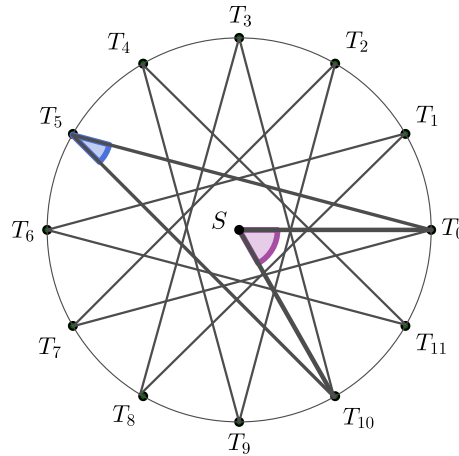
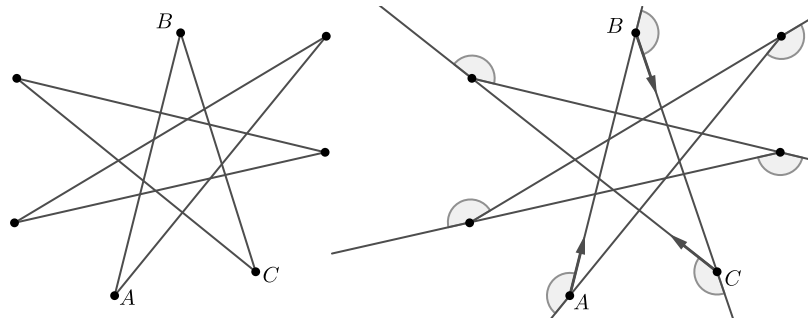
$$\angle T_0T_pT_{2p} = \frac{360^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot 2p}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot p. \quad (1)$$

\square

Kako u pravilnom $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdastom poligonu ima ukupno n vrhova, onda je zbir unutrašnjih uglova jednak

$$S_n = n \cdot \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot p\right) = (n - 2p) \cdot 180^\circ. \quad (2)$$

Ova relacija vrijedi i za nepravilne zvjezdaste poligone. Nepravilne zvjezdaste poligone označavamo sa $\left[\frac{n}{p}\right]$. Naime, neka je zadan nepravilni zvjezdasti poligon $\left[\frac{n}{p}\right]$ i neka su n i p relativno prosti. Na Slici 9 je prikazan

Slika 8: Pravilni zvjezdasti poligon $\left\{\frac{12}{5}\right\}$.Slika 9: Nepravilni zvjezdasti poligon $\left[\frac{7}{3}\right]$

nepravilni zvjezdasti poligon $\left[\frac{7}{3}\right]$. Zamislimo mrava koji putuje od tačke A do tačke B , okrećući se kroz označeni vanjski ugao, a zatim nastavljaajući do C ponovo se okrećući itd. Kada se mrav vrati u A gledat će u istom smjeru kao i kad je krenuo. Ukupno skretanje su tri potpuna kruga.

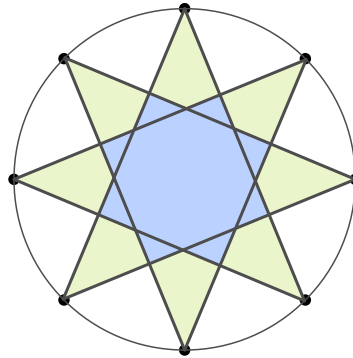
Dakle, suma svih vanjskih uglova je $3 \cdot 360^\circ$. Kako je svaki unutrašnji ugao jednak razlici ispruženog ugla i odgovarajućeg vanjskog ugla, to je suma svih unutrašnjih uglova jednaka $7 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 360^\circ = (7 - 2 \cdot 3)180^\circ$. Kada zamijenimo $\left[\frac{7}{3}\right]$ s $\left[\frac{n}{p}\right]$ dobijamo da je suma unutrašnjih uglova $(n - 2p)180^\circ$.

2.2. Površina pravilnih zvjezdastih poligona

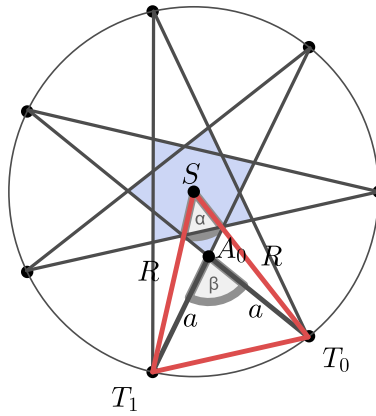
Unutar svakog $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ pravilnog zvjezdastog poligona možemo uočiti $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$ pravilni zvjezdasti poligon. Unutar $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$ možemo uočiti pravilni $\left\{\frac{n}{p-2}\right\}$ zvjezdasti poligon. Dakle, unutar svakog $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ pravilnog zvjezdastog poligona postoji p pravilnih zvjezdastih poligona čija se gustoća razlikuje za 1.

Svaki pravilni $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdasti poligon možemo rastaviti na $1 + np - n$ geometrijskih figura, i to jedan pravilni poligon, n trouglova i $n(p - 2)$ deltoida.

Na Slici 10 vidimo da se $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ rastavlja na jedan pravilni 8-ugao (osmorougao), 8 trouglova i 8 deltoida. Poluprečnik kružnice koja je opisana pravilnom $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdastom poligonu označimo s R . Površinu ovog poligona ćemo odrediti tako da od površine pravilnog n -tougla oduzmemo površinu jednakokrakih trouglova s kracima koji se podudaraju sa krakovima pravilnog zvjezdastog poligona.



Slika 10: Pravilni zvjezdasti poligoni $\{\frac{8}{3}\}$ i $\{\frac{8}{2}\}$ (plave boje)



Slika 11: Pravilni zvjezdasti poligon $\{\frac{7}{3}\}$

Najprije ćemo izračunati površinu pravilnog n -tougla. Podijelit ćemo n -tougao na n podudarnih jednakokrakih trouglova s krakom dužine R i uglom prvi vrhu S koji iznosi $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Površina takvog trougla je

$$P_{\Delta T_0 S T_1} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Kako se n -terougao sastoji od n takvih trouglova, to je njegova površina

$$P_{\{n\}} = n \cdot P_{\Delta T_0 S T_1} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}. \tag{3}$$

Sad treba odrediti površinu trouglova $\Delta T_i A_i T_{i+1}$, gdje $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ i A_i je sjecište (presjek) duži koje spajaju vrhove pravilnog poligona. Kako ovi trouglovi imaju jednake krakove i ugao između njih, to su prema pravilu SUS ovi trouglovi podudarni i dovoljno je izračunati površinu jednog od njih. Izračunajmo površinu trougla $T_0 A_0 T_1$ (pogledati Sliku 11). Kao što smo rekli, unutar pravilnog $\{\frac{n}{p}\}$ zvjezdastog poligona nalazi se pravilni $\{\frac{n}{p-1}\}$ zvjezdasti poligon. Označen je plavom bojom. Unutrašnji ugao pri vrhu A_0 zvjezdastog

poligona $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$ je unakrsan uglu $\beta = \angle T_0 A_0 T_1$, pa zbog (1) vrijedi $\beta = 180^\circ - 360^\circ \frac{p-1}{n}$.

Treba još izračunati dužinu kraka $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ pravilnog zvjezdastog poligona. Posmatrajmo trouglove $\triangle T_0 S T_1$ i $\triangle T_0 A_0 T_1$. Iz $\triangle T_0 S T_1$ je $|T_0 T_1| = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, tj.

$$|T_0 T_1| = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad (4)$$

Iz $\triangle T_0 A_0 T_1$ je

$$|T_0 T_1| = 2a \sin \frac{\beta}{2} = 2a \sin \left(90^\circ - 180^\circ \frac{p-1}{n}\right) = 2a \cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (5)$$

Izjednačavanjem jednakosti (4) i (5) dobijamo

$$a = R \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)}. \quad (6)$$

Površina trougla $\triangle T_0 A_0 T_1$ je

$$P_{\triangle T_0 A_0 T_1} = \frac{1}{2} a^2 \sin \left(180^\circ - 360^\circ \frac{p-1}{n}\right) = \frac{1}{2} a^2 \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (7)$$

Površinu pravilnog $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdastog poligona se računa po formuli

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = P_{\{n\}} - n \cdot P_{\triangle T_0 A_0 T_1}.$$

Uvrštavanjem izraza (3) i (7) u prethodnu jednakost dobijamo

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} - \frac{n}{2} a^2 \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (8)$$

Uvrstimo li (6) u (8), dobijamo

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} - \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}}{\cos^2 \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)} \cdot \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right).$$

Primjenom formule $\sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right) = 2 \sin \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right) \cdot \cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)$, dobijamo sljedeću formulu za površinu

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = nR^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \left(\cos \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ(p-1)}{n} \right). \quad (9)$$

Obim pravilnog $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ zvjezdastog poligona računamo po formuli $O = 2na$, jer on sadrži $2n$ kraka dužine a . Uvrštavanjem (6) dobijamo

$$O = 2nR \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)}. \quad (10)$$

Primjer 2.7. Vrtlar Maksim želi u svome vrtu posaditi cvijeće u obliku pravilnog $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ zvjezdastog poligona, i taj cvjetnjak ograditi žicom tako da se na krajevima svakog kraka postavi stupac koji će držati žicu. Ukoliko Maksim želi da su suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog poligona udaljeni 2 m, odredite

- (1) površinu prekrivenu cvijećem,
- (2) potrebnu dužinu žice i

(3) broj potrebnih stubova.

Rješenje: Suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog poligona udaljeni su 2 m, pa je poluprečnik kružnice opisane oko njega $R = 1$ m.

1. Površinu pravilnog $\{\frac{10}{3}\}$ zvjezdastog poligona računamo po formuli (9). Sada je

$$P = 10 \cdot (1 \text{ m})^2 \cdot \sin 18^\circ (\cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ) \approx 2,245 \text{ m}^2.$$

Dakle, površina vrta je približno 2,245 m².

2. Da bismo odredili koliko je potrebno metara žice izračunat ćemo obim cvjetnjaka. Obim računamo po formuli (10), pa je

$$O = 2 \cdot 10 \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ} \approx 7,64 \text{ m}.$$

Potrebno je otprilike 7,64 m žice da bi se ogradio cvjetnjak.

3. Odredimo sada i broj potrebnih stupaca. Broj stupaca je jednak zbiru broja vrhova i broja presječnih tačaka koji odgovara broju vanjskih deltoida u pravilnom zvjezdastom mnogouglu. Naime, presječne tačke su 2 vrha deltoida, no kako je jedna presječna tačka vrh od dva deltoida, to je broj presječnica jednak $\frac{2 \cdot 10}{2} = 10$ budući da presječne tačke brojimo dvaput. Stoga je broj stubova jednak $10 + 10 = 20$.

□

2.3. Neki zvjezdasti poligoni

Mnogi pravilni zvjezdasti poligoni imaju svoje ime. Tako je:

- $\{\frac{5}{2}\}$ – pentagram;
- $\{\frac{6}{2}\}$ – heksagram, Davidova zvijezda, Solomonov pečat;
- $\{\frac{8}{2}\}$ – zvijezda Lakshmi;
- $\{\frac{8}{3}\}$ – oktagram.

2.3.1. Pentagram

Pravilni $\{\frac{5}{2}\}$ zvjezdasti poligon se popularnije naziva pentagram. Još u antičkom razdoblju je predstavljao planete: Merkur, Veneru, Mars, Jupiter i Saturn te je simbolizirao vječnost. Također je znak prepoznavanja učenika pitagorejske škole, a sakralne građevine iz perioda srednjeg vijeka gotovo su sigurno ukrašene ornamentima takvog oblika. U srednjem vijeku je pentagram služio u magijske svrhe te su ga također koristili umjetnici i graditelji. Danas se obrnuti pentagram povezuje s okultizmom i crnom magijom.

Pentagram je direktno povezan sa zlatnim rezom i zlatnim trouglom.

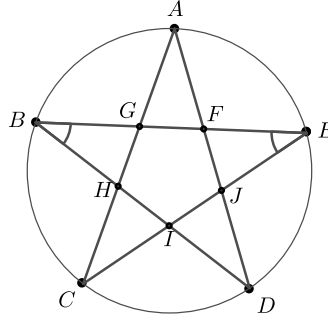
Kažemo da su dvije duži u omjeru zlatnog reza ako se dužina veće odnosi prema dužini manje duži isto kao što se zbir njihovih dužina odnosi prema dužini veće duži. Taj omjer iznosi $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a naziva se još i božanski ili zlatni omjer.

Zlatni trougao je jednakokraki trougao u kojem se dužina kraka i dužina osnovice nalaze u omjeru zlatnog reza.

Zlatni rez nalazimo i u prirodi, umjetnosti i arhitekturi.

Posmatrajmo pentagram na Slici 12. Ovo je pravilni zvjezdasti poligon $\{\frac{5}{2}\}$, pa na osnovu Teorema 2.6 možemo izračunati ugao pri vrhu

$$\angle BEC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 36^\circ, \quad \angle EBD = 36^\circ.$$



Slika 12: Pentagram

Treći ugao u trouglu $\triangle BIE$ iznosi

$$\angle BIE = 180^\circ - (\angle BEC + \angle EBD) = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ.$$

Na osnovu sinusnog teorema za $\triangle BIE$ nalazimo

$$\frac{|BE|}{|BI|} = \frac{\sin \angle BIE}{\sin \angle BEI} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Kako je $|BI| = |BF|$, to slijedi

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \Phi. \quad (11)$$

Prema tome, tačka F dijeli duž \overline{BE} u omjeru zlatnog reza. Analogno vrijedi i za tačke G, H, I, J i duži $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{CE}, \overline{AD}$ redom. Označimo $|BG| = |FE| = a$, $|GF| = b$. Iz (11) slijedi

$$\frac{2a + b}{a + b} = \frac{a + b}{a} = \Phi, \quad (12)$$

tj.

$$\frac{|BG| + |GF| + |FE|}{|BG| + |GF|} = \frac{|BG| + |GF|}{|BG|}.$$

Iz (12) dobijamo $a^2 = b(a + b)$, odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}. \quad (13)$$

Na osnovu (12) i (13) zaključujemo

$$\frac{a}{b} = \Phi. \quad (14)$$

Ovo znači da za trougao $\triangle AGF$ vrijedi

$$\frac{|AF|}{|GF|} = \frac{a}{b} = \Phi, \quad (15)$$

pa je to zlatni trougao. Analogno su i $\triangle BGH$, $\triangle HCI$, $\triangle DIJ$ i $\triangle FEJ$ zlatni trouglovi.

Pokazuje se i da trouglovi $\triangle ACD$, $\triangle BDE$, $\triangle BDA$, $\triangle ACE$ i $\triangle BEC$ predstavljaju zlatne trouglove. Pokažimo da je $\triangle ACD$ zlatni trougao. Uočimo sličnost trouglova $\triangle ACD \sim \triangle AFG$, te stoga vrijedi

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|FG|}.$$

Sada iz (15) slijedi

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \Phi.$$

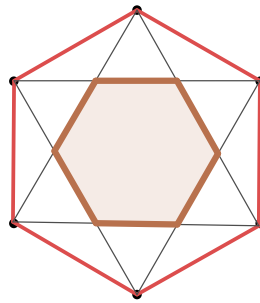
2.3.2. Heksagram

Heksagram (Davidova zvijezda) se pojavljuje na naslovnoj stranici lenjingradskog kodeksa, najstarijem sačuvanom prijepisu Starog zavijeta na hebrejskom jeziku. Datira iz davne 1008. ili 1009. godine. Davidova zvijezda je prepoznatljiv simbol judaizma i nalazi se na zastavi Izraela.



Slika 13: Davidova zvijezda na naslovnoj strani lenjingradskog kodeksa

Heksagram čine dva jednakostranična trougla, od kojih je jedan okrenut prema gore, a drugi prema dole. Tačke u kojima se stranice trougla međusobno sijeku formiraju novi heksagon, što se vidi na Slici 14.

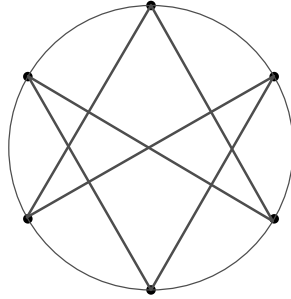


Slika 14: Heksagram

Za heksagram s poluprečnikom opisane kružnice $R = a$ je poluprečnik upisane kružnice unutrašnjem heksagonu $r = \frac{a}{2}$, a poluprečnik opisane kružnice tom heksagonu je $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lako se vidi da će površina unutrašnjeg heksagona biti dva puta manja od površine polaznog heksagrama, a površina heksagrama će biti $\frac{2}{3}$ površine polaznog heksagona.

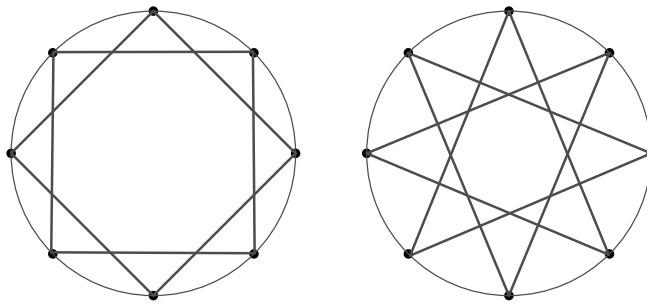
Drugi zvjezdasti heksagon je takozvani jednosmjerni heksagram, kao što je prikazano na Slici 15. Takav naziv je dobio jer se može dobiti u jednom neprekidnom pokretu. On nije pravilan, jer nisu sve stranice iste dužine. Suma unutrašnjih uglova je 240° .



Slika 15: Jednosmjerni heksagram

2.3.3. Zvijezda Lakshmi i oktagram

Dva pravilna zvjezdasta poligona se mogu konstruisati pomoću 8 tačaka ravnomjerno raspoređenih na kružnici i to je zvijezda Lakshmi $\{\frac{8}{2}\}$ i oktagram $\{\frac{8}{3}\}$, kao što je prikazano na Slici 16.



Slika 16: Zvijezda Lakshmi i oktagram

U indijskoj filozofiji Lakshmi zvijezda simboliše *Ashtalakshmi*, osam božanskih oblika koji po svojoj individualnoj prirodi ispunjavaju sve ljudske potrebe i želje.

Dvije zanimljive konstante, *Córdoba omjer* i *srebrni omjer*, se mogu dobiti iz oktagrama. Da bismo to prikazali najprije trebamo pronaći dužine stranica $\{\frac{8}{2}\}$ i $\{\frac{8}{3}\}$ zvjezdastih poligona, tj. dužine dijagonala pravilnog oktagona. Lako se određuje koristeći se pravouglim trouglovima kao što je prikazano na Slici 17.

Ako stavimo da je stranica oktagona dužine 1 i d_1 , d_2 i d_3 njegove dijagonale, onda je

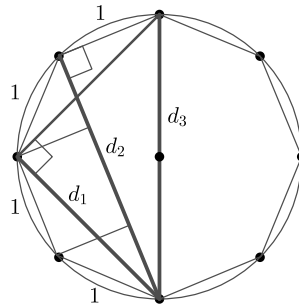
$$d_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad d_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad d_3 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Poluprečnik opisane kružnice $\{\frac{8}{2}\}$ zvijezde je

$$R = \frac{d_3}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\sqrt{2}}} \approx 1,3065.$$

Dobijena konstanta se naziva Córdoba omjer, a prvi ju je otkrio španski arhitekt Rafael de la Hoz. On je otkrio da se ovaj omjer nalazi u mnogim arapskim i mavarskim građevinama kao npr. Mezquita džamija u Córdoba.

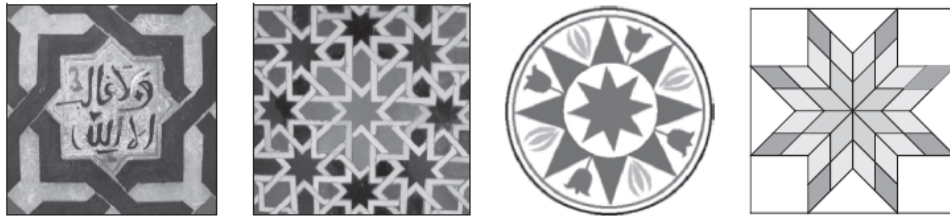
Dužina stranice oktagrama $d_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$ se naziva srebrni omjer zbog zajedničkih osobina s zlatnim omjerom. Čest simbol za srebrni omjer je δ_S .



Slika 17: Dijagonale pravilnog oktagona

I Φ i δ_S se javljaju kao dužine stranica zvjezdastih poligona i imaju jednostavan razvoj u verižni razlomak. Naime, vrijedi

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad \text{i} \quad \delta_S = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$



Slika 18: Zvezdasti poligoni u poznatim građevinama.

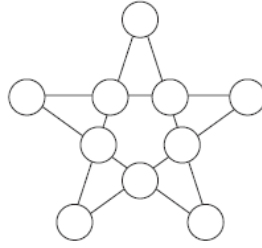
Veličanstvena Alhambra u Granadi je poznata po arabskim ukrasima, a jedan od tih ukrasa vidimo na prvoj slici (u Slici 18) gdje se može uočiti Lakshmi zvijezda $\{\frac{8}{2}\}$ iz Patio del Cuarto Dorado. Na drugoj slici (u Slici 18) je ukras iz Real Alcázar u Sevilji na kojem se nalazi oktagram unutar $\{\frac{8}{2}\}$ zvijezde koja je okružena sa osam $\{\frac{8}{3}\}$ zvijezdi. Treća slika (u Slici 18) predstavlja znak obilja i dobre volje, a nalazi se na građevini iz istočne Pensilvanije sagrađene sredinom 19. stoljeća. Zadnja slika (u Slici 18) prikazuje tradicionalnu zvijezdu Betlehema koja krase mnoge sakralne objekte.

2.4. Zvezdasti poligoni u popularnoj matematici

Postoji mnogo matematičkih problema gdje se javljaju zvjezdasti poligoni. Njih je naročito popularizirao Martin Gardner. Magične zvijezde su slične magičnim kvadratima. Šablon za magični pentagram izgleda kao na Slici 19.

Cilj je popuniti ćelije s brojevima tako da suma brojeva u svakoj liniji bude ista. Ta suma se naziva magična konstanta.

Za magični pentagram je lako pronaći magičnu konstantu. Naime, kako imamo brojeve od 1 do 10, a suma tih brojeva je 55, a svaki broj se pojavljuje u dvije linije, onda suma brojeva u pet linija je $2 \cdot 55 = 110$. Kako je suma u svakoj liniji ista, to je onda magična konstanta, ukoliko magični pentagram postoji, jednaka $\frac{110}{5} = 22$.



Slika 19: Šablon za magični pentagram

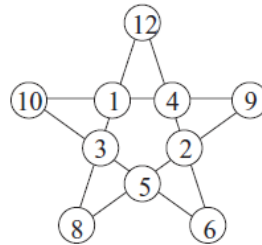
Međutim, magični pentagram ne postoji. Dvije linije koje sadrže broj 1 bi trebale imati šest brojeva čija je suma $2 \cdot (22 - 1) = 42$. Kako je $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$, to 1 i 10 moraju ležati u istoj liniji, neka je to linija A . Neka je B druga linija koja prolazi kroz 1, a C linija kroz 10. Ako linija A sadrži brojeve 1, 10, 4 i 7, onda je nemoguće pronaći brojeve koji bi bili na linijama B i C . Imamo sljedeće mogućnosti navedene u Tablici 1.

A	B	C
1, 10, 2, 9	1, 6, 7, 8	10, 5, 4, 3
1, 10, 3, 8	1, 5, 7, 9	10, 6, 4, 2
1, 10, 5, 6	1, 4, 8, 9	10, 7, 3, 2

Tablica 1: Mogućnosti popunjavanja linija

Kako ni za jednu kombinaciju linije B i C nemaju zajedničkih brojeva, to magični kvadrat ne postoji.

Ukoliko se ne ograničavamo da brojevi moraju biti između 1 i 10, nego samo zahtijevamo da brojevi budu prirodni i različiti, onda možemo popuniti magični pentagram, kao npr. na Slici 20.

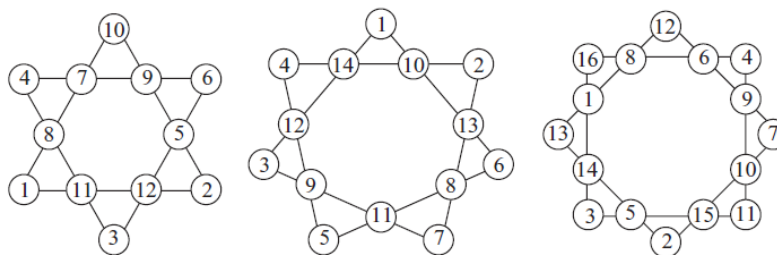


Slika 20: Magični pentagram ukoliko se ne ograničavamo na brojeve od 1 do 10

Magični heksagrami, heptagrami i oktagrami postoje, sa magičnim konstantama 26, 30 i 34, respektivno. Može se pokazati da postoji 80 različitih heksagrama, 72 različita heptagrama i 112 različitih oktagrama (vidi Sliku 21).

3. Zaključak

Zvezdasti poligoni imaju mnoge interesantne osobine i pojavljuju se svuda oko nas. U ovom radu smo samo izložili kako se računaju neki njihovi uglovi i površine, sa posebnim osvrtom na pentagram, heksagram, zvijezdu Lakshmi i oktagram. Pokazali smo vezu između pentagrama i zlatnog omjera, te vezu između oktagrama i srebrnog i Córdoba omjera. Vidjeli smo da se i u popularnoj matematici susrećemo sa zvezdastim poligonima, gdje im se dodaje pridjev *magični*. Zainteresovanim čitaocima možemo toplo preporučiti dalje otkrivanje ljepota i magičnosti zvezdastih poligona.



Slika 21: Magični heksagram, heptagram i oktagram

Literatura

- [1] C. Alsina, R. B. Nelsen: *Icons of Mathematics – An Exploration of Twenty Key Images*, The Mathematical Association of America, 2011.
- [2] A. Corn, Lj. Primorac Gajčić: Pravilni zvjezdasti mnogokuti, *Osječki matematički list*, 17, 161–170, 2017.
- [3] H. S. M. Coxeter: *Introduction to Geometry*, John Wiley & sons, inc., New York, 1969.
- [4] H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes*, Methuen & Co Ltd., London, 1948.
- [5] S. K. Ghosh: *Visibility Algorithms in the Plane*, Cambridge University Press, 2007.
- [6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [7] Grupa studenata Filozofskog fakulteta u Rijeci, O poligonima kojima su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki, *Matematičko – fizički list*, LVIII 2 (2007.–2008.), Zagreb
- [8] V. Benčić: *Elementarna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
- [9] B. Bold: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover, 1982.

O numeričkom rješavanju Cauchyjevog problema Runge-Kutta metodama na Shishkinovoj mreži

Vesna Divković¹, Laura Lukić¹, Elvir Memić¹, Samir Karasuljić¹

¹*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli*

Sažetak: U ovom radu razmatrano je numeričko rješavanje singularno-perturbacionog Cauchyjevog problema Runge-Kutta metodama na Shishkinovoj mreži. Numerička rješenja posmatranog problema dobijena su korištenjem dvije eksplicitne i jedne implicitne Runge-Kutta metode na najjednostavnijoj slojno-adaptivnoj mreži. Na kraju su dobijeni rezultati upoređeni.

1. Uvod

Diferencijalne jednačine koriste se za modeliranje raznih problema u prirodnim, inženjerskim pa čak i u društvenim naukama. U velikom broju ovih problema zahtijeva se da rješenje diferencijalne jednačine zadovoljava i jedan dodatni uslov, početni uslov ili početnu vrijednost.

U realnim problemima, diferencijalne jednačine koje srećemo u matematičkim modelima, su i suviše teške da bismo ih tačno riješili, a nekada je to i nemoguće. Postoje dva pristupa za prevazilaženje prethodne situacije. Prvi pristup je u pojednostavljivanju date diferencijalne jednačine ili matematičkog modela, tako da možemo izračunati tačno rješenje diferencijalne jednačine, zatim dobijeno rješenje koristimo kao aproksimaciju realnog rješenja, to jest originalnog problema. Drugi pristup je da odmah računamo aproksimativno rješenje ili preciznije numeričko rješenje. U najvećem broju slučajeva, drugi pristup je bolji. Dakle, koristimo bolji matematički model, koji je "bliži" realnom problemu, te računamo odgovarajuće numeričko rješenje jer se skoro po pravilu u ovakvim matematičkim modelima pojavljuju "komplikovanije" diferencijalne jednačine, čija tačna rješenja ili ne možemo izračunati ili je to veoma teško.

U nastavku ovog rada razmatraćemo sljedeći Cauchyjev problem,

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Postavljaju se pitanja kada Cauchyjev problem ima rješenje i ako ono postoji da li je to rješenje jedinstveno? Odgovori na ova pitanja dati su u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1. [2, pp 447] *Ako su f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidni na pravougaoniku definisanom sa $|x - x_0| < \alpha$ i $|y - y_0| < \beta$, tada Cauchyjev problem (1) ima jedinstveno neprekidno rješenje na nekom intervalu $|x - x_0| < \gamma$.*

Ciljna skupina: fakultet

Ključne riječi: Cauchyjev problem, Runge-Kutta metode, slojno-adativne mreže,

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: -, 2023.

Vrijednost konstante γ je najmanje $\frac{\beta}{M}$, gdje je M gornja granica za $|f(x, y)|$ na pravougaoniku definisanom u upravo navedenom teoremu.

Kako je već pomenuto, vrlo je uska klasa diferencijalnih jednačina koje se mogu tačno riješiti, pa se stoga pribjegava računanju numeričkog rješenja. Iz standardnih kurseva numeričke matematike poznate su metode za računanje ovakvog rješenja, npr. Eulerova i njene modifikacije, Taylorova, Runge–Kutta, višekoračne i dr.

Osim Cauchyjevog problema (1) često srećemo i njegovu modifikaciju kod koje je prvi izvod pomnožen nekim pozitivnim malim parametrom ε , ($0 < \varepsilon \leq 1$).

$$\begin{cases} \varepsilon y' = \tilde{f}(x, y), & 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

gdje je $f(x, y) \in C^{n,n}([0, a] \times \mathbb{R})$, $n \geq 1$. Poslije dijeljenja prethodne diferencijalne jednačine sa parametrom ε , dobijamo

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0, \end{cases} \quad (3)$$

gdje je $f(x, y) = \frac{\tilde{f}(x, y)}{\varepsilon}$. Neka je \tilde{f} linearna funkcija po y , to jest neka vrijedi $\tilde{f}(x, y) = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x)$, u ovom slučaju Cauchyjev problem (2) poprima sljedeći oblik

$$\begin{cases} \varepsilon y' = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x), & 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0. \end{cases}$$

Ponovo podijelivši prethodnu diferencijalnu jednačinu sa ε , dobijamo

$$\begin{cases} y' = p(x)y + q(x), & 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0, \end{cases} \quad (4)$$

gdje su $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\varepsilon}$ i $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{\varepsilon}$.

Prisustvo parametra ε dovodi do brzih promjena tačnog rješenja y Cacyjevog problema (3) odnosno (4) u nekim dijelovima domena, o čemu će biti više riječi u sljedećoj sekciji. Zbog ovih brzih promjena, klasične metode su neadekvatne za numeričko rješavanje navedenih problema u kojima se pojavljuje perturbacioni parametar ε , stoga je bilo potrebno razviti nove efikasnije metode u kojima se uzima u obzir postojanje pomenutih brzih promjena tačnog rješenja.

Jedna od najširenijih metoda za rješavanje ovakvih problema je metoda slojno–adaptivnih mreža. Procjena tačnog rješenja i njegovih izvoda je veoma važna komponenta u konstruisanju slojno–adaptivnih mreža. U sljedećem teoremu date su ove procjene za problema (3), odnosno za tačno rješenje ovog problema.

Teorem 1.2. [4, pp 66] *Neka je $y(x, \varepsilon)$ rješenje problema (3). Tada za $0 \leq i \leq n$ i $0 \leq x \leq a$, vrijede sljedeće procjene*

$$\left| y^{(i)}(x, \varepsilon) \right| \leq C \{1 + \varepsilon^{-i} \exp(-c(0)x/\varepsilon)\}, \quad (5)$$

ako je $f_y(x, y) \geq c(x) > 0$ i $c(x) \in C[0, a]$;

$$\left| y^{(i)}(x, \varepsilon) \right| \leq C \left[1 + \varepsilon^{-i/(k+1)} \exp(-mx^{k+1}/\varepsilon) + (\varepsilon^{1/(k+1)} + x)^{1-i} \right], \quad (6)$$

ako je $f_y(x, y) = x^k g(x, y)$ i $g_y(x, y) \geq c(x) > 0$, gdje je $c(x) \in C[0, a]$, $0 < m < c \min_{x \in [0, a]} c(x)$, $k \geq 1$ je pozitivan cio broj.

Primjedba 1.3. Posmatrani Cauchyjev problem (1) je najjednostavniji, naime u ovom se problemu pojavljuje diferencijalna jednačina prvog reda. Umjesto diferencijalne jednačine prvog reda, može se pojaviti i diferencijalna jednačina višeg reda kao i sistem diferencijalnih jednačina. Svi ovi slučajevi su detaljno obrađeni u literaturi. Cilj ovog rada je da ukaže na probleme prilikom numeričkog rješavanja Cauchyjevih problema čija tačna rješenja imaju brze promjene, pa je sasvim dovoljno u ovoj nekoj početnoj fazi posmatrati samo Cauchyjeve problema sa diferencijalnom jednačinom prvog reda.

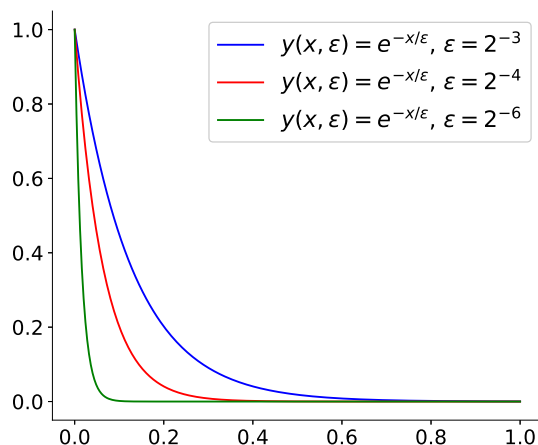
2. Slojno–adaptivne mreže

U ovoj sekciji dati su osnovni razlozi i ideje koje su dovele do konstruisanja slojno–adaptivnih mreža, kao i konstrukcija najjednostavnije slojno–adaptivne mreže. Analiziran je jednostavan Cauchyjev problem čije je tačno rješenje poznato. Numeričko rješenje, za različite vrijednosti perturbacionog parametra ε , izračunato je na ekvidistantnoj mreži i istaknuti su nedostaci u ovakvom pristupu. Upravo ovi nedostaci doveli su do razvoja slojno–adaptivnih mreža.

Posmatrajmo jednostavan testni Cauchyjev problem,

$$\begin{cases} \varepsilon y' = -y, & x \in [0, 1] \\ y(0, \varepsilon) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

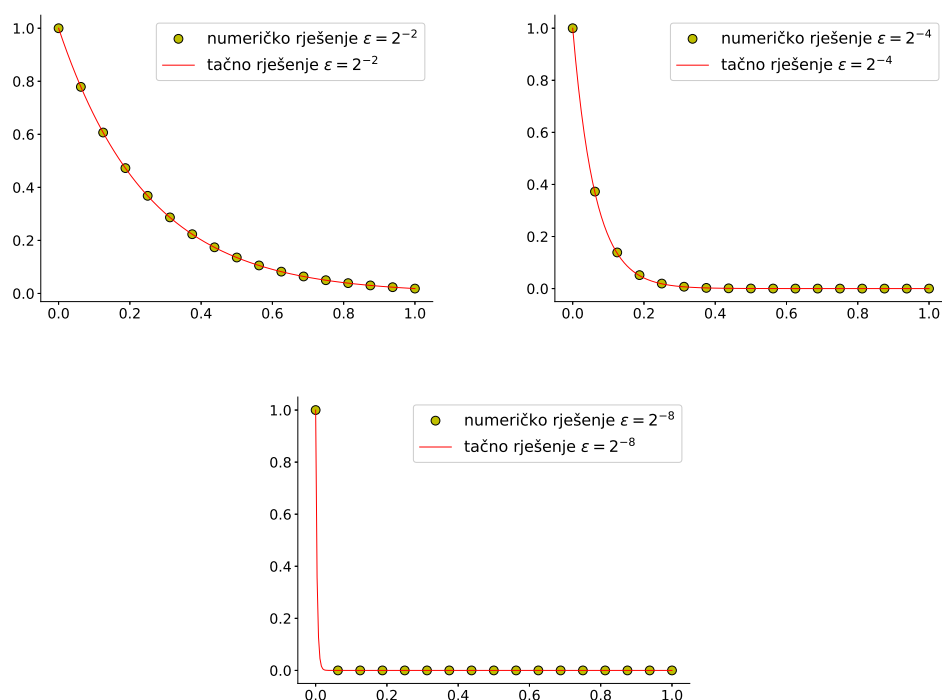
Tačno rješenje ovog problema je $y(x, \varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$. Grafici funkcije $y(x, \varepsilon)$ za $x \in [0, 1]$ dati su na Slici 1, za tri različite vrijednosti parametra ε , $\varepsilon = 2^{-3}$, 2^{-4} i 2^{-6} . Sa grafika je jasno uočiti, a to se da zaključiti i na osnovu osobina funkcije $x \mapsto e^{-x}$, da funkcija ima brze promjene u nekoj okolini tačke $x = 0$.



Slika 1: Grafik funkcije $y(x, \varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$ za različite vrijednosti parametra ε

Ove promjene su brže što je manji parametar ε . Dio domena gdje se dešavaju ove brze promjene nazivamo sloj i ovo je sloj eksponencijalnog tipa.

Kao što je poznato, u opštem slučaju Cauchyjev problem ne možemo tačno riješiti, pa se pribjegava numeričkim metodama. U najvećem broju tih metoda podijelimo domen, na kojem je potrebno da odredimo rješenje, sa određenim brojem čvorova i primijenimo neku od metoda kojom ćemo izračunati numeričko rješenje. Isto tako u najvećem broju slučajeva koristimo ravnomjernu ili uniformnu raspodjelu čvorova, to jest rastojanje između dva susjedna čvora je ekvidistantno. Skup čvorova kojim dijelimo neki segment nazivamo



Slika 2: Grafici tačnog i numeričkog rješenja na uniformnoj mreži

mreža. Ako npr. na segmentu $[0, 1]$ želimo izračunati numeričko rješenje nekog Cauchyjevog problema, podijelimo ga čvorovima za koje vrijedi

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1.$$

Dakle, skup ovih čvorova x_i , $i = 0, 1, \dots, N$ je mreža.

Primjedba 2.1. U savremenoj literaturi češće se koristi izraz tačka mreže umjesto čvor, pa ćemo u nastavku ovog rada koristiti izraz tačka/tačke mreže.

Ako su tačke mreže uniformno raspoređene onda je riječ je o uniformnoj ili ekvidistantnoj mreži, u suprotnom o neekvidistantnoj ili neuniformnoj mreži. Korak mreže ili parametar mreže je rastojanje između dvije susjedne tačke mreže. Kod uniformnih mreža korak mreže je konstantan, obično ga označavamo h i vrijedi $h = \frac{1}{N}$ ako je segment $[0, 1]$ na kojem se računa numeričko rješenje, u slučaju segmenta $[a, b]$ vrijedi $h = \frac{b-a}{N}$. Kod neuniformnih mreža korak mreže računamo $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Uniformne mreže su najjednostavnije pa je samim tim i analiza metoda, koje koriste ovakve mreže, jednostavnija od analize metoda koje koriste neuniformne mreže. Međutim, u mnogim slučajevima uniformne mreže nisu najbolje rješenje za primjenu.

Radi ilustracije zašto uniformne mreže nisu najbolji izbor za rješavanje Cauchyjevih problema, čija tačna rješenja imaju brze promjene, posmatrajmo Sliku 2. Na slici su predstavljena grafici tri numerička i tri tačna rješenja Cauchyjevog problema (7).

Gore lijevo su grafici numeričkog i tačnog rješenja za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-2}$. Rubni sloj u okolini tačke $x = 0$ vrlo je slabo izražen, te je lako uočiti da su tačke koje predstavljaju numeričko rješenje dosta dobro raspoređene na čitavom grafiku. Doduše nešto rjeđe u sloju, ali i dalje zadovoljavajuće.

Na slici gore desno prikazani su grafici obje vrste rješenja ali sada za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-4}$. Već je bolje izražen sloj i odmah se uočava lošija raspodjela tačaka numeričkog rješenja.

Na Slici 2 dole su grafici numeričkog i tačnog rješenja ali za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-8}$. Sloj je sada u veoma uskom dijelu u odnosu na domen, što znači da su promjene tačnog rješenja veoma velike, to jest tačno rješenje se veoma brzo mijenja u sloju.

Treba napomenuti da je korišten isti broj tačaka za računanje numeričkog rješenja u sva tri slučaja, te da je rastojanje između dvije susjedne tačke mreže ekvidistantno. Sa posljednje slike vidimo da tačke koje predstavljaju numeričko rješenje nisu dobro raspoređene, u dijelu grafika koji odgovara sloju nema niti jedna tačka numeričkog rješenja, osim tačke koje odgovara početnom uslovu $y(x_0, \varepsilon) = y_0$. Ovo nije dobra opcija jer nemamo nikakvu informaciju o rješenju u sloju. Da bi se prevazišao ovaj problem možemo povećati broj tačaka, to jest smanjiti rastojanje između dvije susjedne tačke, te bi na taj način podijelili dio domena koji odgovara sloju sa dovoljnim brojem tačaka. Međutim, ovakav pristup je loš sa praktične/kompjutarne strane. Naime, sloj je za ovaj problem širine reda $\mathcal{O}(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$. Neka je greška metode reda $\mathcal{O}(h^3)$, što je uobičajeni red veličine za Runge–Kutta metode drugog reda i neka se zahtijeva da greška ne bude veća od 10^{-6} , ponovimo segment na kojem računamo numeričko rješenje je $[0, 1]$. Sada iz nejednakosti $h^3 \leq 10^{-6}$ dobijamo da je $h \leq 10^{-2}$, drugim riječima segment $[0, 1]$ potrebno je podijeliti na 100 podsegmenta odnosno broj tačaka je $N = 101$. Ovakavo rezonovanje vrijedi kada tačno rješenje nema sloja, ali naš Cauchyjev problem ima sloj i tu činjenicu moramo uzeti u obzir. Neka je $\varepsilon = 10^{-4}$ i sloj je u ovom slučaju širok $\varepsilon |\ln \varepsilon| = 10^{-4} |\ln 10^{-4}| \approx 9 \cdot 10^{-4}$. Da bi bar jedna tačka mreže bila u sloju mora biti ispunjen uslov $h < 0.0009$. Grubo govoreći, broj tačaka mreže mora biti veći od 1111, a to je više od deset puta u odnosu na $N = 101$ i to da bi samo jedna tačka mreže bila u sloju. Naravno, potrebno je mnogo više tačaka od jedne u sloju, pa bi i broj tačaka mreže bio mnogo veći od 1111, odnosno mnogo više od deset puta bi trebalo povećati broj tačaka mreže.

Prethodna diskusija je opisala samo jedan od razloga zašto uniformne mreže nisu pogodne za rješavanje Cauchyjevih problema koji imaju izražene slojeve. Metode koje se koriste za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina, uobičajeno se poopštavaju (kada je to moguće) i konstruišu metode za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ovaj problem sa velikim povećanjem broja tačaka postao bi i veći prelaskom na numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Da bi se izbjegao prethodno opisani problem potreban je drugačiji pristup numeričkom rješavanju Cauchyjevih problema (3), nego što je povećanje broja tačaka uniformne mreže. Jedno od mogućih rješenja u prevazilaženju ovog problema je upotreba mreža koje imaju neuniformnu raspodjelu tačaka. Ovaj pristup pokazao se veoma efikasnim u numeričkom rješavanju rubnih problema. Vratimo se ponovo na Sliku 2 dole. U slučaju korištenja uniformne mreže potrebno je enormno povećati broj tačaka da bi ih bilo dovoljno u sloju. Da bi se izbjeglo povećanje broja tačaka mreže, a samim tim i nepotrebno povećanje vremena računanja a i nepotrebno trošenje resursa računara, potrebno je izvršiti drugačiju raspodjelu tačaka mreže. Ovo radimo na sljedeći način: od ukupnog broja tačaka mreže N jedan dio tačaka koristimo za sloj, dok preostale tačke koristimo za dio mreže koji odgovara domenu van sloja. Rastojanje tačaka u sloju je po pravilu manje od rastojanja preostalih tačaka koje koristimo van sloja.

Jedan od načina generisanje ovakve neuniformne (neekvidistantne) mreže vrši se generativnom funkcijom ϕ , $\phi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$. Ovo je složena funkcija i sastavljena je najmanje od dvije druge funkcije, jedna služi za generisanje tačaka mreže u sloju, a druga za generisanje tačaka van sloja.

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} \phi_1(\xi, \varepsilon), & \xi \in [0, \alpha], \\ \phi_2(\xi, \varepsilon), & \xi \in (\alpha, 1]. \end{cases} \quad (8)$$

Vrijednost parametra α određuje koliko će tačaka mreže biti u sloju, a koliko van sloja. Kada je poznat analitički oblik funkcije ϕ neuniformnu mrežu nije teško generisati. Polazimo od uniformne mreže $\xi_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$; i tačke neuniformne mreže dobijamo na sljedeći način

$$x_i = \phi(\xi_i, \varepsilon), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (9)$$

Postavlja se pitanje kako konstruisati generativnu funkciju ϕ ? Polazna tačka za konstruisanje generativne funkcije su procjene izvoda tačnog rješenja. Iz Teorema 1.2 lako je uočiti da u procjeni izvoda tačnog rješenja

figuriše eksponencijalna funkcija, stoga očekujemo da funkcija kojom generišemo tačke mreže u sloju bude neka logaritamska funkcija. Drugi dio generativne funkcije (druga funkcija) je obično neki polinom kojim generišemo tačke mreže van sloja. Ova drugi dio generativne funkcije se bira tako da generativna funkcija bude barem neprekidna na čitavom domenu.

Prvu neuniformnu mrežu konstruisao je Bakhvalov ([1]) upravo koristeći logaritamsku funkciju za generisanje tačaka u sloju, dok je za generisanje tačaka mreže van sloja koristio linearnu funkciju. Nakon toga Vulanović ([10]) pojednostavljuje konstruisanje generativne funkcije, a važno je napomenuti i veliki doprinos Liseikina ([4, 5, 7]) u konstruisanju mnogih generativnih funkcija odnosno neuniformnih mreža.

U nastavku ovog rada koristimo najjednostavniju neuniformnu mrežu, koju je konstruisao Shishkin ([9]). Ova mreža je sastavljena iz dvije uniformne mreže, jedne sa finijom raspodjelom tačaka (manje rastojanje između tačaka) i drugom grubljom (veće rastojanje između tačaka). Shishkin je konstruisao mrežu koja služi za rješavanje rubnih problema koji imaju eksponencijalni sloj. Pokazao je da funkcija ϕ_1 (koja generiše tačke u sloju) ne mora biti logaritamskog tipa, nego mnogo jednostavnija linearna funkcija, Slika 3. Shishkinovu mrežu možemo shvatiti kao dvije uniformne mreže spojene na odgovarajući način. Dobijena mreža ima boljih i lošijih osobina u odnosu na mreže koje su konstruisali Bakhvalov i Liseikin. Jednostavnija je analiza metoda koje koriste Shishkinovu mrežu u odnosu na Bakhvalovu mrežu i Liseikinove mreže, međutim greška je veća kod upotrebe Shishkinove mreže. Važno je napomenuti da je broj problema koji se mogu efikasno riješiti upotrebom Shishkinove mreže mnogo manji od broja problema koji se mogu riješiti upotrebom veoma fleksibilnih Liseikinovih mreža. Generativna funkcija za Shishkinovu mrežu data je sljedećom formulom

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} 2\sigma\xi, & 0 \leq \xi \leq \alpha, \\ \sigma + \frac{1-\sigma}{1-\alpha}\xi, & \alpha < \xi \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

gdje je $\alpha \in (0, 1)$, $\sigma = \min\{0.5, (n/b)\varepsilon \ln N\}$, $b > 0$ i $n \geq 1$. Veličina σ je tranziciona tačka mreže ili Shishkinova tranziciona tačka i ona određuje mjesto prelaska sa fine na grubu mrežu. Prilikom korištenja Shishkinove mreže za numeričko rješavanje rubnih problema, tipična vrijednost parametra n odgovara stepenu konvergencije metode, dok je parametar b određen Teoremom o procjeni izvoda i $\alpha = 1/2$.

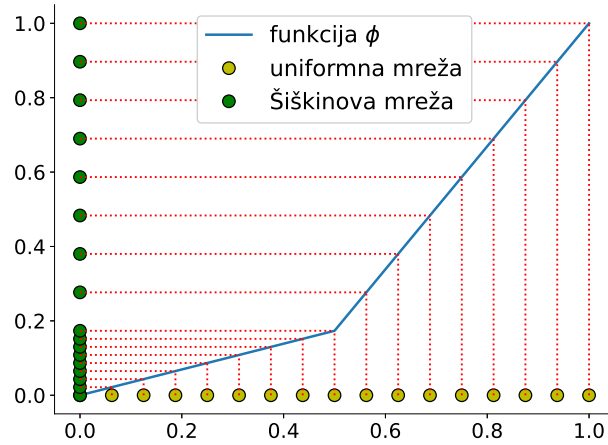
Polazeći sada od generativne funkcije ϕ date formulom (10), Shishkinovu mrežu generišemo koristeći formulu (9). Na Slici 3 dat je grafik funkcije ϕ (plava boja). U funkciju ϕ uvrštavamo vrijednosti $\xi_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$; koje odgovaraju tačkama uniformne mreže. Ove su tačke predstavljene na Slici 3 žutom bojom i nalaze se na x -osi. Odgovarajuće vrijednosti funkcije $\phi(ih)$ predstavljene su zelenom bojom i predstavljene su na y -osi, ovo su tačke Shishkinove mreže, to jest $x_i = \phi(ih) = \phi(\xi_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Na Slici 4 predstavljene su tačke uniformne mreže i dobijene tačke Shishkinove mreže. Sa Slike 4 (desno) vidi se neuniformna raspodjela tačaka mreže, takođe nije teško primijetiti da su tačke mreže kondenzovane u okolini tačke $x = 0$. Ponovimo, u okolini tačke $x = 0$ je sloj i da bi se problem koji nastaje zbog brzih promjena tačnog rješenja u sloju riješio na odgovarajući način, potrebna je ovakva raspodjela tačaka. Više detalja o slojno-adaptivnim mrežama i njihovoj konstrukciji, za razne probleme te različite vrste slojeva, može se naći u Liseikin i dr. ([6]).

Primjedba 2.2. *Prethodno opisani problem, koji je naveden kao razlog korištenja slojno-adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanju Cauchyjevih problema (3), u literaturi se naziva i ekonomičnost računanja. Osim prevazilaženja ovog problema uvođenjem slojno-adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanju problema (3) i sličnih, rješava se i problem stabilnost. Ovo je vrlo ozbiljan problem i prevazilazi okvire ovog rada, stoga ćemo se stabilnosti samo dotaći u numeričkim eksperimentima na kraju rada.*

3. Runge–Kutta metode

Veoma uspješne, u numeričkom rješavanju Cauchyjevih problema, pokazale su se Runge–Kutta metode ([3, 8]). Ovo su jednokoračne metode, dakle u Runge–Kutta metodama za računanje numeričke vrijednosti u tački x_{i+1} to jest y_{i+1} , koristi se samo jedna prethodno izračunata vrijednost y_i , ona koja odgovara tački



Slika 3: Generisanje Shishkinove mreže iz uniformne mreže funkcijom ϕ



Slika 4: Uniformna (lijevo) i Shishkinova mreža (desno)

x_i . Ove dvije vrijednosti x_i i y_i koriste se za računanje aproksimativne jedne ili više vrijednosti funkcije f . Broj ovih aproksimativnih vrijednosti povezan je sa redom ili nivoom Runge–Kutta metoda.

Opšti oblik Runge–Kutta metoda s -tog reda (ili nivoa) je

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^s b_j k_j, \tag{11}$$

gdje je

$$k_j = f \left(x_i + c_j h_i, y_i + h_i \sum_{q=1}^s a_{j,q} k_q \right), j = 1, 2, \dots, s, \tag{12}$$

dok su y_i i y_{i+1} aproksimativne (ili numeričke) vrijednosti koje odgovaraju čvorovima x_i i x_{i+1} , respektivno.

Koeficijenti, koji se pojavljuju u formulama (11) i (12), predstavljeni su u Tabeli 1, a ona predstavlja punu ili implicitnu Runge–Kutta metodu s -tog reda. Osim implicitnih postoje i eksplicitne Runge–Kutta metode. Između ove dvije vrste metoda razlika je u sljedećem: kod eksplicitnih metoda veličine k_j , $j = 1, \dots, s$, računamo koristeći samo prethodno izračunate vrijednosti k_1, \dots, k_{j-1} , za razliku od implicitnih gdje se za računanje veličine k_j mogu koristiti sve veličine k_1, \dots, k_s . Razlika između eksplicitnih i implicitnih metoda dobro je objašnjena u literaturi. Uobičajeno, implicitne metode su komplikovanije, samim tim su teže za korištenje. U slučaju kada je f nelinearna funkcija potrebno je u svakom koraku riješiti nelinearni sistem jednačina. Ali isto tako poznato je da su bolje od eksplicitnih metoda po pitanju stabilnosti.

U Tabeli 2 dati su koeficijenti eksplicitne Runge–Kutta metode s -tog reda.

Isto tako u literaturi pokazano je kako se računaju koeficijenti iz Tabele 1 ili 2 na više načina.

c_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	\dots	$a_{1,s}$
c_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	\dots	$a_{2,s}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	\dots	$a_{s,s}$
	b_1	b_2	\dots	b_s

Tabela 1: Butcherov niz za punu (implicitnu) Runge–Kutta metodu

0	0	0	\dots	0	0
c_2	$a_{2,1}$	0	\dots	0	0
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	\dots	$a_{s,s-1}$	0
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Tabela 2: Butcherov niz za eksplicitnu Runge–Kutta metodu

Eksplicitne Runge–Kutta metode drugog reda. Sada ćemo izračunati koeficijente za eksplicitne Runge–Kutta metode drugog reda. Odgovarajući koeficijenti dati su Tabeli 3.

0	0	0
c_2	$a_{2,1}$	0
	b_1	b_2

Tabela 3: Butcherov niz za eksplicitnu Runge–Kutta metodu reda $s = 2$

Numeričku vrijednost y_{i+1} koja odgovara tački mreže x_{i+1} tačnog rješenja y računamo po formuli

$$y_{i+1} = y_i + h_i(b_1k_1 + b_2k_2), \tag{13}$$

gdje su

$$k_1 = f(x_i + c_1h_i, y_i + h_ia_{1,1}k_1)$$

i

$$k_2 = f(x_i + c_2h_i, y_i + h_ia_{2,1}k_1).$$

Kako je iz tabele 3, $c_1 = 0$ i $a_{1,1} = 0$, to dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + h_i [b_1f(x_i, y_i) + b_2f(x_i + c_2h_i, y_i + h_ia_{2,1}f(x_i, y_i))]. \tag{14}$$

Koeficijente b_1, b_2, c_2 i $a_{2,1}$ određujemo upoređujući Taylorove razvoje za y_{i+1} i $y(x_{i+1})$. Vrijedi

$$y_{i+1} = y_i + h_ib_1f(x_i, y_i) + h_ib_2 [f(x_i, y_i) + f_x(x_i, y_i)c_2h_i + f_y(x_i, y_i)h_ia_{2,1}f(x_i, y_i) + \mathcal{O}(h_i^2)] \tag{15}$$

i

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)h_i + \frac{y''(x_i)}{2}h_i^2 + \mathcal{O}(h_i^3) \\ &= y(x_i) + f(x_i, y(x_i))h_i + \frac{1}{2} [f_x(x_i, y(x_i)) + f_y(x_i, y(x_i))f(x_i, y(x_i))] h_i^2 + \mathcal{O}(h_i^3). \end{aligned} \tag{16}$$

Upoređujući sada izraze iz (15) koji su uz h_i sa izrazima iz (16) takođe uz h_i , te ovaj postupak ponovimo i za h_i^2 , dobijamo sistem

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 a_{2,1} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Sistem (17) je nelinearan sa 3 jednačine i 4 nepoznate i ne možemo ga jednoznačno riješiti. Sljedeća rješenja, odnosno metode se najčešće koriste:

1)

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = a_{2,1} = 1, \\ k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + h_i, y_i + k_1), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h_i(k_1 + k_2), \end{cases} \quad (18)$$

2)

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4}, c_2 = a_{2,1} = \frac{2}{3}, \\ k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \frac{2}{3}h_i, y_i + \frac{2}{3}k_1), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}h_i(k_1 + 3k_2), \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = a_{2,1} = \frac{1}{2}, \\ k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1), \\ y_{i+1} = y_i + h_i k_2. \end{cases}$$

Eksplcitne Runge–Kutta metode trećeg reda. Navedeni postupak možemo iskoristiti i za dobijanje Runge–Kuta metoda višeg reda od dva. Za dobijanje metoda trećeg reda, potrebno je samo u formulama (15) i (16) u razvoj uključiti i druge izvode i iskoristiti izraze uz h_i^3 . Na taj način neke od formula koje dobijamo su

1)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1), k_3 = f(x_i + \frac{3}{4}h_i, y_i + \frac{3}{4}k_2), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}h_i(2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \end{cases} \quad (19)$$

2)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1), k_3 = f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h_i(k_1 + 4k_2 + k_3). \end{cases}$$

Ostale eksplcitne sheme višeg reda dobijaju se na analogan način.

Implicitna Runge–Kutta metoda drugog reda. Nije teško primijetiti da kod eksplicitnih Runge–Kutta metoda, koeficijente sa većim indeksom računamo koristeći koeficijente sa manjim indeksom, npr. kod eksplicitne Runge–Kutta metode trećeg reda, k_2 računamo koristeći k_1 , dok k_3 računamo preko k_1 i k_2 . Dakle, za računanje nekog koeficijenta koristimo već izračunate vrijednosti drugih koeficijenata. Ovo nije slučaj sa implicitnim metodama, kao što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru. Sljedeću implicitnu metodu,

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i + (\frac{1}{2} - \gamma)h_i, y_i + \frac{1}{4}h_ik_1 + (\frac{1}{4} - \gamma)h_ik_2) \\ k_2 = f(x_i + (\frac{1}{2} + \gamma)h_i, y_i + (\frac{1}{4} + \gamma)h_ik_1 + \frac{1}{4}h_ik_2) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h_i(k_1 + k_2), \end{cases} \quad (20)$$

gdje je $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}$, koristimo u numeričkim eksperimentima. Iz formule (20) vidimo da se u izrazu za računanje koeficijenta k_1 pojavljuje koeficijent k_2 i obrnuto. Ovo je razlog zašto se ovakve metode nazivaju implicitnim.

Da bi izračunali numeričku vrijednost y_{i+1} potrebno je da znamo y_i , k_1 i k_2 , zbog toga moramo u svakom koraku riješiti sistem

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i + (\frac{1}{2} - \gamma)h_i, y_i + \frac{1}{4}h_ik_1 + (\frac{1}{4} - \gamma)h_ik_2) \\ k_2 = f(x_i + (\frac{1}{2} + \gamma)h_i, y_i + (\frac{1}{4} + \gamma)h_ik_1 + \frac{1}{4}h_ik_2), \end{cases} \quad (21)$$

po nepoznatim k_1 i k_2 . U zavisnosti od funkcije f ovo je linearni ili nelinearni sistem od dvije jednačine. U slučaju kada je funkcija f linearna, kao što je slučaj u (4), ovaj sistem (koji postaje sistem dvije linearne algebarske jednačine) možemo simbolički riješiti po k_1 i k_2 , te ova rješenja uvrstiti u izraz $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Kada je f nelinearna funkcija situacija je dosta komplikovanija, tada je potrebno u svakom koraku rješavati nelinearni sistem.

Ograničićemo se samo na linearni slučaj (4), sada sistem (21) poprima novi oblik

$$\begin{cases} k_1 = p_i^{(1)} [y_i + \frac{1}{4}h_ik_1 + (\frac{1}{4} - \gamma)h_ik_2] + q_i^{(1)} \\ k_2 = p_i^{(2)} [y_i + (\frac{1}{4} + \gamma)h_ik_1 + \frac{1}{4}h_ik_2] + q_i^{(2)}, \end{cases} \quad (22)$$

odnosno

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(1)}h_i\right)k_1 - p_i^{(1)}\left(\frac{1}{4} - \gamma\right)h_ik_2 = p_i^{(1)}y_i + q_i^{(1)} \\ -p_i^{(2)}\left(\frac{1}{4} + \gamma\right)h_ik_1 + \left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(2)}h_i\right)k_2 = p_i^{(2)}y_i + q_i^{(2)}, \end{cases} \quad (23)$$

gdje su $p_i^{(1)} = p(x_i + (\frac{1}{2} - \gamma)h_i)$, $p_i^{(2)} = p(x_i + (\frac{1}{2} + \gamma)h_i)$, analogno vrijedi i za $q_i^{(1)}$ i $q_i^{(2)}$. Rješavajući prethodni sistem po k_1 i k_2 , te uvrštavajući dobijene izraze u treći izraz iz (20) dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h_i \frac{\left(p_i^{(1)}y_i + q_i^{(1)}\right)\left(1 + p_i^{(2)}\gamma h_i\right) + \left(p_i^{(2)}y_i + q_i^{(2)}\right)\left(1 - p_i^{(1)}\gamma h_i\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(1)}h_i\right)\left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(2)}h_i\right) - p_i^{(1)}p_i^{(2)}\left(\frac{1}{16} - \gamma^2\right)h_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (24)$$

Prethodna formula predstavlja implicitnu metodu (20) u slučaju kada je f linearna funkcija ($f(x, y) = p(x)y + q(x)$), to jest kada je diferencijalna jednačina linearna.

4. Numerički ekperimenti

U ovoj sekciji biće testirane metode date u prethodnom dijelu rada na Shishkinovoj mreži koja je generisana funkcijom (10). Veličine koje ćemo računati u ovim numeričkim ekperimentima su vrijednost greške E_N i brzina konvergencije Ord. Računamo ih po formulama

$$E_N = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i) - y_i^N|, \tag{25}$$

$$\text{Ord} = \frac{\ln E_N - \ln E_{2N}}{\ln(2k/(k+1))}, \tag{26}$$

gdje je $N = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, dok $y(x_i)$ predstavlja vrijednost tačnog rješenja Cauchyjevog problema u tački mreže x_i , a y_i^N je vrijednost odgovarajućeg numeričkog rješenja, takode u tački mreže x_i , ali koje je izračunato na mreži sa $N + 1$ tačkom.

Primjer 1. *Dat je Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \varepsilon y' = -xy + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon} + x(x - e^{-x/\varepsilon} + 1), & 0 \leq x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tačno rješenje ovog Cauchyjevog problema je $y(x) = x - e^{-x/\varepsilon} + 1$.

Mrežu za računanje numeričkog rješenja generišemo koristeći generativnu funkciju (3). Vrijednosti parametara, koji su korišteni u numeričkim eksperimentima, su $n = 2$, $b = 1$ i $\alpha = 1/2$. Vrijednosti perturbacionog parametra ε i broja tačaka N dati su u tabelama.

U Tabelama (4), (5), (6), predstavljene su vrijednosti E_N i Ord, za Runge–Kutta metode (18), (19) i (24), respektivno.

N	$\varepsilon = 2^{-2}$		$\varepsilon = 2^{-4}$		$\varepsilon = 2^{-6}$		$\varepsilon = 2^{-8}$		$\varepsilon = 2^{-10}$	
	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	1.49e-06	2.00	1.03e-05	2.00	1.31e-05	2.00	2.78e-05	2.68	3.00e-04	3.30
2^{11}	4.51e-07	2.00	3.13e-06	2.00	3.96e-06	2.00	5.61e-06	2.38	4.09e-05	3.20
2^{12}	1.34e-07	2.00	9.32e-07	2.00	1.81e-06	2.00	1.33e-06	2.04	5.88e-06	2.98
2^{13}	3.94e-08	2.00	2.74e-07	2.00	3.46e-07	2.00	3.81e-07	2.00	9.45e-07	2.69
2^{14}	1.14e-08	2.00	7.93e-08	2.00	1.00e-07	2.00	1.10e-07	2.00	1.78e-07	2.42
2^{15}	3.28e-09	2.00	2.28e-08	2.00	2.88e-08	2.00	3.17e-08	2.00	3.94e-08	2.22
2^{16}	9.34e-10	2.00	6.48e-09	2.00	8.20e-09	2.00	9.01e-09	2.00	9.76e-09	2.07
2^{17}	2.64e-10	-	1.83e-09	-	2.31e-09	-	2.54e-09	-	2.64e-09	-

Tabela 4: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ε

N	$\varepsilon = 2^{-2}$		$\varepsilon = 2^{-4}$		$\varepsilon = 2^{-6}$		$\varepsilon = 2^{-8}$		$\varepsilon = 2^{-10}$	
	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	2.34e-09	3.00	5.40e-09	3.00	2.23e-09	3.68	3.30e-09	3.04	2.01e-09	3.18
2^{11}	3.86e-10	3.00	8.97e-10	3.00	2.46e-10	3.00	5.34e-10	3.02	3.00e-10	3.10
2^{12}	6.27e-11	3.00	1.45e-10	3.00	3.99e-11	3.00	8.54e-11	3.01	4.56e-11	3.06
2^{13}	9.96e-12	3.00	2.30e-11	3.00	6.33e-12	3.00	1.34e-11	3.00	6.98e-12	3.03
2^{14}	1.55e-12	3.00	3.60e-12	2.99	9.88e-13	2.96	2.09e-12	2.99	1.06e-12	3.01
2^{15}	2.38e-13	3.03	5.55e-13	2.90	1.55e-13	2.61	3.23e-13	3.06	1.62e-13	2.62
2^{16}	3.53e-14	-3.22	8.94e-14	2.53	2.99e-14	-0.65	4.70e-14	-0.21	3.13e-14	-0.59
2^{17}	2.70e-13	-	1.79e-14	-	4.52e-14	-	5.39e-14	-	4.55e-14	-

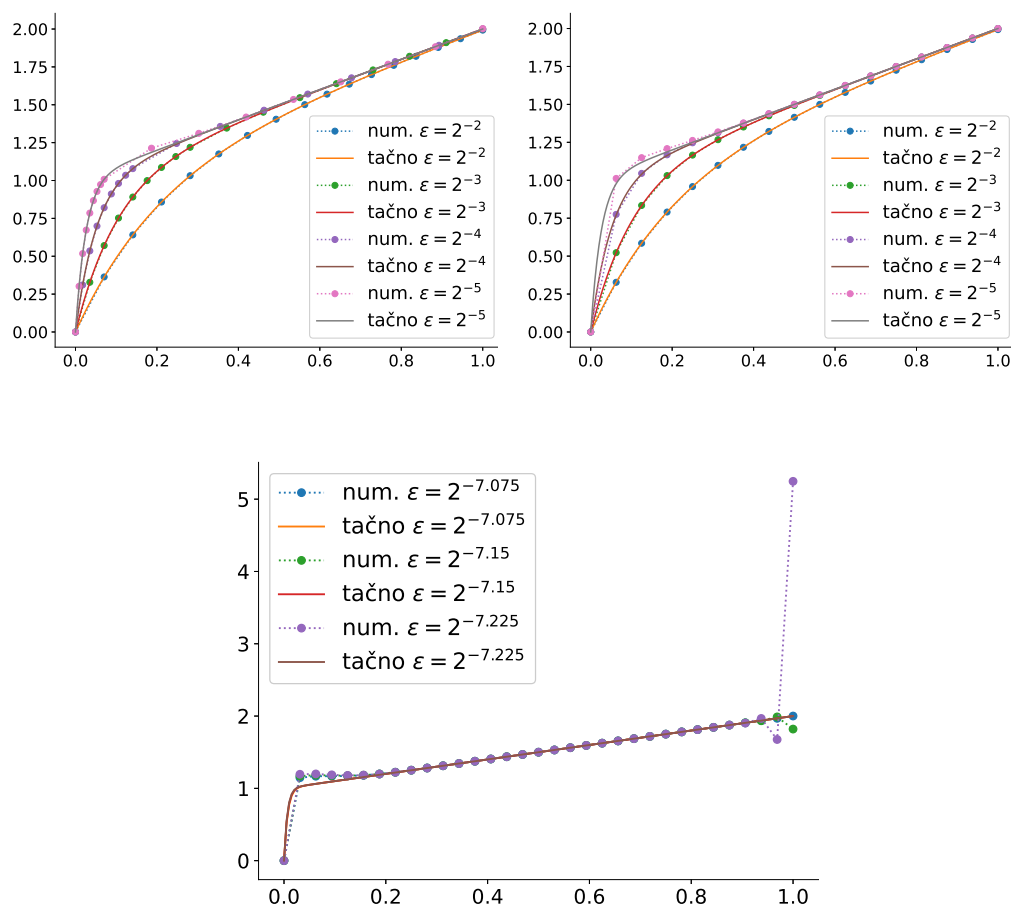
Tabela 5: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ε

5. Diskusija i zaključak

U ovom radu razmatrano je numeričko rješavanje Cauchyjevog problema, čije rješenje ima izražen sloj. Navedeni su razlozi korištenja slojno–adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanju diferencijalnih jednačina, čija tačna rješenja imaju brze promjene. Ova teorija je dobro razvijena za rješavanje rubnih problema i u ovom radu ista metodologija je primjenjena za rješavanje Cauchyjevog problema.

N	$\epsilon = 2^{-2}$		$\epsilon = 2^{-4}$		$\epsilon = 2^{-6}$		$\epsilon = 2^{-8}$		$\epsilon = 2^{-10}$	
	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	5.84e-5	5.15	5.19e-5	5.17	4.58e-5	5.19	4.01e-5	5.21	3.48e-5	5.23
2^{11}	2.68e-6	5.19	2.35e-6	5.21	2.05e-6	5.23	1.77e-6	5.25	1.52e-6	5.28
2^{12}	1.15e-7	5.16	9.98e-8	5.18	8.59e-8	5.20	7.32e-8	5.22	6.18e-8	5.25
2^{13}	4.84e-9	5.12	4.15e-9	5.14	3.53e-9	5.16	2.97e-9	5.18	2.47e-9	5.20
2^{14}	2.03e-10	5.08	1.72e-10	5.10	1.44e-10	5.12	1.19e-10	5.14	9.84e-11	5.16
2^{15}	8.50e-13	5.08	7.13e-12	5.10	5.91e-12	5.13	4.83e-12	5.12	3.90e-12	5.23
2^{16}	3.48e-13	3.73	2.88e-13	2.31	2.34e-13	2.01	1.93e-13	2.36	1.45e-13	1.19
2^{17}	4.10e-14	-	6.68e-14	-	6.55e-14	-	4.32e-14	-	6.38e-14	-

Tabela 6: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ϵ



Slika 5: Grafici tačnog i numeričkog rješenja na Shishkinovoj (lijevo–gore), uniformnoj mreži (desno–gore) za $N = 32$ i vrijednosti perturbacionog parametra $\epsilon = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-6}$; grafici tačnog i numeričkog rješenja na uniformnoj mreži za $N = 32$ i $\epsilon = 2^{-7.075}, 2^{-7.15}, 2^{-7.225}$

Prvo je korištena Runge–Kutta metoda (18) na mreži generisanoj sa (10). U Tabeli 4 su odgovarajuće vrijednosti E_n i Ord. Ova Runge–Kutta metoda je drugog reda, u klasičnoj teoriji (uniformna mreža, tačna rješenja nemaju izražene brze promjene) greška metode je $\mathcal{O}(h^3)$, odnosno brzina konvergencije je

3. Izračunata vrijednost parametra Ord je 2 ili je bliska ovoj vrijednosti, osim u posljednjoj koloni za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-10}$, gdje vrijednost Ord počinje sa 3.22 za $N = 2^{10}$ i blago se smanjuje do 2.07 za $N = 2^{17}$. Ove vrijednosti nagovještavaju ε -uniformnu konvergenciju, osobinu koja se zahtijeva od metoda koje se koriste za rješavanje Cauchyjevih i rubnih problema čija rješenja imaju izražene brze promjene. Grubo govoreći, metoda ima osobinu ε -uniformne konvergencije, ako vrijednost greške (dobijena u odgovarajućoj normi-uobičajeno maksimum vektorska norma) ne izlazi iz dobijenih teorijskih okvira pri smanjenju perturbacionog parametra ε . Treba napomenuti da se računanje vrijednost parametra Ord blago razlikuje u slučaju korištenja uniformne i Shishkinove mreže.

U Tabeli 5 su vrijednosti E_n i Ord, ali sada je korištena Runge–Kutta metoda (19) na mreži generisanoj sa (10). U klasičnoj teoriji vrijednost greške za ovu metodu je reda $\mathcal{O}(h^4)$, i brzine konvergencije je 4. Iz priložene tabele vidimo da je vrijednost parametra Ord 3 ili je bliska ovoj vrijednosti za broj tačaka mreže $N = 2^{10}$ do $N = 2^{15}$. Povećanjem broja tačaka $N = 2^{16}$ i dalje, dolazi do smanjenja vrijednosti parametra Ord, te čak njegova vrijednost postaje i negativna. Ovakvo ponašanje metode nije poželjno i može se objasniti akumulacijom vrijednosti greške, koja je prisutna pri numeričkom rješavanju Cuchyjevih problema tipa (3) i sličnih.

U posljednjoj, Tabeli 6, su vrijednosti dobijene korištenjem (24) i mreže generisane sa (10). Ovo je Runge–Kutta implicitna metoda drugog reda, vrijednost greške je $\mathcal{O}(h^3)$, odnosno brzina konvergencije je 3. Dobijene vrijednosti su veće od 5 za broj tačaka mreže $N = 2^{10}$ do $N = 2^{15}$, povećanje broja tačaka vrijednost parametra Ord naglo se smanjuje. Ovakvo velika odstupanja izračunatih vrijednosti od teorijskih nisu ni u ovom slučaju poželjna.

Na Slici 5 gore lijevo, su grafici tačnih i numeričkih rješenja za različite vrijednosti perturbacionog parametra ε . Sva numerička rješenja su dobijena korištenjem $N = 33$ tačke. Sa grafika lako je uočiti da se smanjivanjem parametra ε sloj sužava, odnosno da je promjena tačnog rješenja koji odgovara tom dijelu domena sve brža. Evidentno, tačke numeričkog rješenja su dobro raspoređene i u sloju, a to se postiže fleksibilnom konstrukcijom mreže. Sa druge strane na Slici 5 gore desno, predstavljeni su grafici tačnih i numeričkih rješenja. Ovak put za računanje numeričkih rješenja korištena je uniformna mreža. Nije teško uočiti lošu osobinu korištenja uniformnih mreža za numeričko rješavanje problema (3) i njemu sličnih. Naime, smanjivanjem parametra ε , uz korištenje istog broja tačaka mreže, sve je manji broj tačaka mreže u sloju, odnosno rastojanje između dvije tačke numeričkog rješenja postaje neprihvatljivo veliko.

I na kraju, na posljednjoj Slici 5 dole, predstavljeni su grafici tačnih i numeričkih rješenja za različite vrijednosti parametra ε i broj tačka $N = 33$. Promjena parametra ε je veoma mala i na grafiku se ne mogu uočiti razlike između tačnih rješenja. Međutim razlika između numeričkih rješenja je velika. Na lijevoj strani grafika, vidi se da nema dovoljno tačaka mreže u sloju i da su tačke numeričkog rješenja previše udaljene jedna od druge, te da je vrijednost greške velika (rastojanje tačaka numeričkog rješenja od grafika tačnog rješenja). Sa desne strane grafika, situacija je lošija, pošto se pojavljuju oscilatorna rješenja. Plavim tačkama predstavljeno je numeričko rješenje za $\varepsilon = 2^{-7.075}$, i ne može se uočiti sa grafika, da ovo rješenje odstupa od tačnog u okolini $x = 1$. Zelenim tačkama predstavljeno je numeričko rješenje za $\varepsilon = 2^{-7.15}$, sa grafika je lako uočiti da se posljednja izračunata vrijednost numeričkog rješenja (za $x = 1$) razlikuje od vrijednosti tačnog rješenja–posljednja zelena tačka. I na kraju, posebno je kritična situacija sa numeričkim rješenjem za $\varepsilon = 2^{-7.225}$, koje je predstavljeno ljubičastim tačkama. Ovo numeričko rješenje ima veoma izraženo oscilatorno ponašanje. Vrijednost greške je veoma velika i ovakvo numeričko rješenje je potpuno neupotrebljivo, a samim tim njegovo ponašanje je potpuno neprihvatljivo. Eliminisanje ovakvih oscilatornih rješenja je blisko povezano sa ispitivanjem stabilnosti metode.

Na osnovu testiranih primjera, možemo zaključiti da je uvođenje slojno–adaptivnih mreža dobra polazna tačka za numeričko rješavanje Cauchyjevih problema tipa (3) i sličnih. Danas je ovo područje predmet intenzivnog istraživanja i ono se odvija u nekoliko smjerova, aproksimacija izvoda prilagođena ovim problemima, razvoj specifičnih metoda kao i modifikacija slojno–adaptivnih mreža.

Literatura

- [1] N.S. Bakhvalov, *Towards optimization of methods for solving boundary value problems in the presence of boundary layers*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., Vol 9, pp 841–859, 1969.

- [2] W. Cheney, and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole-Thompson Learning, Belmont, USA, 2004.
- [3] W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*, Zeit. Math. Phys., Vol.46, pp 435-453, 1901.
- [4] V. D. Liseikin, *Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems*, VSP BV, AH Zeist, The Netherlands, 2001.
- [5] V. D. Liseikin, *Grid Generation for Problems with Boundary and Interior Layers*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2018.
- [6] V. D. Liseikin, S. Karasuljić, and V. I. Paasonen, *Numerical Grids and High-Order Schemes for Problems with Boundary and Interior Layers*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2021.
- [7] V.D. Lisejkin and V. E. Petrenko, *The adaptive-invariant method for the numerical solution of problems with boundary and interior layers*, Novosibirsk: Vychislitel'nyj Tsentr SO AN SSSR, 1989.
- [8] C. Runge, *Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*, Zenodo, 1895.
- [9] G. I. Shishkin, *Grid approximation of singularly perturbed parabolic equations with internal layers*, Sov. J. Numer. Anal. M.Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Vol 3(5), pp 393-408, 1988.
- [10] R. Vulcanović, *Mesh construction for discretization of singularly perturbed boundary value problems*, Univerzitet u Novom Sadu, 1986.

2

KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

Zadatak 1. *Vedad i Bekir imaju isti rođendan. Vedad je bio dva puta stariji od Bekira, kada je Vedad imao isto godina kao Bekir sada. Koliko godina ima Bekir?*

Zadatak 2. *Kapa sa šalom je plaćena 120 KM. Ako je kapa od šala skuplja za 100 KM, koliko je koštao šal?*

Zadatak 3. *Učitelj je zadao zadatak učeniku da od postavljenog broja oduzme 3, a zatim da rezultat podijeli sa 9. Učenik je pogrešno razumio zadatak pa je od zadatog broja oduzeo broj 9, a rezultat podijelio sa 3 i dobio rješenje 43. Učitelj naravno nije bio zadovoljan rješenjem. Koje rješenje je trebalo dobiti ispravnim radom?*

Zadatak 4. *U četiri vreće se nalazi ista količina riže. Ako iz svake vreće uzmemo po 9 kg riže, onda u sve četiri vreće zajedno ostane onoliko riže koliko je prije vađenja bilo u jednoj vreći. Koliko je riže ostalo u svakoj od vreća?*

Zadatak 5. *U jednoj godini je bilo 53 petka. Ako je 1. januar bio četvrtak, koji dan u sedmici je bio 1. april?*

Nagradni zadatak: Šifra

Kriptografija je naučna disciplina o metodama za slanje poruka (informacija) u oblicima koji će biti razumljivi samo onima koji ih "znaju" pročitati. Riječ dolazi od grčkog pridjeva kriptos ($\kappa\rho\upsilon\pi\tau\omicron\varsigma$) značenja *skriven* i glagola grafo ($\gamma\rho\alpha\varphi\omega$), *pisati*. U ranoj fazi svog postojanja kriptografija je imala čari umjetnosti. Posljednjih tridesetak godina donosi nešto sasvim novo. Naime, umjetnost kriptografije se spaja sa naukom te tako danas govorimo o modernoj kriptologiji, koja je temelj računarske i komunikacione tehnologije. Zasniva se na strogim matematičkim principima i spaja oblasti kao što su teorija brojeva, teorija računarske kompleksnosti i teorija vjerovatnoće.

Jedna od najslavnijih mašina za šifriranje je poznata *Enigma*. Prvobitno zamišljena kao komercijalni proizvod, u čemu nije uspjela, preuzeli su je njemački nacisti, poboljšali je, čime je postala glavni uređaj za šifriranje u nacističkoj Njemačkoj. Prvi je njenu šifru "provalio" britanski matematičar Alan Turing (film *The Imitation Game*, 2014).

Zadatak. Poznati kriptolog Turingus na svojoj mašini *Enigma* šifrira poruke koje se satoje od znakova 1, 2, 3 i 4 (bilo kakve dužine), znakovima 1, 2, 3 i 4, koristeći se tipkama malih i velikih slova a, b, c i d. Pritiskom na neku od ovih tipki na svojoj mašini, mijenja izgled poruke.

- Pritiskom na tipku A pretvara jedinicu u dvicu i tricicu.
- Pritiskom na tipku B pretvara dvicu u dvije trice i četvorku.
- Pritiskom na tipku C pretvara tricicu u četvorku i tri jedinice.
- Pritiskom na tipku D pretvara četvorku u jedinicu i četiri dvice.

Kada Turingus pritisne tipku malih slova, ona djeluje u suprotnom smjeru:

- a pretvara dvicu i tricicu u jedinicu.
- b pretvara dvije trice i četvorku u dvicu.
- c pretvara četvorku i tri jedinice u tricicu.
- d pretvara jedinicu i četiri dvice u četvorku.

Turingus bi želio kodirati poruku koja ima samo jedan znak, 2. On razmišlja o šiframa sljedećeg oblika:

J5: Šifra sa najmanje pet jedinica, ali bez dvica, trica i četvorki.

D5: Šifra sa najmanje pet dvica, ali bez jedinica, trica i četvorki.

T5: Šifra sa najmanje pet trica, ali bez jedinica, dvica i četvorki.

Č5: Šifra sa najmanje pet četvorki, ali bez jedinica, dvica i trica.

Koju od ovih šifri Turingus može postići isključivo koristeći tipke malih i velikih slova a,b,c i d?

- | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------|
| 1. J5, D5, T5 i Č5 | 4. Samo J5, T5 i Č5 | 7. Samo J5 i T5 |
| 2. Samo J5, D5 i T5 | 5. Samo D5, T5 i Č5 | 8. Samo J5 i Č5 |
| 3. Samo J5, D5 i Č5 | 6. Samo J5 i D5 | 9. Samo D5 i T5 |

Ciljna skupina: svi uzrasti

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 01.06.2024. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)

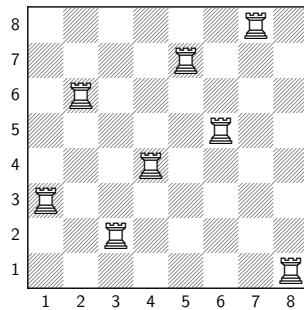
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

Rješenje i rješavatelji nagradnog zadatka iz Evolvente 5 (2) 2022.

Prvo, tačno pristiglo rješenje nagradnog zadatka iz broja **5 (2) 2022.** je dao **Adnan Halilović**, Gimnazija Živinice, odjeljenje II 2. Time je ovaj rješavatelj zaslužio predviđenu nagradu uredništva Evolvente.

Tačno rješenje je dao i **Mahir Salihbašić**, student II godine studija matematike, PMF Tuzla, a tačno ali nepotpuno rješenje je dao i **Esmir Zoletić**.

Zadatak. Upišimo na 64 polja šahovske ploče redom brojeve od 1 do 64, tako da u prvu vrstu upišemo brojeve od 1 do 8, u drugu vrstu brojeve od 9 do 16 (slijeva udesno) i tako do osme vrste. Proizvoljno postavimo 8 topova (na jedan od 40 320 načina) tako da nijedan ne napada drugoga. Koliki je zbir brojeva onih polja koja zauzimaju postavljene topovi?



Slika 1: Jedan od mogućih 40 320 rasporeda topova na tabli.

Objavljujemo rješenje (u cijelosti) .

Rješenje: Numerišimo vrste (horizontalno) i kolone (vertikalno) šahovske table redom sa brojevima 1 do 8. Sva šahovska polja popunjena su redom brojevima od 1 do 64. Na poziciji (1, 1) ((vrsta, kolona)) imamo 1, na poziciji (1, 2) je 2 i tako dalje do pozicije (8, 8) gdje smo upisali broj 64. Nije teško vidjeti da će na poziciji (i, j) (i broj vrste, j broj kolone, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) biti broj $8i + j - 8$. Na primjer, pozicija (2, 1) ima broj $8 \cdot 2 + 1 - 8 = 9$.

Znamo da se topovi ne napadaju međusobno ako se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi tačno jedan top. Neka su (i_k, j_k) ($k = 1, 2, \dots, 8$) pozicije na kojima se nalaze "nenapadajućih" osam topova. Tada mora biti,

$$i_1 + i_2 + \dots + i_8 = j_1 + j_2 + \dots + j_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$

Zbir brojeva onih polja koja zauzimaju postavljene topovi, bez obzira koju od 40 320 pozicija posmatrali, jednak je

$$\sum = (8i_1 + j_1 - 8) + (8i_2 + j_2 - 8) + \dots + (8i_8 + j_8 - 8).$$

Koristeći komutativnost i asocijativnost iz ovoga imamo,

$$\sum = 8(i_1 + i_2 + \dots + i_8) + (j_1 + j_2 + \dots + j_8) - 8 \cdot 8 = 8 \cdot 36 + 36 - 64 = 260.$$

□